MINISTERIO DE EDUCACION Y CIENCIA
UNIVERSIDAD NACIONAL
DE EDUCACION A DISTANCIA

00.10

MATEMATICAS BASICAS

Cursos de acceso directo a la U.N.E.D

© *UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACION A DISTANCIA - Madrid 1982*

Ministerio de Educación y Ciencia

Reservados todos los derechos y prohibida su reproducción total o parcial

Depósito legal: M. 20.338-1982

ISBN: 84-362-0036-5

Impreso por:
GREFOL, S. A., Pol. II - La Fuensanta
Móstoles (Madrid)

PRESENTACION

Esta asignatura de **Matemáticas Básicas** está preparada pensando, fundamentalmente, en aquellos alumnos **mayores de 25 años** que han decidido estudiar carreras correspondientes a las Facultades de Filosofía y Letras y Derecho. Son, por tanto, unas Matemáticas elementales destinadas a estudiantes que, en general, no tienen una preferencia especial hacia las Matemáticas. Al plantear este curso de Matemáticas hemos intentado tener presente esta circunstancia. Además, es complicado establecer un punto de partida cuando los alumnos a los que va destinado no tienen un mismo nivel de conocimientos matemáticos previos, ni siquiera presentan una uniformidad en relación con su vocabulario, capacidad de comprensión, desarrollo lógico, etc. Hemos tratado de ser muy simples en la exposición, incluyendo al mismo tiempo que los conceptos necesarios, un método de estudio, que esperamos sea una ayuda eficaz para los lectores más retrasados y así evitar el desánimo.

Esta asignatura está estructurada en seis Unídades Didácticas, siendo el contenido de cada una de ellas el siguiente:

Unidad Didáctica/1

1. Nociones sobre conjuntos.
2. Relaciones binarias.
3. Correspondencias entre conjuntos.
4. Estructuras algebráicas.

Unidad Didáctica/2

5. Algebra elemental de las partes de un conjunto.
6. Lógica elemental y formal.
7. Algebra de Boole de las proposiciones.
8. Circuitos lógicos.

Unidad Didáctica/3

9. El número natural.
10. El número entero.
11. Divisibilidad en el anillo de los números enteros.
12. El número racional.
13. Ultimas ampliaciones del concepto de número.

Unidad Didáctica/4

14. Expresiones algebráicas.
15. Ecuaciones lineales.
16. Radicales.
17. Ecuaciones de segundo grado.

Unidad Didáctica/5

18. Combinatoria.
19. Algebra de los sucesos aleatorios.
20. Frecuencia y probabilidad.
21. Distintos tipos de probabilidad.

Unidad Didáctica/6

22. Variables estadísticas.
23. Medias de centralización y dispersión.
24. Correlación y regresión.
25. Distribuciones.

Todos los temas han sido estructurados de la misma manera:

a) Esquema/Resumen.
b) Instrucciones para el estudio del tema.
c) Desarrollo del tema.
d) Conclusiones del tema.
e) Ejercicios de autocomprobación.
f) Soluciones a los ejercicios de autocomprobación.

En el desarrollo de los temas hemos intercalado una serie de cuestiones prácticas (que aparecen agrupadas bajo el título «Ejercicios y ejemplos») perfectamente desarrolladas, con el fin de aclarar conceptos que suponemos de una mayor dificultad, en unos casos, o, en otros casos, para poner de manifiesto aspectos que en una primera lectura pueden pasar desapercibidos.

Al finalizar algunos temas en el apartado «Notas aclaratorias y complementarias» presentamos algunos aspectos que no desarrollamos en su totalidad, pero consideramos interesantes para aquellos alumnos con interés en ampliar lo estudiado.

No creemos sea necesario señalar la importancia que tiene para un «alumno de letras» las matemáticas con que ahora se enfrenta, primero, porque algunos aspectos de las mismas son imprescindibles para el estudio de algunas asignaturas que encontrará más adelante (se nos ocurre pensar en la importancia que ha adquirido la Estadística en algunas disciplinas de las carreras de Filosofía y Letras) y, segundo, porque su estudio supondrá un eficaz sistema para desarrollar su capacidad lógica.

Por último, nos permitimos aconsejar a nuestros alumnos que lean con atención estas Unidades Didácticas de Matemáticas Básicas en la seguridad de que no encuentran una dificultad mayor que en cualquier otra asignatura.

BIBLIOGRAFIA*

A. NEGRO: *Cerca de la Matemática*. Editorial Alhambra.

E. ROANES: *Didáctica de las Matemáticas*. Editorial Anaya.

M. R. SPIEGEL: Algebra superior. Schaum.

F. AYRES: *Algebra moderna*. Schaum.

ID., ID.: *Matemáticas finitas*. Schaum.

B. BAUMSLAG: *Teoría de conjuntos*. Schaum.

(*) Las Unidades Didácticas de Matemáticas Básicas son autosuficientes, la bibliografía que recomendamos lo hacemos a título de orientación.

TEMA I

NOCIONES SOBRE CONJUNTOS

ESQUEMA/RESUMEN

1. Conjunto.
   - 1.1. Idea intuitiva.
   - 1.2. Notación.
   - 1.3. Definición de un conjunto.
   - 1.4. Representación gráfica.
2. Subconjuntos.
3. Conjuntos unitarios.
4. Conjunto vacío.
5. Conjunto de las partes de un conjunto.
6. Operaciones con conjuntos.
   - 6.1. Unión de conjuntos.
   - 6.2. Propiedades de la unión de conjuntos.
   - 6.3. Intersección de conjuntos.
   - 6.4. Propiedades de la intersección de conjuntos.
7. Conjunto complementario de uno dado.
8. Notas aclaratorias y complementarias.

1.- NOCIONES SOBRE CONJUNTOS.
2.- RELACIONES BINARIAS.
3.- CORRESPONDENCIAS ENTRE CONJUNTOS
4.- ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS.

INSTRUCCIONES PARA EL ESTUDIO DEL TEMA I

Empezamos este Curso de Matemáticas introduciendo la idea de Conjunto. Lo hacemos de una manera intuitiva, al principio, para llegar después a unos conceptos matemáticos, más precisos, pero sin excesivo formalismo. Una vez entendido perfectamente el concepto de Conjunto, avance en el tema estudiando algo muy relacionado con la definición de Conjuntos y Subconjuntos. Después mostraremos algunos Conjuntos que podríamos llamar especiales o particulares, tales son el Conjunto Vacío, los Conjuntos Unitarios y el Conjunto de las Partes de un Conjunto. Hasta aquí son los rudimentos o conceptos fundamentales para estudiar el resto del tema. No le importe dedicar mucho tiempo a estas nociones primeras, consideramos como medida primordial el no proseguir el estudio sin antes no tener la seguridad de una perfecta comprensión de lo anteriormente estudiado. Si así se hace, terminará el tema sin mayores dificultades.

Terminamos dando unas ideas sobre las operaciones con Conjuntos. Podemos adelantar la poca dificultad que presenta su estudio. De forma elemental y sencilla: dados dos conjuntos perfectamente definidos, averiguar un nuevo conjunto de acuerdo con unos criterios dados de antemano.

Un último consejo, válido para todo este Curso de Matemáticas: preste mucha atención a los ejemplos que se intercalan en cada tema, agrupados en un apartado que hemos dado en llamar «Ejercicios y Problemas». Estos trabajos contribuirán a una mejor comprensión de lo estudiado y facilitarán la realización de los «Ejercicios de Autocomprobación».

1. CONJUNTO

1.1. Idea intuitiva

La idea de conjunto es sobradamente conocida en el lenguaje ordinario, para dar la noción matemática de conjunto empezaremos recordando la noción vulgar del mismo. Habitualmente hablamos de un conjunto de personas, de un conjunto de papeles, de un conjunto de libros, de un conjunto de alumnos, de un conjunto de edificios, del conjunto de los dias de la semana pasada que ha llovido, etc., entendemos perfectamente que se trata de una agrupación o reunión de personas, de papeles, de libros, etc., realizada arbitrariamente.

Esta agrupación de objetos de diversos tipos, realizada arbitrariamente es lo que vamos a llamar, en un principio, *conjunto*; para empezar esta definición nos es suficiente, a través de ejemplos iremos dando forma matemática a este concepto.

A cada uno de los objetos que forman un conjunto le llamaremos *elemento* del conjunto.

Ejercicios y ejemplos

1. El conjunto de los meses del año; los elementos de este conjunto son: enero, febrero, marzo, abril, mayo, junio, julio, agosto, setiembre, octubre, noviembre y diciembre. Este conjunto tiene doce elementos. El mes de julio, por ejemplo, es un elemento de este conjunto.

2. El conjunto formado por los dias de la semana, tiene siete elementos: lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado y domingo. El jueves es un elemento de este conjunto.

3. El conjunto formado por todos los números digitos o de una sola cifra tiene por elementos los números siguientes: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, y 9 como consecuencia es un conjunto que tiene diez elementos.

4. El conjunto de los alumnos de una clase, está perfectamente determinado, por los nombres y apellidos de las personas que pertenezcan a esta clase.

5. El tren que circula entre Madrid y Barcelona es un conjunto de vagones.

6. El conjunto formado por todos los números pares, tiene por elementos: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14... Conviene observar que este conjunto no tiene un número finito de elementos, es un conjunto infinito.

7. El conjunto formado por todas las provincias andaluzas es un conjunto perfectamente determinado, cuyos elementos son: Almería, Granada Málaga, Jaén, Cádiz, Sevilla, Huelva y Córdoba.

8. El conjunto formado por las vocales de nuestro alfabeto, tiene cinco elementos: a, e, i, o, u.

Si analizamos con detalle los ejemplos que acabamos de exponer, sacamos las siguientes conclusiones:

* Los conjuntos han sido definidos arbitrariamente, no se ha seguido criterio alguno, siempre que agrupemos una serie de objetos tenemos un conjunto, no hace falta imponer otra restricción.

* Todos los elementos del conjunto, tienen que estar perfectamente determinados, con el criterio utilizado para definirlo, esto es, tenemos que saber con exactitud si un elemento determinado, está incluido o no en dicho conjunto.

* Habitualmente diremos que los elementos integrantes de un conjunto pertenecen a éste, o de otra manera, entre un conjunto y los elementos que lo constituyen existe una relación de pertenencia. Así podemos afirmar en el ejemplo 3, que el número 4 pertenece al conjunto de los números dígitos.

* Hemos visto conjuntos de dos tipos, unos que tenían un número finito de elementos, mientras que en otros el número de elementos es infinito (ver ejemplo 6: la serie de los números pares puede prolongarse indefinidamente). Intuitivamente podemos decir: un conjunto es finito si consta de un cierto número de elementos distintos, es decir, si al contar los diferentes elementos del conjunto el proceso de contar puede acabar, si no, el conjunto es infinito.

1.2. Notación

Para abreviar y por comodidad, designaremos con un signo a los conjuntos, de ordinario será una letra mayúscula, que viene a ser una etiqueta que le pegamos para poder reconocerlo entre otros conjuntos.

Por otra parte, a los elementos que forman los conjuntos los representaremos también por signos, generalmente letras minúsculas, números u otros símbolos, según los casos. A esta representación nos iremos acostumbrando a medida que vayamos mostrando ejemplos y ejercicios.

A este respecto conviene añadir dos cosas, a modo de advertencia: una, dos elementos distintos de un mismo conjunto no se pueden designar por una misma letra o signo y otra, no emplearemos dos letras distintas para designar a un mismo elemento de un conjunto.

Para escribir un conjunto anotaremos sus elementos entre dos llaves { }, bien sea con su nombre completo o los signos representativos.

Ejercicios y problemas

1. El conjunto formado por los cinco primeros números dígitos, podemos representarlo así:

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

2. El conjunto de las cinco letras vocales, se puede expresar así:

$$V = \{a, e, i, o, u\}$$

3. El conjunto formado por los días de la semana podemos escribirlo así:

$$S = \{l, m, x, j, v, s, d\}$$

en este caso el simbolismo utilizado es fácil de adivinar:

lunes	lo	representamos	por	l
martes	"	"	"	m
miércoles	"	"	"	x
jueves	"	"	"	j
viernes	"	"	"	v
sábado	"	"	"	s
domingo	"	"	"	d

4. Si Juan, Antonio y Pedro son mis tres amigos, podemos representarlo asi:

$$C = \{Juan, Antonio, Pedro\}$$

Habitualmente se utiliza un lenguaje convencional para indicar que un elemento pertenece a un determinado conjunto, así si nos referimos al conjunto mostrado en el último ejemplo, podemos decir que Juan pertenece al conjunto C, de una manera más breve diremos Juan $\in$ C

El símbolo $\in$ se lee: «pertenece a»

También se puede representar de forma abreviada la circunstancia de un elemento que no pertenece a un conjunto, así podemos decir que l no pertenece al conjunto de vocales, de forma concisa lo expresamos $l \notin V$.

El símbolo $\notin$ significa: «no pertenece a»

1.3. Definición de un conjunto

Un conjunto se dice que está definido cuando, dado un elemento cualquiera, se puede decir si pertenece o no pertenece a ese conjunto. Parece claro pensar que el equipo de futbol de la ciudad en donde resido es un conjunto de futbolistas perfectamente definido, dado un jugador de fútbol podemos determinar sin miedo a equivocarnos si pertenece o no a este equipo; por el contrario, el conjunto de días del año próximo en los que se registrará lluvia en la ciudad donde residimos, no está bien definido el día 4 de mayo del año que viene no podemos determinar con exactitud si lloverá o no.

Un conjunto se puede definir de dos maneras distintas:

a) Por extensión: nombrando todos y cada uno de los elementos que lo constituyen. Así el conjunto formado por los alumnos de una clase, si lo definimos por extensión tendríamos que nombrar a todos y cada uno de los alumnos de esta clase.

Cuando un conjunto ha sido definido por extensión, para saber si un objeto determinado pertenece o no a ese conjunto bastará observar si ha sido nombrado o no entre los elementos del conjunto.

Esta forma de definir un conjunto no siempre resulta la más adecuada, aunque parece la más natural. Resulta algo fatigoso definir por extensión el conjunto formado por todos los habitantes de Madrid.

b) *Por comprensión:* enunciando una propiedad que sea cumplida por todos los elementos del conjunto y sólo por ellos. Cuando decimos el conjunto formado por las letras vocales, enunciamos una propiedad característica que solamente verifican cinco elementos, las letras a, e, i, o, u.

La definición por comprensión es la única posible si se trata de un conjunto de infinitos elementos, pues, entonces no se podrán enumerar en una definición por extensión. Para saber, en una definición por comprensión, si un objeto pertenece al conjunto, basta ver si cumple la propiedad característica.

En el cuadro siguiente, indicamos varios ejemplos de conjuntos definidos simultaneamente por extensión y comprensión.

EXTENSION	COMPRENSION
C = {España, Francia, Italia, etc.}	El conjunto formado por las naciones europeas bañadas por el Mediterráneo.
A = {10, 12, 14, 16, 18, 20}	A es el conjunto formado por los números pares comprendidos entre 10 y 20.
B = {junio, julio, agosto, setiembre}	El conjunto B, está formado por los meses de verano.
D = {a, e, i, o, u}	Conjunto de vocales del alfabeto español.
C = {junio, setiembre}	Conjunto de los meses en que empieza y termina el verano.
M = {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, ...}*	M es el conjunto de los números impares (es un conjunto de infinitos elementos).
H = {a, b, c, d, e}	H es el conjunto formado por las cinco primeras letras del abecedario español.
T = {Pontevedra, La Coruña, Lugo}	El conjunto T es el de las provincias gallegas marítimas.
E = {2, 4, 6}	E es el conjunto de los números pares menores que 7.

Conviene hacer una observación importante: Un mismo conjunto se puede definir por comprensión de varios modos, pero hay que tener siempre presente, como decíamos antes, que un elemento dado no pueda a la vez pertenecer y no pertenecer al conjunto.

Podemos utilizar el último conjunto del cuadro anterior, a modo de aclaración: el conjunto E = {2, 4, 6} se puede definir por comprensión de esta otra manera: «el conjunto de los múltiplos de 2, comprendidos entre

* Con los puntos suspensivos queremos indicar que es una función de infinitos elementos.

1 y 7». Parece claro, que dado un número cualquiera, el 3, por ejemplo, podemos asegurar que $3 \notin E$ (3 no pertenece al conjunto E).

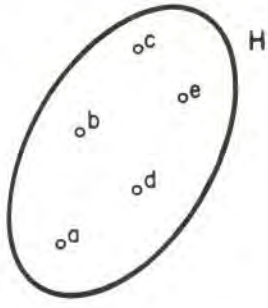
1.4. Representación gráfica

Pensamos que la idea de conjunto es muy sencilla, e incluso para la mayoría de los alumnos no es una idea nueva, aunque sea la primera vez que se enfrentan con este tipo de Matemática. De todas maneras, en algunas ocasiones, utilizaremos una representación gráfica que puede dar si cabe, más luz a la idea de conjunto.

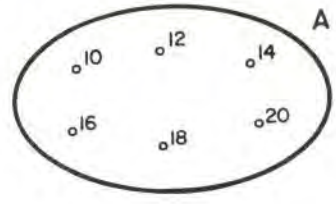
En un principio utilizaremos los diagramas de Venn (*) para representar gráficamente a los conjuntos, consisten en una línea cerrada o poligonal en cuyo interior se marcan unos puntos que representan a los elementos del conjunto. Este tipo de representación totalmente convencional nos ayudará en muchas ocasiones a seguir intuitivamente los razonamientos.

En la figura siguiente mostramos algunos conjuntos de los manejados en los ejemplos anteriores con su correspondiente representación gráfica.

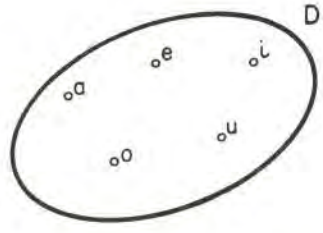
H= {a,b,c,d,e}



A= {10,12,14,16,18,20}



D= {a,e,i,o,u}



Parece claro que todos los puntos interiores a la curva cerrada serán los elementos del conjunto, son elementos que pertenecen al conjunto, mientras que los puntos exteriores, son elementos que no pertenecen al conjunto.

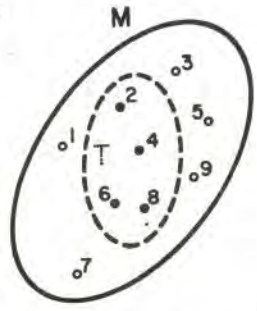
2. SUBCONJUNTO

Ya sabemos que un conjunto es una agrupación de elementos, realizada siguiendo un criterio totalmente arbitrario, con una restricción, este criterio ha de ser suficientemente rígido y claro, para que dado un elemento podamos averiguar si pertenece o no a este conjunto. Parece entonces lógico, que un mismo elemento pueda pertenecer a más de un conjunto, en los ejemplos vistos con anterioridad se ha podido observar esta circunstancia, aunque no hemos parado en ella, preocupados en otros conceptos.

Vamos a analizar esta posibilidad con algún detalle, esto es, tratamos de relacionar dos conjuntos que tienen elementos comunes. Centramos el problema con un ejemplo: Sea M = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} y T = {2, 4, 6, 8} es evidente que los conjuntos M y T están perfectamente definidos, siendo dos conjuntos distintos, tienen una particularidad, todos los elementos del conjunto T son , a su vez, elementos del conjunto M. De otra forma si todos los elementos de B están incluidos en A, no es erróneo afirmar que B está incluido en A.

* También suelen llamarse diagramas de Euler.

La figura siguiente pone de manifiesto esta situación.



En general, podemos decir: dados dos conjuntos A y B diremos que A está *contenido* en B, o que es un *subconjunto* o *parte* de B, cuando todo elemento de A pertenezca a B.

Abreviadamente lo expresaremos así $A \subset B$, que se lee A está contenido en B, A es un subconjunto de B o A es una parte de B.

Vamos a analizar este concepto con conjuntos presentados antes: Sea C el conjunto formado por todos los meses del año:

C = {enero, febrero, marzo, abril, mayo, junio, julio, agosto, setiembre, octubre, noviembre, diciembre}

B es el conjunto de los meses que tienen 30 días.

B = {abril, junio, setiembre, noviembre}

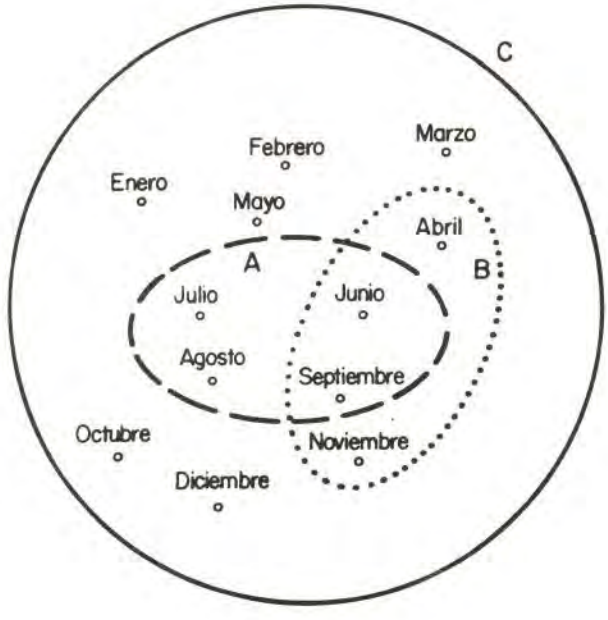
y por último, A es el conjunto de los meses de verano:

A = {junio, julio, agosto, setiembre}

Podemos observar que todos y cada uno de los elementos de B son a su vez elementos del conjunto C, como consecuencia, afirmamos que B está contenido en C, que B es una parte de C o B es un subconjunto de C, o más brevemente, $B \subset C$.

Algo análogo ocurre con los elementos de A, todos y cada uno de los elementos de este conjunto son también, elementos de C, por lo tanto A es un subconjunto de C, $A \subset C$.

La figura siguiente, trata de clasificar este ejemplo a través de los diagramas de Venn.



Conviene observar que, en este aspecto, los conjuntos A y B no están relacionados, aunque tengan dos elementos comunes.

A través de nuevos ejemplos, vamos a acostumbrarnos a relacionar dos conjuntos, según este nuevo criterio que nos permite determinar una *relación de inclusión.* Pero antes conviene recordar que si A y B son dos conjuntos dados por extensión, bastará ver si cada uno de los elementos de A ha sido nombrado al definir B, para poder asegurar $A \subset B$. En la suposición de que A y B han sido nombrados por comprensión supone que todos los elementos de A poseen una propiedad característica y, análogamente, los de B. Si $A \subset B$, todo elemento de A pertenece a B, esto es, todo elemento que posea la propiedad característica del primer conjunto poseerá la propiedad característica utilizada para definir el conjunto B.

Ejercicios y ejemplos

1. Dado el conjunto $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ los conjuntos $A = \{2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{4, 5\}$ son subconjuntos de S, todos los elementos de A, de B y de C están incluidos en S, podemos escribir $A \subset S$, $B \subset S$, $C \subset S$. Por el contrario, el conjunto $D = \{1, 2, 3, 6\}$ no es un subconjunto de S, pues si bien los elementos 1, 2, 3 pertenecen a S, el elemento $6 \notin S$.

2. Consideremos el conjunto $C = \{a, b, c\}$ ¿cuántos subconjuntos de dos elementos podemos formar a partir de C? Se pueden obtener tres subconjuntos, $X = \{a, b\}$, $Y = \{a, c\}$, $Z = \{b, c\}$.

3. Presentamos ahora dos conjuntos definidos por comprensión, G es el conjunto formado por todos los números enteros pares y F es el conjunto formado por todas las potencias de exponente entero positivo de base 2.

Podemos afirmar que $F \subset G$, todos y cada uno de los elementos que pertenecen a F, son también elementos de G. De una forma clara se ve si recurrimos a la definición por extensión (*): $G = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...\}$ y $F = \{2, 4, 8, 16, 32, ...\}$, todos los elementos de F pertenecen también a G.

4. Si consideramos el conjunto formado por todos los ciudadanos europeos, los ciudadanos españoles es un subconjunto del conjunto primero.

5. Dados los conjuntos $A = \{1\}$, $B = \{3, 5\}$, $C = \{1, 3, 5, 7\}$ y $D = \{1, 5, 7\}$, ¿qué relaciones de inclusión podemos establecer entre ellos?

Para contestar a esta pregunta tendremos que ver las relaciones existentes entre los elementos de estos conjuntos, así podemos expresarlo: $A \subset C$, $A \subset D$, $B \subset C$, $D \subset C$

6. Dado el conjunto $A = \{a, e, i, o, u\}$ formar todos los subconjuntos posibles de tres elementos.

La solución es sencilla {a, e, i} {a, e, u} {a, i, o} {a, i, u} {a, o, u} etc.

---

* Tanto F como G son conjuntos de infinitos elementos, por lo tanto no pueden definirse por extensión. La definición por extensión a que nos referimos significa el enunciado de algunos elementos de F y G.

El conjunto F ha sido obtenido calculando las sucesivas potencias de 2: 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, etcétera

7. Dados los conjuntos A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, B = {4, 5, 6, 7, 8, 9}, C = {11, 4, 8, 9}, D = {4, 5}, E = {11, 4}, F = {11}, hallar cuál de ellos es un subconjunto de A y de B a la vez.

Utilizando el procedimiento explicado en otras ocasiones, llegamos a la conclusión que el único subconjunto de A y B al mismo tiempo es D, $D \subset A$, $D \subset B$.

8. Cuando un adjetivo opera sobre un sustantivo, lo que hace es definir un subconjunto del conjunto de elementos expresados por éste. Así si el sustantivo considerado es «cuadernos» nos indica un conjunto formado por cuadernos, si añadimos el calificativo «rojo», determinamos un subconjunto del conjunto anterior, el subconjunto de todos los «cuadernos rojos».

Finalmente conviene resaltar que un subconjunto es necesario referirlo a un conjunto de partida o referencial, en este sentido, el concepto de subconjunto es un concepto relativo, no tiene sentido decir que E = {1, 2, 3} es un subconjunto, sería correcto decir: E es un subconjunto, por ejemplo, del conjunto H = {1, 2, 3, 4, 5}(*).

3. CONJUNTO UNITARIO

Consideremos el conjunto formado por los números impares comprendidos entre 10 y 30, este conjunto es:

$$B = \{11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29\}$$

De este conjunto, vamos a deducir el subconjunto formado por todos los números que sean múltiplos de 3, este subconjunto tiene 3 elementos y es:

$$A = \{15, 21, 27\}$$

si formamos, ahora, el subconjunto de B, integrado por todos los elementos que sean múltiplos de 7, obtenemos:

$$C = \{21\}$$

este conjunto tiene un único elemento. Es un *conjunto unitario.* Esta situación justifica que, si hemos de operar con conjuntos con toda generalidad, sin tener que estar eliminando en cada caso las excepciones, tenemos que aceptar los conjuntos que poseen un único elemento.

En distintas ocasiones de este tema nos han aparecido conjuntos unitarios, y hemos trabajado con ellos sin ninguna salvedad. Según esto podemos afirmar que cada elemento de un conjunto forma un subconjunto unitario de él.

Concluyendo, diremos que todo conjunto formado por un sólo elemento se dice unitario. Hay que distinguir entre el elemento y conjunto unitario que sólo contiene a este elemento; el elemento pertenece al conjunto unitario que lo contiene, pero no es igual a él.

Decir: $a \in \{a\}$ es correcto

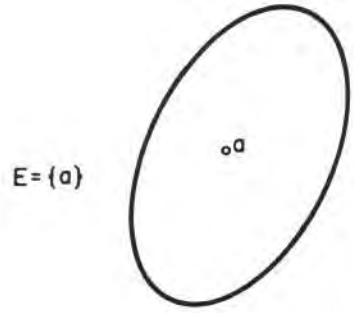
$a = \{a\}$ es falso

por lo tanto, son expresiones equivalentes $a \in C$ y $\{a\} \subset C$.

---

* Es evidente que E puede ser subconjunto de otros conjuntos, por ejemplo, del conjunto de los números dígitos.

La figura siguiente muestra, utilizando el diagrama de Venn, un conjunto unitario.



Otro ejemplo: El conjunto formado por los meses del año de menos de 30 días es un conjunto unitario, si lo representamos por extensión será: M = {febrero}

4. CONJUNTO VACIO

Vamos a razonar ahora con el conjunto A = {15, 21, 27} de modo análogo a como hemos hecho antes. Si queremos formar el subconjunto de A formado por los múltiplos de 3, nos resultaría el mismo conjunto A.

Si formamos el subconjunto de los múltiplos de 5, obtendríamos un conjunto unitario {15}

El subconjunto de A formado por todos los elementos múltiplos de 7, nos conducirá a otro conjunto unitario {21}

Análogamente, el subconjunto de los múltiplos de 9, sería otro conjunto unitario el {27}

¿Cuál *sería* el subconjunto de A formado por los múltiplos de 11? Este subconjunto no *consta* de ningún elemento, pues no hay en A ningún elemento que sea múltiplo de 11.

Esto nos induce a convenir en la existencia de un conjunto que no consta de ningún elemento y, por definición, imponerle la condición de ser subconjunto de cualquier conjunto. A este conjunto que denominaremos *conjunto vacío* lo representaremos por este símbolo ϕ

Si tenemos un conjunto definido por una propiedad característica, esto es un conjunto definido por comprensión, y queremos definir un subconjunto del mismo, por una nueva propiedad característica en contradicción con la anterior, este subconjunto será el conjunto vacío ϕ

El diagrama de Venn del conjunto vacío está constituido por un contorno cerrado, en el interior del mismo no se ha marcado ningún punto.

5. CONJUNTO DE LAS PARTES DE UN CONJUNTO

Habíamos quedado que un subconjunto era una parte de un conjunto, por lo tanto, dado un conjunto podremos determinar tantas partes como subconjuntos, para fijar las ideas vamos a recurrir a un caso particular.

Dado el conjunto A = {a, b, c} vamos a formar todos los subconjuntos posibles:

- Subconjunto de ningún elemento: Ø (parte vacía)
- Subconjuntos de un sólo elemento: {a} {b} {c} (conjuntos unitarios)
- Subconjuntos de dos elementos: {a, b} {a, c} {b, c}
- De acuerdo con la definición de subconjunto hay que añadir el propio conjunto A. (*) (Parte llena)

De esta manera hemos averiguado todas las partes del conjunto dado, que como se puede observar está formada por subconjuntos de un solo elemento o conjuntos unitarios, todos los subconjuntos de dos elementos, el conjunto vacío o parte vacía y el propio conjunto o parte llena.

Si consideramos el conjunto formado por todos los subconjuntos de A, esto es el conjunto

$$P(A) = \{\emptyset, \{a, b, c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}\}$$

lo llamaremos *conjunto de las partes de A.*

Este resultado es totalmente general, a partir de un conjunto dado podemos formar el conjunto de las partes del mismo, formado por todos los subconjuntos obtenidos a partir del conjunto de partida.

Por primera vez, nos ha aparecido un conjunto un tanto particular, en el sentido de que sus elementos son a su vez conjuntos, en alguna ocasión posterior nos encontraremos con situaciones semejantes. Conviene observar que este nuevo conjunto no riñe, en cuanto a su definición, con la dada al principio de este tema. Así, una biblioteca puede considerarse como un conjunto cuyos elementos son libros, además estos libros pueden considerarse, a su vez, como conjuntos cuyos elementos son las hojas que forman estos libros.

Conviene reseñar, ahora, que los subconjuntos de un conjunto dado se suelen denominar *subconjuntos impropios o triviales y subconjuntos propios,* los primeros son el propio conjunto y el conjunto vacío, los restantes se consideran subconjuntos propios. En el ejemplo anterior, que nos ha servido de partida, los subconjuntos de uno y de dos elementos son los subconjuntos propios, esto es, ,{a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c} y {b, c}

Parece, entonces, evidente afirmar que todo conjunto posee al menos dos subconjuntos: el conjunto vacío y el propio conjunto. Hay una excepción, el conjunto vacío, solamente tiene un subconjunto que es él mismo, pues en este caso los dos subconjuntos impropios o triviales coinciden.

Estudiemos otro ejemplo: Calcular el conjunto de las partes del conjunto C = {1, 2, 3, 4}.

Formamos todos los subconjuntos de una forma ordenada, para no equivocarnos:

Subconjuntos impropios o triviales: Ø, C = {1, 2, 3, 4}

Subconjuntos propios:

---

* Habíamos dicho que en un subconjunto todos sus elementos están incluidos en el conjunto de partida, en este sentido A es un subconjunto de A.

- Unitarios: {1}, {2}, {3}, {4}
- De dos elementos: {1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {2, 3}, {2, 4}, {3, 4}
- De tres elementos: {1, 2, 3}, {1, 2, 4}, {2, 3, 4} {1, 3, 4}

Por lo tanto, el conjunto de las partes de C será:

P (C) = {∅, {1, 2, 3, 4}, {1}, {2}, {3}, {4}, {1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {2, 3}, {2, 4}, {3, 4}, {1, 2, 3}, {1, 2, 4}, {2, 3, 4} {1, 3, 4}}

6. OPERACIONES CON CONJUNTOS

Vamos a establecer unos criterios por medio de los cuales dados dos conjuntos, obtenemos otro conjunto perfectamente determinado. En un principio, vamos a estudiar la unión y la intersección de conjuntos y sus propiedades.

6.1. Unión de conjuntos

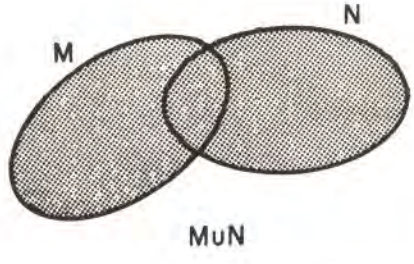
Dados dos conjuntos A y B, llamaremos *unión* de los conjuntos A y B y lo representaremos por A ∪ B, al conjunto formado por todos los elementos que pertenecen al menos a uno de los dos conjuntos A y B.

Antes de aclarar esta definición con algún ejemplo conviene precisar, que al decir, que A ∪ B contiene los elementos que pertenecen a A o a B no se excluyen los que pertenezcan conjuntamente a A y a B.

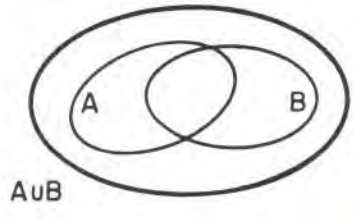
Consideremos los conjuntos A = {a, b, c, d} y B = {a, x, b, y, z}. Formemos el conjunto cuyos elementos sean todos los de A y los de B (*), esto es,

$$A \cup B = \{a, b, c, d, x, y, z\}$$

La figura siguiente muestra con la ayuda de los diagramas de Venn la unión de dos conjuntos.

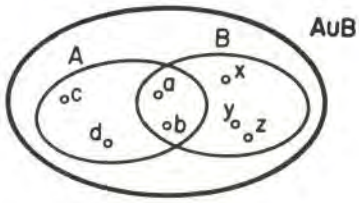


A ∪ B muchas veces se representa por una nueva línea cerrada que engloba ambos conjuntos.



* No tiene sentido repetir un elemento en un conjunto.

Este sería el esquema correspondiente al ejemplo realizado:



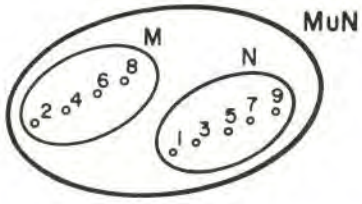
Un nuevo caso: Hallar la unión de los conjuntos

$$M = \{2, 4, 6, 8\} \qquad N = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

No tienen ningún elemento común, el conjunto unión será

$$M \cup N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

La figura siguiente muestra el diagrama de Venn correspondiente a este ejemplo.



A la vista de estos ejemplos, podemos decir, insistiendo y ratificando, la definición dada al principio de esta pregunta, que el conjunto unión, $A \cup B$, de los conjuntos A y B disjuntos (*), es el conjunto formado por todos los elementos del conjunto A, todos los elementos del conjunto B y ningún otro elemento. En consecuencia un elemento pertenece al conjunto unión de A y B si pertenece al A o al B.

También es correcto afirmar, que, el conjunto unión de dos conjuntos A y B no disjuntos está formado por todos los elementos de A que no pertenecen a B, todos los elementos de B que no pertenecen a A, todos los elementos comunes a A y B y ningún otro elemento.

6.2. Propiedades de la unión de conjuntos

Las tres propiedades siguientes, son de una demostración inmediata a partir de la definición de unión; nosotros vamos a enunciarlas ahora y posteriormente a través de ejercicios trataremos de justificarlas y aprenderemos a manejarlas.

- Idempotente: $A \cup A \overset{*}{=} A$
- Conmutativa: $A \cup B = B \cup A$
- Asociativa: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

Esta última propiedad dice que, dados tres conjuntos A, B y C, si se averigua el conjunto unión de B y C y después la unión de él, con el A, el resultado es el mismo que si se realiza primero la unión de A con B y

* Dos conjuntos son disjuntos cuando no tienen elementos comunes.

la del conjunto resultante con C. El conjunto final es el mismo aunque los procesos seguidos para conseguirlo son diferentes.

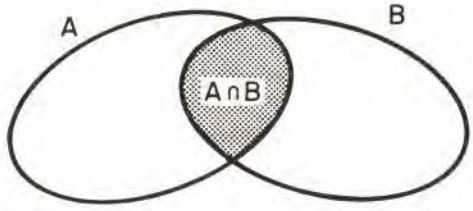
Si combinamos esta propiedad con la conmutativa se obtiene la posibilidad de hallar la unión de varios conjuntos, hallando primero la de dos de ellos, a continuación la del conjunto obtenido con otro y así sucesivamente. En nuestro caso, podemos escribir

$$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$$

6.3. Intersección de conjuntos

Dados dos conjuntos A y B llamaremos *intersección* de ambos conjuntos y lo representaremos $A \cap B$, al conjunto formado por todos los elementos que pertenezcan simultáneamente a A y a B.

A modo de aclaración podemos decir, un elemento pertenece al conjunto intersección de los dos conjuntos A y B si pertenece al A, pertenece al B, y sólo si se dan esas dos circunstancias.

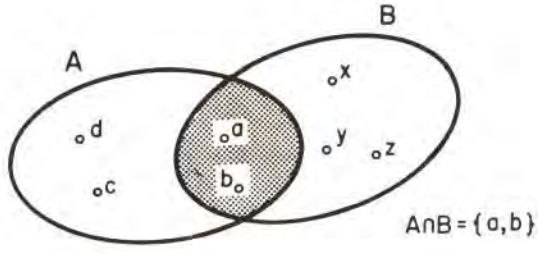


Supongamos los conjuntos:

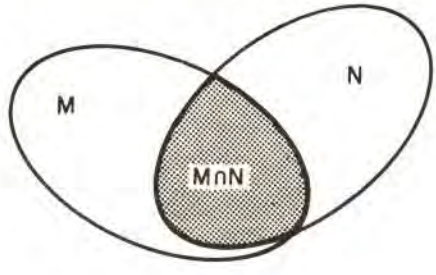
$$A = \{a, b, c, d\} \text{ y } B = \{a, x, b, y, z\}$$

El conjunto intersección, lo formamos buscando los elementos comunes a A y a B

$$A \cap B = \{a, b\}$$



Otro ejemplo: Sea M el conjunto de todos los madrileños y N el conjunto de todos los habitantes de Madrid. El conjunto intersección $M \cap N$ estará formado por todos los madrileños que viven en Madrid.



BIBLIOTECA PUBLICA PTO. STA. MARIA

Cuando dos conjuntos tienen como intersección el conjunto vacío ϕ, se dice que ambos conjuntos son disjuntos. Esto es equivalente a decir que no tienen ningún elemento común.

Aparece otra vez el conjunto vacío, también aquí podemos recordar algo dicho cuando nos apareció por primera vez, si queremos evitar las excepciones en la teoría de conjuntos, tenemos que aceptar como conjunto al conjunto vacío, y convenir en que está contenido en cualquier otro conjunto.

Antes de seguir veamos dos ejemplos:

- Hallar la intersección de los conjuntos A = {1, 3, 5, 7} y B = {2, 4, 6, 8}

Observamos que estos dos conjuntos no tienen elementos comunes por lo tanto $A \cap B = \emptyset$. A y B son dos conjuntos disjuntos.

- Dados los conjuntos H = {1, 2, 3, 4, 5 6} y L = {2, 4, 6, 8} Hallar su intersección $H \cap L$.

$$H \cap L = \{2, 4, 6\}$$

En el caso particular de que consideremos la unión de dos conjuntos disjuntos, a dicha unión la llamaremos *suma* de esos conjuntos. Abreviadamente lo podemos expresar así:

$$A + B = C \iff A \cup B = C \quad A \cap B = \phi \qquad (*)$$

Un ejemplo nos aclarará este concepto: sean los conjuntos

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \text{ y } B = \{7, 9, 11\}$$

observemos que ambos conjuntos son disjuntos, esto es, $A \cap B = \phi$, fácil de comprobar pues A y B no tienen elementos comunes, entonces a la unión de estos dos conjuntos le llamaremos suma

$$A + B = A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 7, 9, 11\}$$

Cuando en un conjunto se eligen subconjuntos suyos cuya suma es el conjunto dado, se dice que estos subconjuntos definen en nuestro conjunto una partición (más adelante trataremos este tema con suficiente detalle).

Consideremos, ahora, para terminar, tres conjuntos:

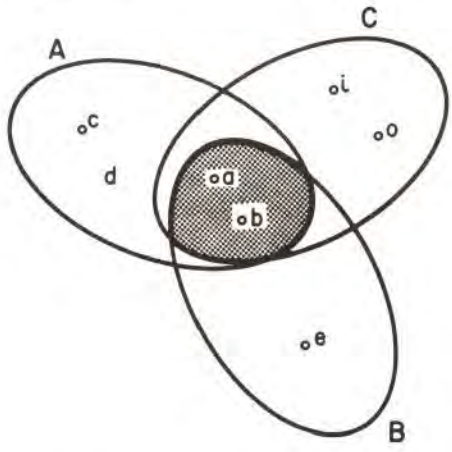
$$A = \{a, b, c, d\} \; B = \{a, b, e\} \; C = \{a, b, i, o\}$$

para hallar el conjunto intersección de estos tres conjuntos, tenemos que buscar los elementos comunes a los tres conjuntos, son a y b por lo tanto, $A \cap B \cap C = \{a, b\}$

---

* El símbolo $\iff$ tiene varios significados parecidos, en esta ocasión lo interpretaremos como «es equivalente a».

La figura siguiente, muestra un esquema de la intersección de estos tres conjuntos.



6.4. Propiedades de la intersección de conjuntos

Al igual que en el caso de la unión de conjuntos, la intersección tiene tres propiedades, para cuyo estudio seguiremos un procedimiento semejante:

- Idempotente: $A \cap A = A$
- Conmutativa: $A \cap B = B \cap A$
- Asociativa: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Esta última propiedad lo mismo que en la unión, nos dice que el resultado de operar con los conjuntos mediante intersecciones es igual en ambos miembros, aún cuando el proceso sea diferente.

Ejercicios y problemas

1. Dados los conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{e, f, g\}$, averiguar $A \cap B$ y $A \cup B$. ¿Cuántos elementos hay en $A \cup B$?

Para averiguar $A \cap B$ tenemos que buscar los elementos comunes a A y a B, no hay ninguno, luego $A \cap B = \emptyset$, por lo tanto A y B son conjuntos disjuntos.

La unión de estos dos conjuntos se obtiene enumerando los elementos de A y los de B, puesto que no tienen elementos comunes, o sea,

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

es fácil de comprobar que $A \cup B$ tiene 7 elementos, esto es, la suma del número de elementos de A y el número de elementos de B.

2. Sean M y N los conjuntos siguientes: $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $N = \{4, 5, 6, 7\}$. Calcular $M \cup N$ y $M \cap N$. ¿Cuántos elementos hay en $M \cup N$? ¿Por qué este número no es la suma del número de elementos de M y los de N?

Siguiendo un procedimiento semejante al del ejercicio anterior, obtenemos:

$$M \cup N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$M \cap N = \{4, 5\}$$

Como consecuencia, $M \cup N$ tiene siete elementos, este número no coincide con la suma de los elementos de M y la de los de N, porque los conjuntos M y N no son disjuntos, tienen elementos comunes esto es $M \cap N \neq \phi$.

3. A es el conjunto formado por todos los números múltiplos de 3, lo representaremos así, $A = \{\dot{3}\}$ y B es el conjunto formado por todos los números múltiplos de 6, $B = \{\dot{6}\}$. ¿Cuál es el conjunto $A \cap B$?

Es fácil definir por extensión estos dos conjuntos, de esa forma son más fáciles de comprender

$A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, ...\}$

$B = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, ...\}$

$A \cap B$ estará formado por todos los elementos comunes a ambos conjuntos, es decir,

$$A \cap B = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, ...\}$$

Observemos, que este conjunto es el formado por todos los números múltiplos de 6, por lo tanto, $A \cap B = B$, resultado que se podía haber previsto sin más que fijarse en que $B \subset A$.

4. Sean B = {conjunto de bolas blancas}; V = {bolas de vidrio}; P = {bolas contenidas en una urna}. Traducir en notación de conjuntos la frase siguiente: «Conjunto de bolas blancas de vidrio, escogidas entre las que hay en la urna».

La respuesta es inmediata $B \cap V \cap P$. En efecto, $B \cap V$ sería el conjunto de bolas de vidrio blancas, si averiguamos la intersección de este conjunto con P obtendríamos el conjunto pedido.

5. Dado el conjunto $A = \{7, 8, 9, 10\}$, calcular $A \cup A$ y $A \cap A$.

Es evidente que $A \cup A = A$ y $A \cap A = A$, como ya habíamos previsto al enunciar las propiedades de la unión e intersección de conjuntos como se recordará esta propiedad se llama idempotente.

6. Conociendo los conjuntos $A = \{7, 8, 9, 10\}$ y $B = \{3, 4, 5, 7, 8\}$ comprobar la propiedad conmutativa para la unión y la intersección de conjuntos.

Esta propiedad se enuncia $A \cup B = B \cup A$, para verificar basta ver que el resultado de operar el primer miembro ha de ser igual al segundo miembro.

$$A \cup B = \{7, 8, 9, 10, 3, 4, 5\}$$

$$B \cup A = \{3, 7, 8, 9, 10, 4, 5\}$$

luego la unión de conjuntos verifica la propiedad conmutativa.

Procedemos de forma semejante para la intersección $A \cap B = B \cap A$

$$A \cap B = \{7, 8\}$$

$$B \cap A = \{7, 8\}$$

tal como habíamos anunciado, la intersección de conjuntos goza de la propiedad conmutativa.

7. Consideremos los conjuntos A = {a, e, i} B = {a, b, c, d} y C = {a, b, c, e, i, o, u}. Comprobar que se verifica la propiedad asociativa, tanto para la unión como para la intersección de conjuntos.

Empecemos con la unión, se enuncia así: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, seguimos el procedimiento indicado en el ejercicio 6, calculemos el primer miembro $A \cup (B \cup C)$

Primero calculamos el «paréntesis» $B \cup C = \{a, b, c, d, e, i, o, u\}$ si averiguamos la unión de A con este conjunto obtenemos

$$A \cup (B \cup C) = \{a, b, c, d, e, i, o, u\}$$

Procedemos de forma semejante con el segundo miembro:

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, i\}$$

Luego $(A \cup B) \cup C = \{a, b, c\ d, e, i, o, u\}$

quedando así comprobada la propiedad asociativa para la unión.

Para la intersección la propiedad asociativa se escribe:

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Tomamos el primer término $A \cap (B \cap C)$

$$B \cap C = \{a, b, c\}$$

luego, $A \cap (B \cap C) = \{a\}$

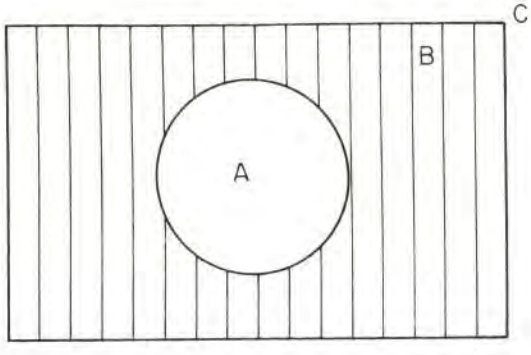
Operemos ahora con el segundo miembro de la igualdad:

$$A \cap B = \{a\}$$

$$(A \cap B) \cap C = \{a\}$$

como era de prever hemos obtenido resultados idénticos para los dos miembros de la igualdad, por lo tanto, la intersección de conjuntos goza de la propiedad asociativa.

8. Suponiendo que C es el conjunto de todas las personas nacidas en Cataluña, A el conjunto de todas las nacidas en Tarragona, de acuerdo con el diagrama adjunto, definir el conjunto B.



B está formado por todas las personas nacidas en Cataluña pero no en Tarragona.

9. Sea U el conjunto formado por todos los alumnos de una clase, un día se quiere premiar a los alumnos que se han sabido la lección o, al menos, no se hayan portado mal durante el estudio, aunque no se la hayan sabido, ¿es el conjunto de alumnos premiados unión de dos conjuntos, el de alumnos que se han sabido la lección y el de los alumnos que no se han portado mal?

La respuesta es afirmativa, un determinado niño estará comprendido entre los alumnos premiados bien por haberse sabido la lección, bien por no haberse portado mal.

10. Un padre desea premiar las buenas notas de su hijo comprándole, a elección de éste una colección de libros o una caja de caramelos. ¿Es el premio ofrecido la unión de dos conjuntos, el de los los libros y el de los caramelos?

No, el niño elige o el conjunto de libros o el de caramelos pero no puede quedarse con ambos y en cambio la unión es el conjunto de los dos.

11. Nos vamos a referir a cuatro asignaturas de las cursadas por los alumnos de un determinado curso, Matemáticas, Idioma moderno, Física y Biología. Vamos a representar por el número de matrícula a los alumnos que obtuvieron sobresaliente en estas cuatro asignaturas, obteniendo los conjuntos M, I, F y B, respectivamente, tenemos:

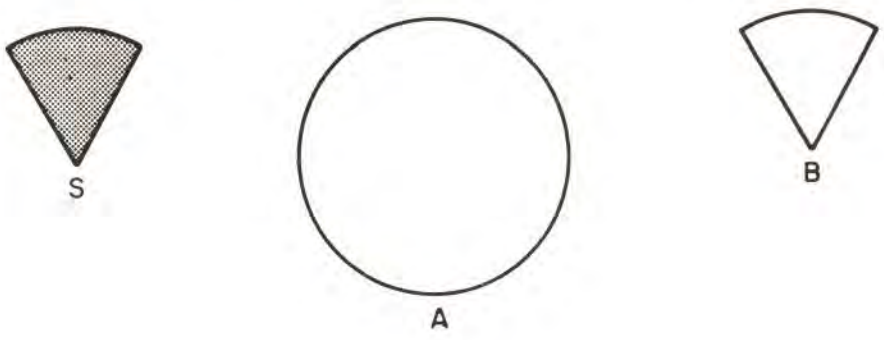
$$M = \{1, 3, 8\} \quad I = \{1, 2, 4\} \quad F = \{1, 2, 4, 7, 12\} \qquad B = \{1, 3, 4, 8, 12\}$$

¿Cuál sería el conjunto unión? ¿Y el conjunto intersección?

$M \cup I \cup F \cup B = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 12\}$ constituiría el conjunto de los alumnos que han conseguido algún sobresaliente en las asignaturas tratadas.

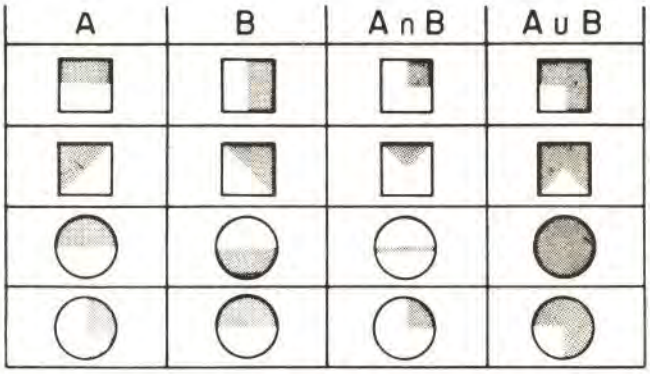
$M \cap I \cap F \cap B = \{1\}$ Es el único alumno que ha sacado sobresaliente en las cuatro asignaturas citadas.

12. En un principio vamos a considerar las figuras geométricas como conjuntos formados por todos sus puntos. Teniendo esto en cuenta definir mediante la intersección de dos conjuntos un sector circular.



Una posible solución para conseguir el sector circular S como intersección de dos conjuntos, considerar la intersección del conjunto A (círculo del mismo radio que el sector) y el B (sector circular del mismo radio y amplitud que el dado). Obérvese que $B \subset A$, situación ya aparecida en otra ocasión.

13. Insistiendo en la unión e intersección de conjuntos de figuras geométricas, presentamos unos casos interesantes, obtenidos a partir del cuadrado y de la circunferencia, tabulados en el siguiente cuadro.



Solamente se han presentado algunas posibilidades, que no comentamos por parecernos de fácil comprensión.

14. Supongamos el conjunto formado por todos los habitantes de la región valenciana, los subconjuntos formados, cada uno de ellos, por todos los habitantes de una de las provincias, ¿es una partición?

En definitiva tendremos tres subconjuntos, el primero formado por todos los habitantes de la provincia de Valencia, el segundo por las personas que residen en la provincia de Alicante y por último, constituido por todos los habitantes de Castellón. Estos tres subconjuntos formarán una partición del conjunto de partida (habitantes de la región valenciana) si son disjuntos, en efecto, una persona no puede residir en más de una provincia, vive en la provincia de Alicante o en la de Valencia, pero no en las dos a la vez, por tanto, no hay ningún elemento de estos subconjuntos que pertenezca a más de uno de ellos; son subconjuntos disjuntos y constituyen, como consecuencia, una partición.

15. Dado el conjunto de personas que trabajan en una determinada empresa, formamos diversos subconjuntos de modo que cada uno de ellos está formado por todas las personas que tengan la misma edad. ¿Es una partición?

Una persona determinada pertenece a un subconjunto y sólo a uno, parece evidente, que un empleado de esta empresa tiene, por ejemplo, 25 ó 37 años, pero no ambas edades simultáneamente. Como consecuencia, los subconjuntos no tienen elementos comunes, son disjuntos y constituyen una partición.

16. A partir de todos los números naturales (*), formamos dos subconjuntos, uno integrado por todos los números pares y el segundo por todos los números impares. ¿Tenemos una partición?

Un numero natural puede ser par o impar, pero no reúne estas dos caracteristicas a la vez, luego los dos subconjuntos formados no tienen elementos comunes, son disjuntos, forman una partición del conjunto de los números naturales.

17. Dados los conjuntos M = {a, b, c} y N = {e, i, o, u} hallar la suma

Recordemos que la suma de conjuntos solamente se puede realizar, o solamente tiene sentido, cuando ambos conjuntos son disjuntos. En el caso presente, esta circunstancia se verfica, por lo tanto, si calculamos la unión de ambos conjuntos, tendremos la suma pedida:

$$M + N = M \cup N = \{a, b, c, e, i, o, u\}$$

Se puede comprobar que M y N son subconjuntos del conjunto suma.

---

* Los números naturales son 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ... en principio

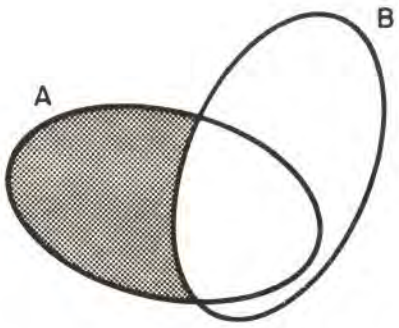
7. CONJUNTO COMPLEMENTARIO DE UNO DADO

Dados los conjuntos A = {a, b, e, f} y V = {a, e, i, o, u} construimos el conjunto de los elementos de V que no pertenecen a A

{i, o, u}

a este conjunto, se llama diferencia, lo representamos por V − A.

En general, dados dos conjuntos A y B, se llama conjunto diferencia, A − B (**), al formado por los elementos de A que no pertenecen a B.



En el diagrama de Venn de la figura, la parte rayada corresponde al conjunto A − B.

Dados un conjunto E y un subconjunto S de E, se llama complemento de S en E al conjunto E − S.

El conjunto complementario de S en E se acostumbra a representar así

$$C_E S \quad \text{ó} \quad S'_E$$

Abreviadamente, si S ⊂ E, entonces $S'_E = E - S$

Utilicemos un ejemplo, para aclarar esta idea, sea L el conjunto de todas las letras, V el de las vocales y T el de las consonantes. El complementario de V en L es el conjunto de las consonantes, utilizando el simbolismo anterior es $V'_L = T$.

Otro ejemplo, el conjunto complementario de los números pares respecto del de los números naturales es el de los números impares.

Ejercicios y ejemplos

1. Llamemos E al conjunto de los múltiplos de 5, $E = \{\dot{5}\}$ y A el conjunto de los números cuya cifra de las unidades es un 5. ¿Cuáles son los números pertenecientes al conjunto A'_E?

Sabemos que todos los elementos de E son números cuya cifra de unidades es 0 ó 5, E = {0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, ...}, mientras que el conjunto A = {5, 15, 25, 35, 45, 55, ...}, por lo tanto, los elementos

** Algunas veces la diferencia se representa por A/B.

que constituyen el complementario de A en E, A'_E son los números que no están contenidos en A y figuran en E, esto es, aquellos números cuya cifra de las unidades es cero.

2. Sean A = {1, 2, 3, 4}, B = {2, 4}, C = {1, 2, 4, 8, 16} calcular $A \cap B'_C$ y $C \cap B'_A$

Averiguamos primero B'_C y B'_A

$$B'_A = \{1, 3\} \qquad B'_C = \{1, 8, 16\}$$

luego $A \cap B'_C = \{1\}$ $\qquad C \cap B'_A = \{1\}$

3. Sean U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, A = {1, 2, 3, 4}, B = {2, 4, 6, 8} y C = {3, 4, 5, 6}. Hallar 1.º) $(A \cap C)'_U$, 2.º) $(A \cup B)'_U$, 3.º) $(A'\cup)'_U$, 4.º $(B - C)'_U$

Como todas las preguntas están referidas al conjunto U, prescindiremos de escribir este subíndice al ir contestando a las mismas.

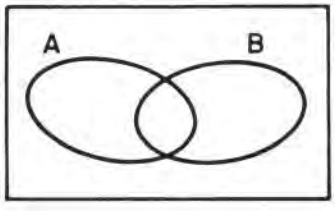
1.º) $A \cap C = \{3, 4\}$ y $(A \cap C)' = \{1, 2, 5, 6, 7, 8, 9\}$

2.º) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$ luego $(A \cup B)' = \{5, 7, 9\}$

3.º) $A' = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ y entonces $(A')' = \{1, 2, 3, 4\}$ es decir, $(A')' = A$

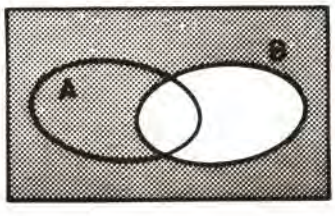
4.º) $(B - C) = \{2, 8\}$ y entonces $(B - C)' = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$

4. En el diagrama de Venn adjunto, rayar: *a*) B', *b*) $(A \cup B)'$, *c*) $(B - A)'$, *d*) $A' \cap B'$.

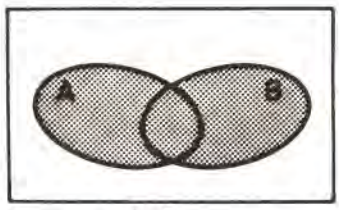


Este ejercicio consiste en calcular los conjuntos complementarios de diversas combinaciones de conjuntos, todos ellos referidos al conjunto representado con un cuadrilátero en el diagrama.

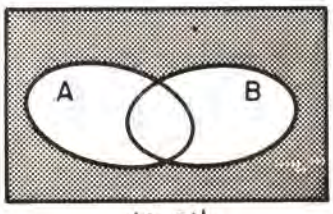
a) Como B' consta de los elementos que no están en B, se raya el área exterior a B.



b) Primero se raya el área A ∪ B; por lo tanto el área exterior a (A ∪ B) es el conjunto pedido (A ∪ B)'.

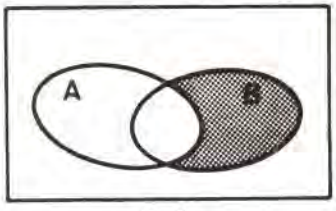


A∪B

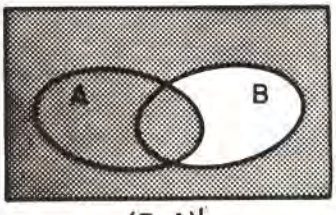


(A∪B)'

c) Primero calculamos B – A; el área exterior a B – A es (B – A)'.



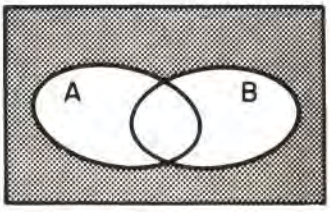
B-A



(B-A)'

d) Primero calculamos A', será el área exterior a A, luego B', entonces A' ∩ B' será la zona que aparece cuadriculada.

A'yB'



A'∩B'

Se puede comprobar fácilmente que el área de (A ∪ B)' es la misma que la de A' ∩ B'.

NOTAS ACLARATORIAS Y COMPLEMENTARIAS

* El orden en que figuran los elementos de un conjunto no tiene ninguna importancia. Así es lo mismo trabajar con el conjunto {2, 1, 3} que con el {1, 2, 3} ambos conjuntos, en este sentido, son idénticos, tienen los mismos elementos.

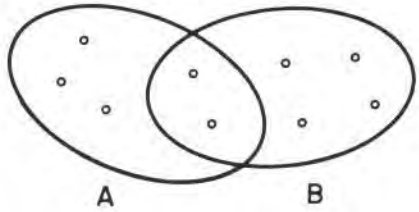
* En algunas ocasiones hemos hablado, al resolver algunos ejercicios, del número de elementos de un conjunto, e incluso del número de elementos de la unión de dos conjuntos, vamos a generalizar los resultados allí obtenidos.

Al número de elementos de un conjunto A lo representaremos por n (A), así el número de elementos de la unión de dos conjuntos A y B sera:

$$n (A \cup B) = n (A) + n (B) - n (A \cap B) \quad (*)$$

ya que al contar los puntos de $A \cup B$ contamos una sola vez los que pertenecen a $A \cap B$, y al contar los de A y los de B contamos dos veces los de $A \cap B$.

La figura ayuda a comprenderlo:



$n (A) = 5 \quad n (B) = 6$

$n (A \cap B) = 2$

$n (A \cup B) = 5 + 6 - 2 = 9$

BIBLIOTECA PUBLICA
PTO. STA. MARIA

* n (A∩ B) representa números de elementos del conjunto A⋂B y análogamente n (A∪ B).

En el caso particular de que los conjuntos sean disjuntos $A \cap B = \emptyset$ se simplifica la expresión anterior:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

Por último si tenemos 3 conjuntos se obtiene una expresión modificada:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

* Muchas veces para definir un conjunto, se utiliza una expresión o ecuación matemática, que presenta entre otras ventajas su brevedad, en un principio, parecerá un tanto complicado.

Así la intersección de dos conjuntos A y B según lo dicho, podemos expresarlo

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$$

la lectura de esta expresión es: «el conjunto de intersección de A y B estaría formado por todos los elementos x, tal que, x pertenece al conjunto A y x pertenece al conjunto B.»

La unión la escribimos:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ó } x \in B\}$$

La diferencia de dos conjuntos E y F lo haríamos:

$$E - F = \{x \mid x \in E \text{ y } x \notin F\}$$

Se lee: «la diferencia de los conjuntos E y F está formada por todos los elementos x, tal que, x pertenezca al conjunto E y x no pertenezca al conjunto F».

Supongamos, ahora, el conjunto T:

$$T = \{x \mid x = 5n - 3, n \in N\}$$

se lee: «T es el conjunto formado por todos los elementos x tal que, x sea igual a $5n - 3$, para cualquier valor de n que pertenece al conjunto de los números naturales».

Este es un conjunto de infinitos elementos, porque n puede tomar infinitos valores, de esta manera para los diferentes valores de n, obtenemos valores de x, que son los elementos de T. Para mayor claridad, calculamos los primeros valores:

$$\begin{aligned} n &= 1 \qquad x = 5 \cdot 1 - 3 = 2 \\ n &= 2 \qquad x = 5 \cdot 2 - 3 = 7 \\ n &= 3 \qquad x = 5 \cdot 3 - 3 = 12 \\ n &= 4 \qquad x = 5 \cdot 4 - 3 = 17 \\ n &= 5 \qquad x = 5 \cdot 5 - 3 = 22 \\ n &= 6 \qquad x = 5 \cdot 6 - 3 = 27 \end{aligned}$$

luego, la expresión escrita antes seria equivalente a:

$$T = \{2, 7, 12, 17, 22, 27, \ldots\}$$

* La relación de inclusión entre dos conjuntos en algunos casos se suele expresar de forma distinta, pero no sustancialmente diferente: $B \supset A$ que se lee B contiene a A.

* Por último, queremos mostrar un símbolo que se utiliza con mucha frecuencia en la Teoría de Conjuntos. Nos referimos a $\forall$ que se lee «para todo».

CONCLUSIONES TEMA I

CONJUNTO		Es una serie de objetos (elementos) agrupados de tal manera que dado un elemento cualquiera se puede decir si pertenece o no a ese conjunto.
DEFINICION DE UN CONJUNTO	EXTENSION	Nombrando todos y cada uno de los elementos que lo constituyen.
	COMPRENSION	Enunciando una propiedad que sea cumplida por todos los elementos del conjunto y sólo por ellos.
SUBCONJUNTO		Dados dos conjuntos A y B diremos que A está contenido en B, o que es un *subconjunto* o parte de B, cuando todo elemento de A pertenece a B.
CONJUNTO DE LAS PARTES DE UN CONJUNTO		Es un conjunto formado por todos los subconjuntos del conjunto de partida.
OPERACIONES CON CONJUNTOS		Criterios por medio de los cuales dados dos conjuntos se puede obtener otro conjunto perfectamente determinado.
	UNION	Dados los conjuntos A y B, $A \cup B$ es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen al menos a uno de los dos conjuntos A y B.
	INTER-SECCION	Dados los conjuntos A y B, $A \cap B$ es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen simultáneamente a A y a B.
CONJUNTO COMPLEMENTARIO		Dados un conjunto E y un subconjunto S de E se llama conjunto complementario de S en E al conjunto formado por todos los elementos de E que no pertenecen a S.

EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. *Cierta familia está formada por 5 personas: el abuelo, el padre, la madre, un hijo y una hija. Elegir para representar al conjunto, y a cada uno de sus elementos, las letras que crea más adecuadas. Escribir después, representando con dichas letras, que la madre pertenece al conjunto, pero que el tío no pertenece al mismo.*

   Dibujar un diagrama para representar este ejercicio.

2. *Un juego de barajas españolas es un conjunto de 40 cartas, que designaremos por B. El subconjunto formado por los 4 reyes se designa por R; el formado por las 10 cartas de copas, por C, y el formado por todas las figuras (sotas, caballos y reyes), por F. Escribir las relaciones de inclusión que existen entre estos conjuntos.*

3. *Dados los conjuntos:*

$$A = \{a, b, c, d, h, m, o\}$$

$$B = \{a, b, e, g, h, o, s\}$$

$$C = \{b, c, g, h, m, s, t\}$$

Hallar: 1.º $A \cap B$
2.º $B \cap C$
3.º $A \cap C$
4.º $(A \cap B) \cap C$
5.º $A \cap (B \cap C)$
6.º $(A \cap C) \cap B$

4. *Si A, B y C son 3 conjuntos, disjuntos dos a dos, y tales que:*

$A \cup B \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$A \cup B = \{0, 1, 2, 6, 7, 8, 9\}$

$B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Hallar razonadamente los conjuntos A, B y C.

5. *Dados los conjuntos:*

$A = \{a, b, c, e, i\}$, $B = \{b, c, d, g, h\}$, $C = \{a, o, u\}$

Hallar $M = B \cup C$, $N = A \cap M$, $P = A \cap B$, $Q = A \cap C$. *Comprobar que el conjunto* $P \cup Q$ *es igual al N.*

6. *Definir por extensión los siguientes conjuntos, que definimos por comprensión:*

a) *Conjunto de números impares múltiplos de 5 y comprendidos entre 3 y 21.*

b) *Conjunto de meses del año cuyo nombre contiene la letra r.*

c) *Conjunto de provincias catalanas mediterráneas.*

7. *Definir por comprensión los siguientes conjuntos, que definimos por extensión:*

a) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

b) $\{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$

c) {*lunes, martes*}

8. *Dado el conjunto* $B = \{1, 3, 5\}$, *determinar P (B), conjunto de las partes de B.*

9. *Una compañía de seguros tiene un conjunto V de clientes y trata de estudiar algunas características de los mismos. Sea A el conjunto de los adultos, B el de las mujeres, C el de los clientes casados. Describir verbalmente los conjuntos siguientes:*

a) A'_V

b) B'_V

c) C'_V

d) $(B - A)$

e) $A \cup B$

f) $A \cap B$

g) $B \cap C'_V$

Dar la expresión formal de los conjuntos siguientes:

h) *Adultos casados*

i) *Varones menores no casados*

j) *Menores o bien varones casados*

10. *Si M es el conjunto de alumnas de una clase y S el conjunto de todos los estudiantes de la misma, describir verbalmente los conjuntos:*

$M \cup S$, $M \cap S$, $S - M$, $M - S$.

11. *Utilizar los diagramas de Venn adecuados para mostrar las siguientes relaciones:*

$$A \cap B \subset B$$
$$A \subset A \cap B$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

12. *Formar el diagrama de Venn de la siguiente expresión:*

$(A - B) \cup (B - A)$

13. *Sea el conjunto* $A = \{x$ *tal que* x *es natural y* $1 < x < 5\}$ *y* $B = \{x$ *tal que* x *es natural y* $2 < x < 7\}$.

Calcular: a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

14. *Dados los conjuntos* $A = \{1, 2\}$ *y* $B = \{2, 3\}$, comprobar si se verifica que $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.

15. *Dado el conjunto* $A = \{1, 2, 3, 4\}$. *Escribir todos los subconjuntos de A de 2 elementos. Escribir, también, todos los subconjuntos de tres elementos.*

16. *Sea* $A = \{$*números pares menores que 10*$\}$ *y* $B = \{$*múltiples de 4*$\}$ *(en ambos casos suprimimos el cero y los números son naturales). Sea C el conjunto* $A \cap B$. *Calcular C y el conjunto de las partes de C.*

17. *Si el conjunto A es un subconjunto de B, calcular la unión y la intersección y comentar el resultado obtenido.*

18. *Suponemos A y B subconjuntos de un conjunto universal. Mediante un diagrama de Venn comprobar que:*

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

19. Tenemos los conjuntos siguientes:

$A = \{$*números pares*$\}$, $B = \{$*números impares*$\}$
$C = \{$*múltiplos de 3*$\}$ *y* $D = \{$*múltiplos de 6*$\}$.

¿Qué relación existe entre estos conjuntos?

20. *Dado el conjunto* $A = \{a, b, c, d\}$. *Encontrar subconjuntos de A que verifiquen:*

    a) *Su intersección sea vacía.*

    b) *Su intersección esté formada por un elemento.*

    c) *Su intersección tenga 2 elementos.*

    d) *Su unión tenga 3 elementos.*

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

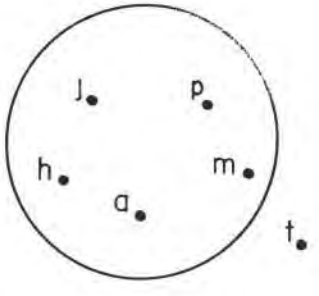
1. Designaremos:

   a = abuelo, p = padre, m = madre, h = hija hembra, v = hijo varón.

   El conjunto es: F = {a, p, m, h, v}

   La madre pertenece al conjunto: $m \in F$; el tío no pertenece al conjunto $t \notin F$.

   El tío no pertenece al conjunto, por ello se representa por un punto exterior a la línea cerrada.



2. Cada uno de los reyes es una carta de la baraja, luego:

   $R \subset B$

   Cada una de las cartas de copas pertenece a la baraja, y así:

   $C \subset B$

   Cada una de las cartas con figura es de la baraja, luego:

   $F \subset B$

   Por otra parte, como cada carta con un rey es una figura:

   $R \subset F$.

3. 1.°) $A \cap B = \{a, b, h, o\}$

   2.°) $B \cap C = \{b, g, h, s\}$

   3.°) $A \cap C = \{b, c, h, m\}$

   4.°) $(A \cap B) \cap C = \{a, b, h, o\} \cap C = \{b, h\}$

   5.°) $A \cap (B \cap C) = A \cap \{b, g, h, s\} = \{b, h\}$

   6.°) $(A \cap C) \cap B = \{b, c, h, m\} \cap B = \{b, h\}$

   Observemos que $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (Propiedad asociativa) y ambos conjuntos son también iguales al $(A \cap C) \cap B$. Cualquiera de estos conjuntos 4.°, 5.° y 6.° es el $A \cap B \cap C$.

4. Aunque podría utilizarse el conjunto $A \cup B \cup C$ dado, no es necesario; esta condición dada es consecuencia de las otras dos y nos servirá como comprobación del resultado.

   Todos los elementos del conjunto $A \cup B = \{0, 1, 2, 6, 7, 8, 9\}$ pertenecen a A o B; asi los elementos 0, 1, 8, y 9 no pertenecen a B, pues en tal caso estarian en $B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Tendrán que pertenecer a A. Así, tenemos que $A = \{0, 1, 8, 9\}$ y los restantes de $A \cup B$ pertenecen a B ($B = \{2, 6, 7\}$). Ya es suficiente tomar los elementos de $B \cup C$ que no pertenezcan a B, que serán los que formen C. Asi: $C = \{3, 4, 5\}$.

5. Con los elementos de B y C formamos el conjunto unión:

   $M = B \cup C = \{a, b, c, d, g, h, o, u\}$

   La intersección del conjunto M acabado de formar y el $A = \{a, b, c, e, i\}$ es:

   $N = A \cap M = \{a, b, c\}$

   Con paréntesis:

   $A \cap (B \cup C) = \{a, b, c\}$

   Análogamente: $P = A \cap B = \{b, c\}$

   $$Q = A \cap C = \{a\}$$

   La unión de estos dos conjuntos:

   $P \cup Q = \{a, b, c\}$

   que es el mismo N.

6. *a*) {5, 15}

   b) {Enero, febrero, marzo, abril, setiembre, octubre, noviembre, diciembre}

   c) {Barcelona, Tarragona, Gerona}

7. *a*) Conjunto de los números impares menores que 10.

   b) Conjunto de los números primos menores que 18.

   c) Conjunto de los dos primeros dias de la semana.

8. $P(B) = \{ \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}, \{1, 3, 5\}, \varnothing \}$

9. *a*) A'_V = {conjunto de los clientes menores}

   b) B'_V = {conjunto de los clientes que son hombres}

   c) C'_V = {conjunto de los clientes solteros o viudos}

   d) $B - A$ = {conjunto de las mujeres menores}

   e) $A \cup B$ = {conjunto de los clientes adultos o que son mujeres}

   f) $A \cap B$ = {conjunto de los clientes mujeres adultas}

   g) $B \cap C'_V$ = {conjunto de los clientes mujeres que son solteras o viudas}

   h) Adultos casados = $A \cap C$

   i) Varones menores no casados = $A'_V \cap B'_V \cap C'_V$

   j) Menores o bien varones casados = $A'_V \cup (B'_V \cap C)$

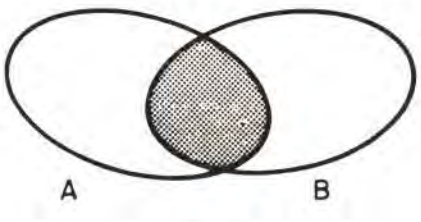
10. $M \cup S = S$

    $M \cap S = M$

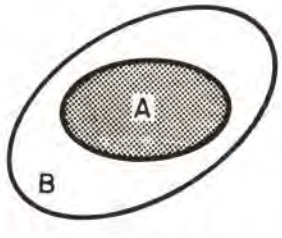
    $S - M$ = alumnos varones

    $M - S$ = conjunto vacio.

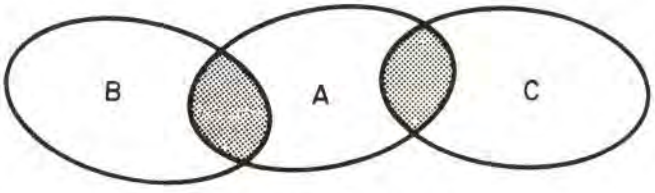
11.



$A \cap B \subset B$

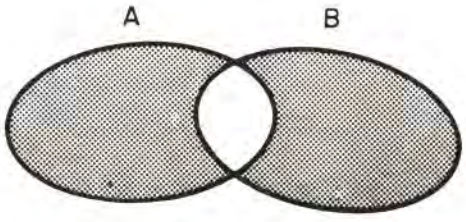


$A \subset A \cap B$



$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

12.



13. Escribamos primero los conjuntos por extensión y así obtendremos:

$A = \{2, 3, 4\}$ y $B = \{3, 4, 5, 6\}$

Si calculamos la unión y la intersección obtenemos:

$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

$A \cap B = \{3, 4\}$

14. Calculemos $A \cap B = \{2\}$.

Por tanto, $P(A \cap B) = \{\varnothing, \{2\}\}$

Calculemos $P(A) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.
$P(B) = \{\phi, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$.

En consecuencia $P(A) \cap P(B) = \{\phi, \{2\}\}$.

Por tanto, sí es cierto que $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.

15. Los subconjuntos de A de dos elementos se obtienen por el mismo procedimiento visto en otras ocasiones:

$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$.

Los subconjuntos de A de tres elementos son:

$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}$.

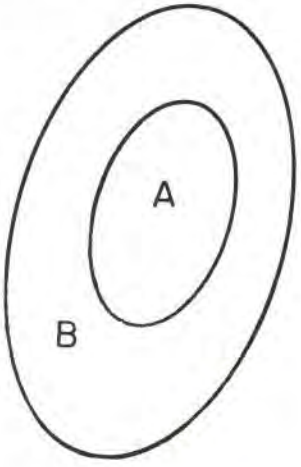
16. Escribimos los conjuntos A y B por extensión:

$A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{4, 8, 12, 16, 20, ...\}$

$C = A \cap B = \{4, 8\}$

Partes de C es: $P(C) = \{\phi, \{4\}, \{8\}, \{4, 8\}\}$.

17. Representemos mediante un diagrama

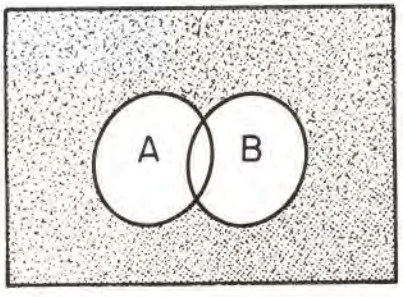


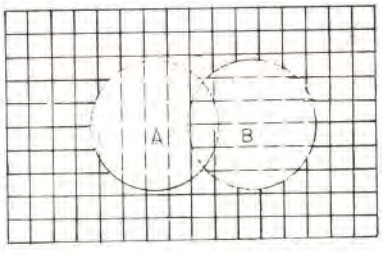
$A \cup B = B$

$A \cap B = A$

Por tanto, la unión de un conjunto y un subconjunto suyo es el conjunto, mientras que la intersección es el subconjunto.

18.





Es todo menos la unión. Por tanto, lo rayado es $(A \cup B)'$.

A' aparece con rayas horizontales.

B' aparece con rayas verticales.

Por tanto, $A' \cap B'$ aparece cuadriculado.

Vemos que coincide.

19. Escribamos elementos de estos conjuntos:

$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, ...\}$

$B = \{1, 3, 5, 7, 9, ...\}$

$C = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, ...\}$

$D = \{6, 12, 18, 24, ...\}$

Observemos que A y B son conjuntos disjuntos, ya que $A \cap B = \emptyset$. Todos los elementos de D son elementos de C, por tanto D es un subconjunto de C, es decir $D \subset C$. Análogamente $D \subset A$.

20.

a) {a, b} y {c, d}, ya que $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \varnothing$

b) {a, b} y {a, d}, ya que $\{a, b\} \cap \{a, d\} = \{a\}$

c) {a, b, c} y {a, b, d}, ya que $\{a, b, c\} \cap \{a, b, d\} = \{a, b\}$

d) {a, b, c} y {b, c}, ya que $\{a, b, c\} \cup \{b, c\} = \{a, b, c\}$

La solución de este problema no es única, pueden encontrar otros subconjuntos que también lo cumplan.

TEMA II

RELACIONES BINARIAS

ESQUEMA/RESUMEN

1. Producto de conjuntos.
   - 1.1. Idea intuitiva.
   - 1.2. Definición.
   - 1.3. Representación gráfica.
   - 1.4. Propiedades del conjunto producto.
   - 1.5. Producto de un conjunto por sí mismo.

2. Relaciones entre los elementos de un conjunto.
   - 2.1. Propiedades de las relaciones binarias.
     - 2.1.1. Propiedad reflexiva.
     - 2.1.2. Propiedad simétrica.
     - 2.1.3. Propiedad antisimétrica.
     - 2.1.4. Propiedad transitiva.

3. Clasificación de las relaciones binarias.
   - 3.1. Relaciones de equivalencia.
   - 3.2. Relaciones de orden.
     - 3.2.1. Relaciones de orden total.
     - 3.2.2. Relaciones de orden parcial.

4. Notas aclaratorias y complementarias

INSTRUCCIONES PARA EL ESTUDIO DEL TEMA II

Iniciamos el estudio de este tema presentando una situación que no debe ser nueva para nuestros alumnos: con dos conjuntos perfectamente determinados vamos a obtener otro conjunto que llamaremos conjunto producto. Decíamos que la situación no es nueva, puesto que algo parecido es lo que hemos hecho al hablar de las operaciones entre conjuntos en el tema anterior. En esta ocasión pretendemos, dados dos conjuntos, averiguar otro cuyos elementos son «pares ordenados», formados a partir de los conjuntos de partida. Queremos destacar la importancia de entender perfectamente el significado de estos pares ordenados y la forma de obtenerlos.

Terminamos este tema analizando las relaciones binarias definidas sobre un conjunto. El alumno puede comprender que por medio de las mismas se consigue «relacionar» dos elementos de un conjunto.

Solamente nos preocupan las relaciones binarias de orden y de equivalencia, por ser las que, en un curso de este tipo, tienen mayor interés. A lo largo del tema dejamos bien claro que no son las únicas.

Al exponer las relaciones binarias nos hemos propuesto, fundamentalmente, que nuestros alumnos entiendan perfectamente lo que se pretende al establecer una relación de este tipo sobre un conjunto, por eso, muchos de los ejemplos propuestos no están referidos a lo que habitualmente se llaman «términos matemáticos», están referidos a situaciones de la vida diaria, a las que se les puede dar una significación matemática.

Después de estudiar este tema, el alumno debe tener muy claro que, en definitiva, establecer una relación binaria sobre un conjunto es determinar un subconjunto del conjunto producto de este conjunto por sí mismo.

BIBLIOTECA PUBLICA
PTO. STA. MARIA

1. PRODUCTO DE CONJUNTOS

1.1. Idea intuitiva

En el tema anterior hemos estudiado algunas circunstancias en las que dados dos conjuntos, siguiendo un criterio determinado, obteníamos otro conjunto, así conseguíamos el conjunto unión o intersección de dos conjuntos.

En la vida real se presentan situaciones propicias para definir un conjunto a partir de otros dos, evitando el enumerar por extensión todos sus elementos.

Recurrimos al siguiente ejemplo: Cuando asistimos a una función de teatro, sabemos perfectamente la posición que vamos a ocupar en el local al adquirir la localidad, puesto que, en ella figura la fila y la butaca, de manera que si nuestra entrada nos indica la (fila 2, butaca número 6), sabemos que corresponde a una posición bien determinada. Ocuparíamos distinto sitio si tuviéramos la (fila 6, butaca número 2).

Si las butacas de un teatro se numerasen correlativamente, desde la primera a la última, sería incómodo para el espectador que adquiere una localidad saber si ésta responde a sus deseos, además habría que contar con la dificultad de encontrar su asiento en la sala. Como ya hemos dicho, no ocurre así, las localidades numeradas designan el asiento por dos números, el de la fila y el que la butaca toma en ella. Realmente se ha hecho lo siguiente: el conjunto de todas las localidades de la sala está dado por un conjunto de pares de números, el primero indica la fila y el otro, el lugar que ocupa en ella la butaca. Considerando estos dos conjuntos, el conjunto de todas las filas y el conjunto de butacas de cada fila, los pares formados tomando un elemento del primer conjunto con un elemento del segundo constituyen el conjunto de todas las butacas de la sala. Como ya anunciábamos al principio hemos obtenido un conjunto a partir de los dos conjuntos anteriores.

Insistimos con otro ejemplo, todos recordamos que las antiguas matrículas de los coches españoles, estaban formadas por dos elementos: las iniciales de la provincia en que se ha efectuado la matriculación y el número

de matrícula que en esa provincia le corresponde. Tenemos una situación semejante a la anterior, podemos considerar, por un lado, el conjunto de todas las provincias y, por el otro, el conjunto de los mismos números naturales (*), el conjunto formado por los pares en los que entre un elemento de cada conjunto será el conjunto de matrículas, o si se prefiere, el conjunto de vehículos.

1.2. Definición

Por este procedimiento dados dos conjuntos A y B hemos obtenido un nuevo conjunto, llamado conjunto producto de A por B y que representamos por A × B. Este conjunto está formado por todos los pares cuya primera componente pertenezca a A (primer conjunto) y la segunda a B (segundo conjunto).

De una manera más breve se puede escribir esta definición, recordando lo visto en el tema anterior.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

que se lee: «el conjunto A × B está formado por todos los pares de elementos (a, b), tal que, su primera componente, *a*, pertenezca a A y su segunda componente *b* pertenezca a B».

En los ejemplos anteriores el conjunto A sería el conjunto de filas del teatro y B el conjunto de butacas en una fila. En el segundo caso, A sería el conjunto de las provincias españolas y B el de los números naturales.

Es la primera vez que nos aparece un conjunto cuyos elementos son pares ordenados de elementos a su vez, pero este nuevo tipo de conjunto no está en contraposición con la definición dada de conjunto en el tema 1, entonces, para definir un conjunto solamente se solicitaba, en definitiva, una cosa: los elementos que lo constituyen estén perfectamente determinados. Esto sucede en el conjunto producto, las parejas de elementos están perfectamente determinadas, están definidas a partir de los conjuntos de partida.

Finalmente, queremos insistir en un aspecto muy interesante: estas parejas de elementos, son *pares ordenados*, con ello queremos indicar que la primera y la segunda componente de estas parejas no se pueden intercambiar. El par ordenado (3, 7) es distinto al (7, 3), como ya anunciábamos cuando tratábamos de las localidades de un teatro. (*)

1.3. Representación gráfica

La representación de las personas u objetos depende exclusivamente del acuerdo que para ello se establezca, y así a las personas unas veces se las representa por el nombre, otras por su firma, otras por su fotografía, etcétera.

El conjunto producto lo representaremos de la siguiente forma: Trazamos dos rectas perpendiculares, sobre la primera, horizontal, representaremos los elementos del primer conjunto y en la segunda los elementos del segundo conjunto. Por estos puntos trazamos rectas paralelas a la vertical y a la horizontal, respectivamente, los puntos de intersección son las parejas de elementos, los pares ordenados, del conjunto producto.

Apliquemos este criterio a un caso concreto, sean los conjuntos:

$$A = \{a, b, c\} \text{ y } B = \{1, 2, 3\}$$

---

* Para ser más exacto, deberíamos decir, un subconjunto de los números naturales, pues el conjunto de los números naturales es infinito mientras el número de coches matriculados no.

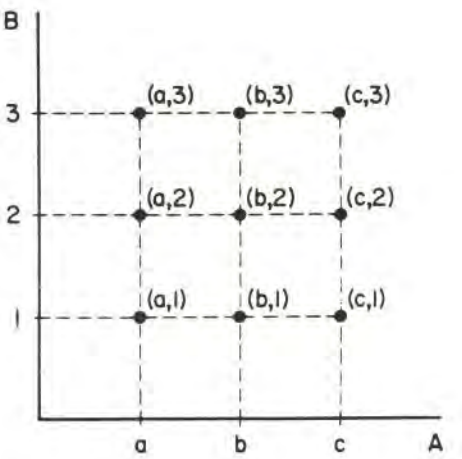
* Conviene recordar, en este sentido, que el orden en que se enunciaban los elementos de un conjunto era indiferente. Es lo mismo el conjunto {3, 7} que el conjunto {7, 3}, pero es distinto el par (3, 7) y el par (7, 3).

Vamos a calcular A × B y a hacer su representación gráfica.

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (c, 1), (c, 2), (c, 3)\}$$

para formar A × B hemos formado todas las posibles parejas de elementos, de manera que su primera componente sea un elemento de A y la segunda componente un elemento de B.

Su representación gráfica es:



1.4. Propiedades del conjunto producto

Al igual que cuando estudiamos la unión y la intersección de conjuntos nos preocupan las propiedades de que goza este producto:

• Conmutativa: En general, el producto de conjuntos no es conmutativo, como se desprende de las consideraciones hechas con anterioridad, y que ponemos de manifiesto calculando el producto de los conjuntos A = {1, 2} y B = {a, b, c}

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

$$B \times A = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (a, 2), (b, 2), (c, 2)\}$$

Obsérvese que las parejas que forman ambos conjuntos tienen los mismos elementos, pero están dados en diferente orden, luego $A \times B \neq B \times A$.

• Asociativa: Tampoco es asociativo el producto de conjuntos, pues dados tres conjuntos A, B y C, los elementos, de (A × B) × C son parejas, de la forma [(a, b), c] cuya primera componente es una pareja ordenada perteneciente a A × B y la segunda componente un elemento de C, mientras que los elementos de A × (B × C) son parejas de la forma [a, (b, c)], cuya primera componente pertenece a A y la segunda a B × C. Luego

$$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$$

1.5. Producto de un conjunto por sí mismo

Estudiando el producto de dos conjuntos cualesquiera cabe considerar la posibilidad de que ambos sean iguales.

El producto de A por sí mismo lo representaremos así $A \times A$, en algunas ocasiones a este producto se le suele llamar cuadrado de A, llegando incluso a simbolizarse así A^2.

Con un ejemplo veremos que no existe dificultad en el cálculo. Dado $A = \{1, 2, 3\}$, calculemos $A \times A$

$$A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

Ejercicios y Ejemplos

1. Varios chicos y chicas se reunen para bailar, el conjunto de chicos es:

$$V = \{Juan, José, Pedro, Luis\}$$

y el de chicas:

$$C = \{Rosa, Pilar, María\}$$

¿Cuántas posibles parejas de baile se pueden formar?

(Juan, Rosa) (Juan, Pilar) (Juan, María)

(José, Rosa) (José, Pilar) (José, María)

(Pedro, Rosa) (Pedro, Pilar) (Pedro, María)

(Luis, Rosa) (Luis, Pilar) (Luis, María)

Es fácil comprender que estas parejas constituyen precisamente el conjunto $V \times C$.

2. Si A es el conjunto de todas las calles y plazas de una ciudad y B un conjunto de los números naturales, ¿qué significado tiene el conjunto $A \times B$?

Al calcular todas las posibles parejas de elementos lo que hacemos es combinar las distintas calles y plazas con los números, en definitiva obtenemos el conjunto de todas las casas de esa ciudad.

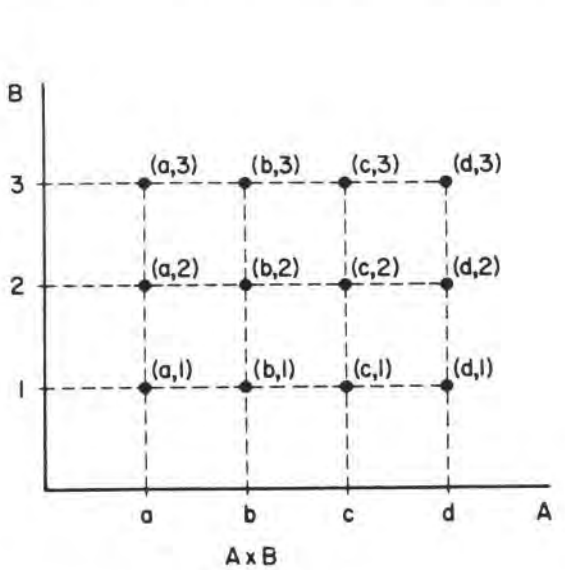
3. Dados los conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$. Calcular $A \times B$, $A \times A$ y hacer la representación gráfica de ambos.

Siguiendo el procedimiento expuesto en otra ocasión:

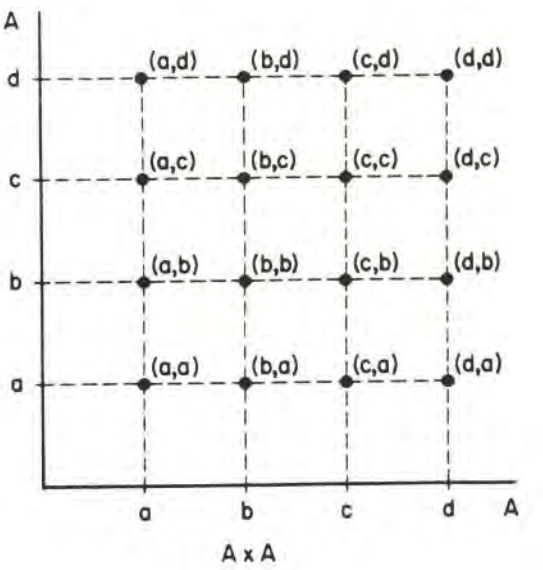
$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (c, 1), (c, 2), (c, 3), (d, 1), (d, 2), (d, 3)\}$$

$$A \times A = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (c, a), (c, b), (c, c), (c, d), (d, a), (d, b), (d, c), (d, d)\}$$

La representación gráfica la indicamos en la figura siguiente:



A x B



A x A

4. El conjunto P = {(a, d), (a, e), (b, d), (b, e), (c, d), (c, e)} es el producto cartesiano de los conjuntos M y N. ¿Qué elementos pertenecen a cada uno de éstos?

Recordando la definición de conjunto producto, debemos fijarnos que las primeras componentes de las parejas o pares ordenados de P pertenecen al primer conjunto M y la segunda al segundo conjunto N, luego se puede asegurar que

$$M = \{a, b, c\} \qquad N = \{d, e\}$$

Solucion fácilmente comprobable, calculando M × N.

5. Dados los conjuntos R= {a, b, c}, S = {i, j} y T = {k} comprobar que R × (S U T)= (R × S) U (R × T)

Operamos el primer miembro R × (S U T), calculando S U T y luego su R × (S U T)

$$S \cup T = \{i, j, k\}$$

$$R \times (S \cup T) = \{(a, i)\ (a, j)\ (a, k)\ (b, i)\ (b, j)\ (b, k)\ (c, i)\ (c, j)\ (c, k)\} \quad (1)$$

Análogamente con el segundo miembro. (R × S) U (R × T)

$$(R \times S) \cup (R \times T) = \{(a, i)\ (a, j)\ (b, i)\ (b, j)\ (c, i)\ (c, j)\ (a, k)\ (b, k)\ (c, k)\} \quad (1)$$

Las expresiones (1) coinciden, luego hemos demostrado la igualdad que nos proponíamos

Expresiones de ese tipo son muy habituales en Matemáticas y de gran importancia, pues relaciona dos operaciones, se llama habitualmente propiedad distributiva.

6. Dados los conjuntos A = {a, b} y B = {r, s, t}. Calcular A × B y averiguar el número de elementos de A × B.

$$A \times B = \{(a, r)\ (a, s)\ (a, t)\ (b, r)\ (b, s)\ (b, t)\}$$

El número de elementos de A × B es 6. En general, el número de elementos del conjunto A × B es igual al producto del número de elementos de A por el número de elementos de B. Más brevemente,

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$$

donde n(A × B), n(A) y n(B) simbolizan el número de elementos del conjunto producto A × B, del conjunto A y del conjunto B.

2. RELACIONES ENTRE LOS ELEMENTOS DE UN CONJUNTO

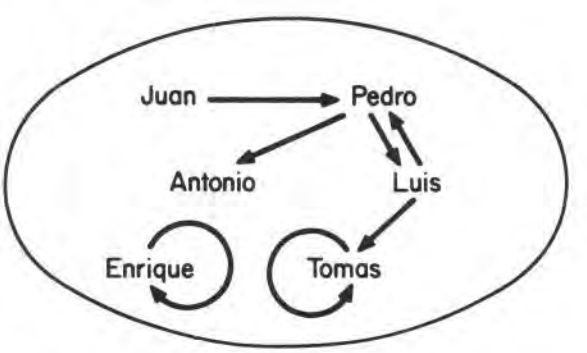
Dado un conjunto pretendemos añadirle un criterio de forma que afecte a todos o a unos cuantos elementos. Vamos a empezar con algunos casos particulares y luego generalizaremos.

Consideremos el conjunto de niños

$$C = \{\text{Juan, Pedro, Luis, Antonio, Tomás, Enrique}\}$$

podemos expresar que:

a Juan *le gusta jugar con* Pedro
a Pedro *le gusta jugar con* Luis y con Antonio
a Luis *le gusta jugar con* Pedro y con Tomás
a Enrique *le gusta jugar* solo (consigo mismo)
a Tomás *le gusta jugar* solo y
a Antonio no *le gusta jugar*



en un diagrama quedaría esquematizada esta situación así:

El significado de la flecha es fácil de imaginar, la flecha que parte de Pedro y llega a Antonio indica que a Pedro le gusta jugar con Antonio. De Antonio no sale ninguna flecha porque no le gusta jugar.

En el conjunto C hemos dado un criterio, «le gusta jugar con», que nos permite relacionar los elementos de C. Es fácil pensar en expresar este criterio como parejas de elementos, de forma que, el niño que figura en la primera componente le gusta jugar con el niño que figura en la segunda componente. Tendríamos así las siguientes parejas:

(Juan, Pedro) (Pedro, Luis) (Pedro, Antonio) (Luis, Pedro) (Luis, Tomás) (Enrique, Enrique) (Tomás, Tomás)

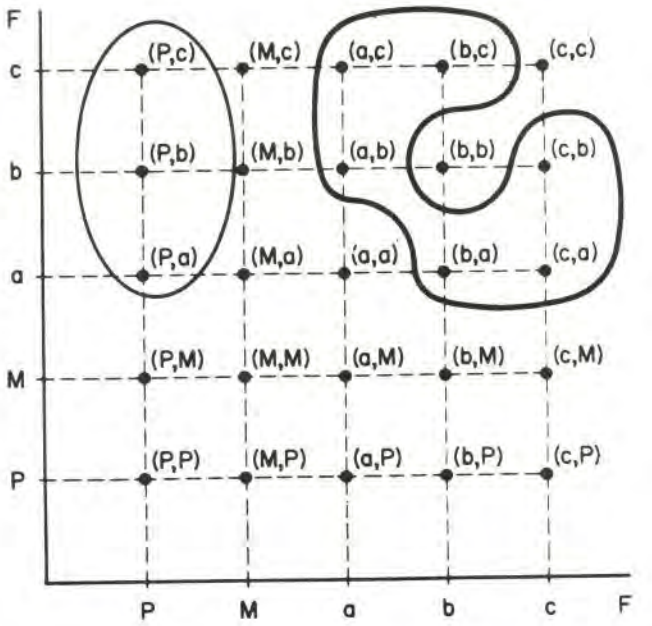
Veamos otro ejemplo. Tomemos como conjunto la familia constituida por el padre P, la madre M y los hermanos, que llamaremos a, b y c, si designamos por F a este conjunto, tenemos

$$F = \{P, M, a, b, c\}$$

añadimos a este conjunto una condición o *relación:* «x es padre de y». Sustituimos x por uno de los elementos de F y le hacemos corresponder los elementos de F que puestos en lugar de y cumplan la condición escrita.

Obtenemos que esta condición se verifica cuando *x* se sustituye por P e *y* por a, b o c, esto es, obtenemos unas parejas de elementos, en la primera componente de estos pares figurará el padre y la segunda componente será para el hijo, Los pares obtenidos son (P, a) (P, b) (P, c)

Para mejor comprensión, vamos a representar gráficamente F × F



Los puntos encerrados en la linea fina son los afectados por la relación definida. Apréciese que las tres parejas afectadas por esta condición constituyen un subconjunto del conjunto F × F.

De lo visto deducimos que, elegido un conjunto, al añadirle una *relación* o condición, podemos establecer una correspondencia entre los elementos del conjunto y queda determinado un subconjunto en el cuadrado del conjunto de partida.

Sobre el mismo conjunto F podemos definir otra relación: «x es hermano de y». Unicamente sustituyendo x por a, b ó c, e y también por a, b ó c puede cumplirse la condición; los pares de elementos correspondientes son

(a, b) (a, c) (b, a) (b, c) (c, a) (c, b)

que en la figura anterior aparecen encerrados en una linea gruesa.

Resumiendo. Dado un conjunto, le hemos asociado un criterio que nos permite relacionar ciertos elementos, esta relación la podemos expresar como parejas de elementos o pares ordenados, en el sentido de que la primera componente está relacionada con la segunda componente, según el criterio establecido. Habitualmente diremos que se trata de una *relación binaria*. Esto es, una relación binaria, «relaciona» los elementos de un conjunto, por medio de un criterio lo suficientemente claro para que dados dos elementos cualesquiera del conjunto, sepamos perfectamente si están relacionados o no.

- Cuando se define sobre un conjunto A una relación binaria, determina sobre el conjunto A × A un subconjunto.

- Sobre un mismo conjunto A se puede definir, en general, más de una relación binaria, cada una de ellas, insistimos, engendrará un subconjunto de A × A.

- En algunas ocasiones, para indicar que dos elementos están afectados por una relación binaria R se suele expresar así

a R b

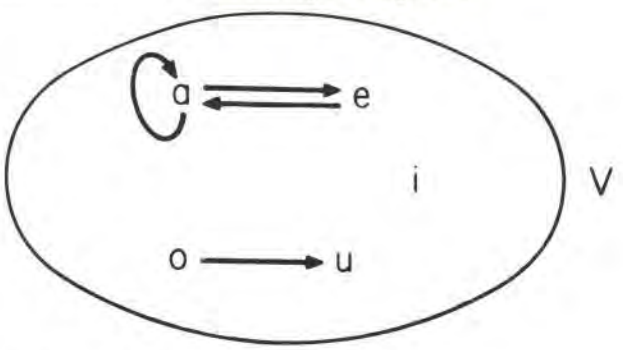
que se lee: «el elemento a está relacionado con el b, según la relación R». Esta nomenclatura es totalmente equivalente a la pareja (a, b).

Ejercicios y ejemplos

1. Dado el conjunto V = {a, e, i, o, u}, consideremos entre sus elementos la relación R dada por:

e R a a R a a R e o R u. (*)

Esta relación puede esquematizarse en el diagrama siguiente:



La relación R también puede expresarse mediante las parejas

(a, a) (a, e) (e, a) (o, u)

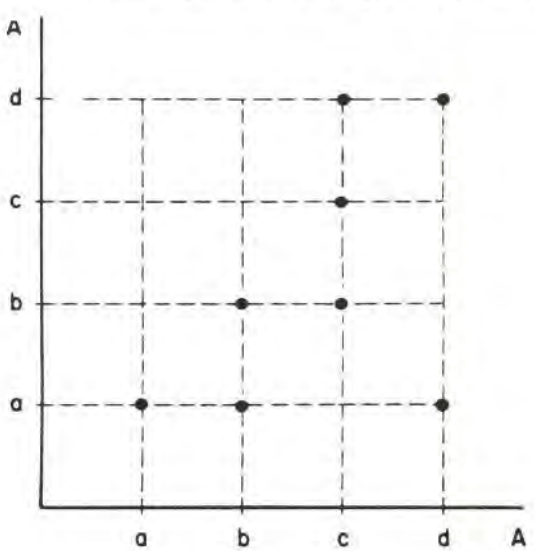
como ya sabemos, hemos puesto, (a, a) en vez de a R a, (a, e) en vez de a R e, (e, a) en vez de e R a y (o, u) en vez de o R u.

¿Cuál es el subconjunto de V × V que define esta relación?

Está formado por las parejas de elementos antes escritas, esto es,

{(a, a) (a, e) (e, a) (o, u)}

2. En el conjunto A = {a, b, c, d} se considera la relación R definida por el subconjunto de A × A, formado por los elementos señalados con un punto, en el diagrama adjunto. Escribir el subconjunto que define esta relación.

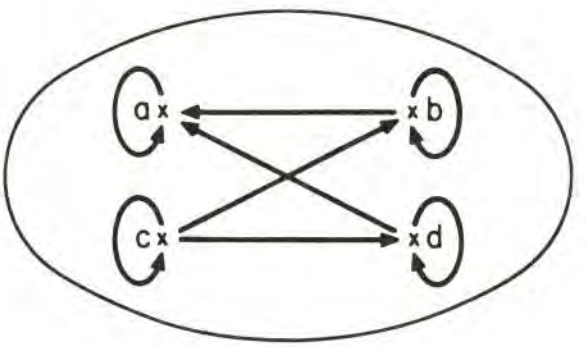


* Habíamos quedado que e R a se lee: « e relacionado con a»; a R a equivale a «a está relacionado con a», etcétera.

Los pares ordenados que forman el subconjunto son

$$\{(a, a)\ (b, a)\ (b, b)\ (c, b)\ (c, c)\ (c, d)\ (d, a)\ (d, d)\}$$

En un diagrama de flechas, tendríamos la siguiente representación:



3. Consideremos el conjunto de todos los habitantes de España, E; definimos la siguiente relación binaria: «dos habitantes están relacionados si viven en la misma ciudad». Estudiar esta relación.

Esta relación afecta a todos los elementos del conjunto E, para comprobarlo tendríamos que ir tomando dos a dos a todos los habitantes de España, averiguando el lugar de su residencia, al final de realizar esta operación, los tendremos repartidos según las distintas ciudades: Alicante, Avila, Valencia, Pontevedra, La Coruña, etcétera.

4. Dado el conjunto $M = \{1, 2, 5, 6, 7\}$, definimos entre sus elementos la siguiente relación binaria: «dos elementos de M están relacionados si la suma del primero más el segundo es mayor que 10». Escribir el subconjunto de $M \times M$ que define esta relación.

El proceso a seguir es formar todas las posibles parejas y ver cuales cumplen la condición prevista:

$$(1, 1)\quad (2, 1)\quad (5, 1)\quad (6, 1)\quad (7, 1)$$

$$(1, 2)\quad (2, 2)\quad (5, 2)\quad (6, 2)\quad (7, 2)$$

$$(1, 5)\quad (2, 5)\quad (5, 5)\quad (6, 5)\quad (7, 5)$$

$$(1, 6)\quad (2, 6)\quad (5, 6)\quad (6, 6)\quad (7, 6)$$

$$(1, 7)\quad (2, 7)\quad (5, 7)\quad (6, 7)\quad (7, 7)$$

Las únicas parejas en las que la suma de sus elementos es mayor que 10 son:

$$\{(5, 6)\ (5, 7)\ (6, 5)\ (6, 6)\ (6, 7)\ (7, 5)\ (7, 6)\ (7, 7)\}$$

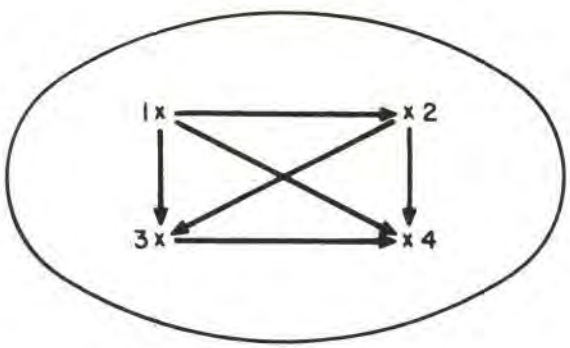
este es el subconjunto pedido. Obsérvese que el par (5, 5) no vale pues su suma es 10, no mayor que 10.

5. En el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ definimos la siguiente relación binaria: «dos elementos de A están relacionados cuando el primer elemento sea menor que el segundo». ¿Cuál es el subconjunto que define esta relación? Dibujar un diagrama de la misma.

Siguiendo un procedimiento semejante al del ejercicio anterior se obtienen las siguientes parejas:

(1, 2) (1, 3) (1, 4) (2, 3) (2, 4) (3, 4)

Un posible diagrama seria.



2.1. Propiedades de las relaciones binarias

Las relaciones binarias pueden gozar de una serie de propiedades que estudiamos a continuación, aunque pueden existir relaciones binarias que no verifiquen estas propiedades.

2.1.1. Propiedad reflexiva

Una relación binaria, R, entre los elementos de un conjunto C, tiene la propiedad reflexiva si se verifica que todos los elementos de C están relacionados consigo mismo, esto es, si a $\in$ C, a R a.

Así la relación «vivir en la misma ciudad» definida en el conjunto de los habitantes de España, cumple esta propiedad, todo habitante de España está relacionado consigo mismo, vive en la misma ciudad.

Una relación, entre los elementos de un conjunto finito, dada por su diagrama de flechas, será reflexiva si para cada elemento hay una flecha que parte de él, y llega al mismo elemento. Además de éstas, puede haber otras flechas, que no afectarán a esta propiedad, sino a otras propiedades que veremos después.

El hecho de que una relación entre los elementos de un conjunto A sea reflexiva se manifiesta en que deben aparecer todas las parejas de elementos que tengan la primera y la segunda componentes iguales, serán elementos de la forma, por ejemplo, (a, a) (b, b), etcétera.

2.1.2. Propiedad simétrica

Una relación binaria R, entre los elementos de un conjunto, C, diremos que es simétrica si cualesquiera que sean los elementos *a* y *b* pertenecientes a C, se verifica que si *a* está relacionado con *b* esto implica que *b* está relacionado con *a*. También se puede expresar así

a R b implica b R a

La relación binaria vista anteriormente «ser hermano de», definida en el conjunto F = {P, M, a, b, c} verifica esta propiedad simétrica, parece claro que si *a* es hermano de *b* esto implica que *b* es hermano de *a*.

Conviene observar que la propiedad simétrica no dice que dos elementos cualesquiera han de estar relacionados. Lo que afirma es que si *a* está relacionado con *b*, entonces *b* también ha de estarlo con *a*.

Una relación dada por su diagrama de flechas será simétrica si para cada flecha hay otra en sentido opuesto.

Si la relación definida en A, la expresamos como un subconjunto de A × A, goza de la propiedad simétrica si aparecen junto a la pareja (a, b) la pareja (b, a).

2.1.3. Propiedad antisimétrica

Una relación binaria, R, entre los elementos de un conjunto C, diremos que es antisimétrica, si para cualesquiera elementos, *a* y *b*, distintos entre sí, pertenecientes a C, se verifica que si *a* está relacionado con *b*, implica que *b* no está relacionado con *a*. Más brevemente.

$$a\ R\ b \text{ implica } b \not R\ a$$

Sobre el conjunto de los números naturales se define la relación binaria siguiente, dos números naturales *a* y *b* están relacionados «si *a* es divisor de *b*». Esta relación goza de la propiedad antisimétrica, es evidente, que si afirmamos que *a* es divisor de *b*, esto implica que *b* no es divisor de *a*. Para más claridad pensemos en los números 2 y 38, podemos asegurar que 2 es divisor de 38, pero no es cierto que 38 sea divisor de 2 (*).

Esta propiedad puede enunciarse de otra manera: Una relación binaria R entre los elementos de un conjunto C diremos que es antisimétrica, si para cualesquiera elementos, *a* y *b*, pertenecientes a C, se verifica

$$\left.\begin{array}{l} a\ R\ b \\ b\ R\ a \end{array}\right\} \text{ implican } a = b$$

es decir, si se verifica que: si dos elementos están relacionados cada uno con el otro, entonces son el mismo elemento.

A la vista del enunciado de las propiedades simétrica y antisimétrica, podemos deducir que si una relación es antisimétrica, entonces no puede ser simétrica y recíprocamente, es decir, los conceptos de simétrica y antisimétrica son incompatibles, pero puede ocurrir que una relación no sea simétrica ni antisimétrica.(**)

2.1.4. Propiedad transitiva

Una relación binaria R entre los elementos de un conjunto C diremos que es transitiva si para cualesquiera elementos *a*, *b*, *c* pertenecientes al conjunto C se verifica que: si *a* está relacionado con *b* y si *b* está relacionado con *c* podemos asegurar que *a* está relacionado con *c*. De una manera más brevemente:

$$\left.\begin{array}{l} a\ R\ b \\ b\ R\ c \end{array}\right\} \text{ implican } a\ R\ c$$

Volvamos al conjunto E formado por todos los habitantes de España y la relación binaria: «dos habitantes están relacionados si viven en la misma ciudad». Esta relación cumple la propiedad transitiva, en efecto, si Juan vive en la misma ciudad que Pedro y Pedro en la misma ciudad que Antonio, podemos asegurar que Juan vive en la misma ciudad que Antonio.

3. CLASIFICACION DE LAS RELACIONES BINARIAS

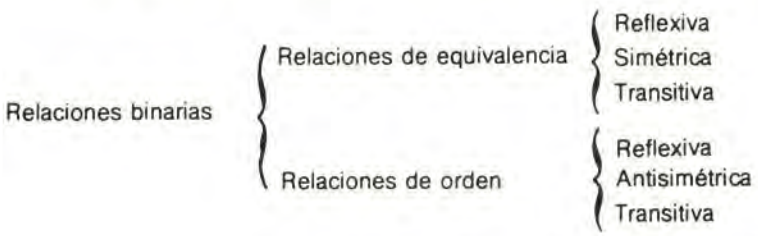
Acabamos de ver que las relaciones binarias pueden cumplir cuatro propiedades: reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva. Propiedades independientes entre sí y ninguna de ellas se puede deducir de las restantes.

---

* Recordemos que 2 es divisor de 38, porque la división de 38 por 2 es exacta.

** Si A es un conjunto distinto del vacío, la relación binaria, $\forall a, b \in A$, aRb si y sólo si a = b es la *única* relación binaria que es de equivalencia y de orden.

Estas cuatro propiedades nos permiten distinguir dos grandes grupos de relaciones: el de aquellas que poseen las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva, llamadas relaciones de equivalencia y el de las relaciones reflexivas, antisimétricas y transitivas que denominaremos relaciones de orden.



Tenemos que hacer la observación de que hay auténticas relaciones binarias que al no verificar alguna propiedad no puede ser incluida en ninguno de estos dos grandes grupos.

3.1. Relaciones de equivalencia

Vamos a estudiar las relaciones de equivalencia, en primer lugar, también se les suele llamar relaciones de igualdad, nosotros preferimos utilizar la primera denominación, porque además de estar más generalizada, pensamos no produce errores, parece lógico reservar el nombre de igualdad, cuando se trata de una auténtica identidad, es decir, dos cosas son iguales cuando son la misma cosa.

Algunas veces decimos que el examen de este alumno es equivalente al de aquel alumno y como consecuencia han obtenido la misma calificación, únicamente, significamos la igualdad de ambos exámenes respecto a un aspecto, en este caso, a su contenido. Pueden ser diferentes en cuanto a su caligrafía, papel utilizado, etcétera.

Si en dos periódicos vemos publicada una fotografía obtenida con el mismo negativo, decimos que las dos fotografías son iguales o equivalentes, según esta relación, aunque para otras relaciones puedan no serlo: pueden tener distinto tamaño, distinto color, etcétera.

De lo dicho se desprende que con una relación de equivalencia, queremos decir que estas «cosas» son iguales considerando un aspecto. Los dos exámenes son equivalentes porque tienen el mismo contenido y las dos fotografías lo eran porque procedían del mismo negativo.

Todavía otro ejemplo: Supongamos un cine que tiene tres tipos distintos de localidades: butacas, entresuelo y principal. Cada una de ellas tienen precios distintos, pero cada tipo de localidad cuesta lo mismo (las butacas son equivalentes en lo que concierne al precio, lo mismo ocurre con las localidades de entresuelo y con las de principal). Respecto a otros aspectos no lo son, por ejemplo, en cuanto a comodidad del espectador, situación en el local, etcétera.

Por lo tanto, en el conjunto de todas las localidades del cine se ha establecido una relación de equivalencia, la de tener el mismo precio: dos localidades son equivalentes si tienen el mismo precio.

¿Qué efecto ha producido en las localidades del cine el introducir esta relación de equivalencia? Ha distinguido subconjuntos de localidades iguales entre sí respecto al precio, tenemos, pues, tres subconjuntos:

Subconjunto de las localidades de butaca
Subconjunto de las localidades de entresuelo.
Subconjunto de las localidades de principal.

Los elementos que integran cada uno de estos tres subconjuntos son equivalentes respecto al precio, todas las localidades que tienen el mismo precio pertenecen a uno de los subconjuntos enunciados.

Una localidad no sirve a la vez para ocupar una butaca y una posición en entresuelo, cada localidad pertenece a uno de los subconjuntos. Esto es, el conjunto de todas las localidades es la *suma* de los tres subconjuntos antes definidos. Estos tres subconjuntos constituyen una *partición* del conjunto de todas las localidades.

A modo de primera conclusión: Toda relación de equivalencia produce una partición en el conjunto en que se ha definido, o lo que es lo mismo, cada una de las partes de la partición está constituida por los elementos iguales entre si respecto de esa relación de equivalencia.

Cuando nos referimos a una partición provocada por una relación de equivalencia, se la suele llamar *clasificación* y a cada una de las partes una *clase de equivalencia*. A uno cualquiera de los elementos de una clase se le llama un *representante* de esa clase.

En el ejemplo de las entradas de un cine, las clases obtenidas por la relación de valer el mismo precio son las tres clases de localidades:

butaca, entresuelo y principal.

Algo semejante ocurre con un viajante de comercio, en su maleta de muestras, lleva un representante de cada clase de productos que vende, el comprador elige sobre la muestra, pues sabe que todos los objetos que compre serán iguales a ella, es decir, de la misma clase.

Si formamos ahora, un conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia, obtenemos el llamado *conjunto cociente*; como sobre un mismo conjunto se pueden definir más de una relación de equivalencia, podremos obtener diversos conjuntos cocientes. Para evitar confusiones siempre que hablemos de conjunto cociente, haremos referencia al conjunto de partida y a la relación de equivalencia que lo origina.

Si al conjunto de localidades de un cine lo representamos por C y a la relación de equivalencia que hemos definido R, el conjunto cociente lo simbolizaremos así: C/R. Podemos escribir, pues,

$$C/R = \{\text{Butacas, entresuelo, principal}\}$$

Nos preocupa ahora el determinar que una relación de equivalencia definida sobre un conjunto es una relación de este tipo, para ello nos limitaremos a comprobar que verifica las tres propiedades antes enunciadas:

Reflexiva

Simétrica

Transitiva

Existe otro procedimiento consistente en comprobar que la relación de equivalencia ha producido una clasificación o clases de equivalencia en el conjunto de partida.

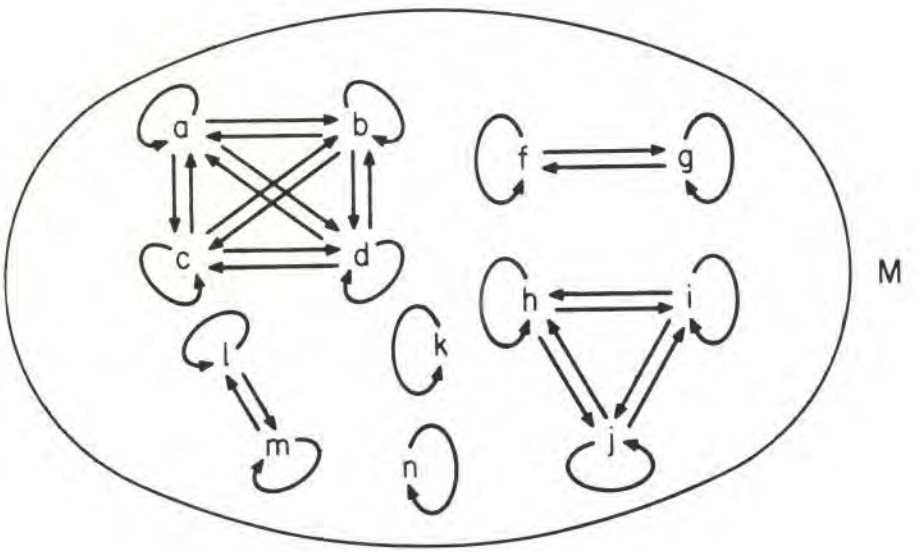
Ejercicios y ejemplos

1. Consideremos el conjunto: M = {a, b, c, d, f, g, h, i, j, k, l, m, n} en él se define la relación binaria R definida por las siguientes parejas de elementos:

{(a, a) (a, b) (a, c) (a, d) (b, a) (b, b) (b, c) (b, d) (c, b) (c, c) (c, d) (d, a) (d, b) (d, c) (d, d) (f, g) (g, f) (g, g) (h, h) (h, i) (h, j) (i, h) (i, i) (i, j) (j, h) (j, i) (j, j) (k, k) (l, l) (l, m) (m, l) (m, m) (n, n) (c, a) (f, f)}

Estudiar el conjunto cociente.

Podemos esquematizarla en el siguiente diagrama:



los elementos de M relacionados con a son: a, b, c, d

" " " M " " f " f, g

los elementos de M relacionados con h son: h, i, j

" " " M " " k " k

" " " M " " l " l, m

" " " M " " n " n

y así sucesivamente, con los restantes elementos de M, ejercicio que brindamos al alumno y así comprobará la no aparición de subconjuntos nuevos de M. Estos subconjuntos son, precisamente, las clases de equivalencia que produce la relación R en M.

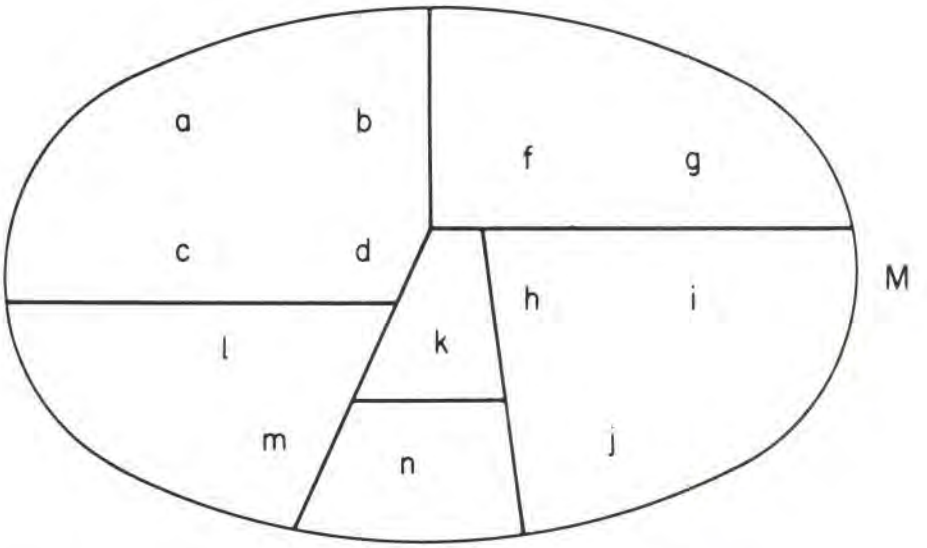
El conjunto cociente M/R es:

$$M/R = \{\{a, b, c, d\}, \{f, g\}, \{h, i, j\}, \{k\}, \{l, m\}, \{n\}\},$$

No todos los subconjuntos de M son clases de equivalencia, por ejemplo, el subconjunto {f, k} no es una clase de equivalencia.

Observamos que las clases de equivalencia definidas por dos elementos son el mismo subconjunto o son subconjuntos disjuntos. Así, el elemento *i* define la misma clase que el *j*. En cambio, el *j* y *m* pertenecen a clases disjuntas distintas.

La figura adjunta muestra las clases de equivalencia conseguidas:



Por último, conviene recordar que las clases de equivalencia determinan una partición en el conjunto M:

$$M = \{a, b, c, d\} + \{f, g\} + \{h, i, j\} + \{k\} + \{l, m\} + \{n\}$$

2. Sea C el conjunto de todos los habitantes de Madrid, definimos la relación «vivir en la misma ciudad». ¿Es una relación de equivalencia?

Sí, porque cumple las tres propiedades características.

Reflexiva: el individuo *a* «vive en la misma ciudad» que el mismo *a*

Simétrica: Si *a* «vive en la misma ciudad» que *b*, éste «vive en la misma ciudad» que *a*.

Transitiva: Si *a* «vive en la misma ciudad» que *b*, y éste en la misma que c, por lo tanto, *a* y *c*, «viven en la misma ciudad».

3. Sea H el conjunto de todos los habitantes del mundo, definimos la siguiente relación, si h y h' son dos representantes de H, diremos que h está relacionado con h' si h y h' son primos hermanos ¿Es una relación de equivalencia?

Vamos a ver si cumple las propiedades características:

Reflexiva: Considerando que todo hombre es hermano de sí mismo (es hijo de los mismos padres), los padres de *h* son hermanos de los padres del mismo *h;* luego *h* es primo hermano consigo mismo y lo podemos expresar así h R h.

Simétrica: Si *h* es primo hermano de *h'*, evidentemente *h'* lo es de *h*.

Transitiva: En general no se verifica. Dados los individuos *h, h'* y *h''* cualesquiera, *h* y *h'* pueden ser primos hermanos por ser hermanos sus padres y *h'* y *h''* por ser hermanas sus madres, sin que exista ninguna relación de parentesco entre los padres de *h* y los de *h''*.

Por lo tanto, no es una relación de equivalencia.

Como curiosidad, podemos indicar, que si añadimos una condición a la relación anterior, obtenemos una relación de equivalencia. Si todas las mujeres son hijas únicas, la relación de «primos hermanos» supondria que son hermanos precisamente los padres, y se verificarían las 3 propiedades.

4. Definimos en el conjunto A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} la siguiente relación binaria, dos números están relacionados si su diferencia es un múltiplo de 3. ¿Es una relación de equivalencia?

Como de costumbre, nos preocupamos de ver si cumplen las tres propiedades características, pero antes escribiremos esta relación así:

$a \mathrel{R} b$ si $a - b = \dot{3}$

Reflexiva: $a \mathrel{R} a$ en efecto $a - a = 0$ (*)

Simétrica: Si $a \mathrel{R} b$ quiere decir que $a - b = \dot{3}$, por supuesto $b \mathrel{R} a$

Transitiva: Si $a \mathrel{R} b$, $b \mathrel{R} c$ } esto implica $a \mathrel{R} c$

Si $a \mathrel{R} b$ esto supone $a - b = \dot{3}$
Si $b \mathrel{R} c$ esto supone $b - c = \dot{3}$ } sumando miembro a miembro

$a - b + b - c = 2 \cdot \dot{3} = \dot{3}$ luego $a - c = \dot{3}$

por lo tanto, $a \mathrel{R} c$ como queríamos comprobar.

Es una relación de equivalencia.

5. Sea E/R el conjunto cociente de E por la relación de equivalencia R. Si $E/R = \{A, B, C\}$, expresar mediante operaciones de unión e intersección que los conjuntos A, B y C determinan una partición del conjunto E. Tenemos que expresar dos cosas: una que la suma de A, B y C es el conjunto E y otra, que A, B y C son conjuntos sin elementos comunes, son conjuntos disjuntos. Podemos escribir entonces:

$$A \cup B \cup C = E$$

$$A \cap B = \emptyset$$

$$A \cap C = \emptyset$$

$$B \cap C = \emptyset$$

6. Sea A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...} definimos la siguiente relación binaria R: «dos números cualesquiera están relacionados si dan el mismo resto al dividirlos por 3». Comprobar que es una relación de equivalencia y hallar el conjunto cociente A/R.

Como de costumbre tratamos de demostrar que verifican las tres propiedades características:

Reflexiva: Es evidente.

* 0 se puede considerar múltiplo de 3 y de cualquier número.

Simétrica: Sean *a* y *b* dos números cualesquiera, *a* está relacionado con *b* supone que dan el mismo resto al dividirlos por 3, parece lógico, que *b* estará relacionado con *a*, por la misma circunstancia.

Transitiva: Sean *a*, *b*, y *c* tres números cualesquiera

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si a R b} \\ \text{b R c} \end{array}\right\} \text{esto supone que a R c}$$

Si a R b al dividir *a* y *b* por 3 dan el mismo resto

Si b R c al dividir *b* y *c* por 3 dan el mismo resto

luego *a* y *c* al dividirlos por 3 tienen el mismo resto
y en consecuencia, a R c, como queríamos verificar.

Es una relación de equivalencia.

Para calcular el conjunto cociente, hemos de fijarnos que un número cualquiera al dividirlo por 3 puede dar tres tipos de restos: 0, 1, 2.

Recordando que, Dividiendo = divisor × cociente + Resto, podemos escribir:

$0 = 0 \cdot 3 + 0$	$1 = 0 \cdot 3 + 1$	$2 = 0 \cdot 3 + 2$
$3 = 1 \cdot 3 + 0$	$4 = 1 \cdot 3 + 1$	$5 = 1 \cdot 3 + 2$
$6 = 2 \cdot 3 + 0$	$7 = 2 \cdot 3 + 1$	$8 = 2 \cdot 3 + 2$
$9 = 3 \cdot 3 + 0$	$10 = 3 \cdot 3 + 1$	$11 = 3 \cdot 3 + 2$
.....	.....	.....
.....	.....	.....

Podemos afirmar que en A existirán tres subconjuntos disjuntos, formados:

a) Números que al dividirlos por tres dan de resto 0, esto es, todos los elementos de A que sean múltiplos de 3, o sea, {0, 3, 6, 9, 12, ...}

b) Números que al dividirlos por tres dan de resto 1, o sea todos los elementos de A que sean múltiplos de 3 aumentados en una unidad, lo podemos escribir: {1, 4, 7, 10, 13, ...}

c) Números que al dividirlos por tres dan de resto 2, todos los elementos de A que sean múltiplos de 3 aumentados en dos unidades, o lo que es lo mismo: {2, 5, 8, 11, 14, ...}

Por lo tanto, el conjunto cociente es:

$$A/R = \{ \{0, 3, 6, 9, 12, ...\}, \{1, 4, 7, 10, 13, ...\}, \{2, 5, 8, 11, 14, ...\} \}$$

7. Dado el conjunto E = {1, 2, 3, 4, 5}, definimos una partición a través de los conjuntos {1, 3, 5} y {2, 4}. ¿Cuál es la relación de equivalencia que ha definido esta partición?

Al tener una partición definida por esos dos conjuntos E = {1, 3, 5} ∪ {2, 4} luego, estos dos conjuntos son 2 clases de equivalencia, cada una de ellas agrupa a todos los elementos equivalentes entre sí, por lo tanto, la relación de equivalencia es

1 R 1, 1 R 3, 1 R 5, 2 R 2, 2 R 4, etc.

es decir, a R b si tienen la misma paridad.

3.2. Relaciones de orden

Vamos a empezar considerando el siguiente ejemplo, consideremos a las cuatro personas siguientes, con sus datos, correspondientes, de edad y estatura:

Nombre	Edad	Estatura (*)
Pedro	20	1,80
Luis	17	1,65
Antonio	30	1,60
Lucas	25	1,75

es un conjunto formado por cuatro elementos, que están perfectamente identificados por sus nombres, edad y estatura.

¿Cómo colocaríamos los elementos de este conjunto si los ordenamos teniendo en cuenta su edad? Pondríamos en primera posición al de menor edad y en último lugar al de mayor edad, lo escribiríamos así:

Luis, Pedro, Lucas, Antonio

¿Es posible otra ordenación? Por supuesto, variando el criterio que hemos empleado antes. Obtendríamos un resultado distinto. Nos vamos a fijar, ahora, en la estatura, los ordenamos de menor a mayor estatura:

Antonio, Luis, Lucas, Pedro

Es evidente que también podíamos actuar colocando en primer lugar al de mayor edad o de mayor estatura y terminar en el de menor edad o menor estatura.

Parece sencillo de generalizar lo que hemos hecho, dado un conjunto hemos definido una relación binaria, consiguiendo de esta manera establecer un orden entre los elementos del conjunto, o sea, buscar un elemento que anteceda a todos y otro que sea el último (Realmente el proceso no es tan sencillo, pero por ahora nos es suficiente).

También hemos puesto de manifiesto que sobre un mismo conjunto puede definirse más de una relación binaria que genere entre sus elementos un orden, a estas relaciones las llamaremos *relaciones de orden* y estarán caracterizadas porque gozan de las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva.

---

* La edad está expresada en años y la estatura en metros.

Ejercicios y ejemplos

1. En el conjunto A = {1, 2, 3, 4, 5} definimos la siguiente relación binaria: Si *a* y *b* son dos números naturales diremos que *a* está relacionado con *b* si *a* es menor o igual a *b*. Estudiar esta relación de orden.

Averiguamos, en primer lugar, a qué elementos afecta esta relación, por comodidad, indicamos que esta relación la podíamos escribir así:

$$a \, R \, b \text{ si } a \leq b$$

los elementos que afecta son:

$1 \leq 1 \quad 2 \leq 2 \quad 3 \leq 3 \quad 4 \leq 4 \quad 5 \leq 5$

$1 \leq 2 \quad 2 \leq 3 \quad 3 \leq 4 \quad 4 \leq 5$

$1 \leq 3 \quad 2 \leq 4 \quad 3 \leq 5$

$1 \leq 4 \quad 2 \leq 5$

$1 \leq 5$

las parejas de elementos son, entonces:

(1, 1) (1, 2) (1, 3) (1, 4) (1, 5) (2, 2) (2, 3) (2, 4) (2, 5) (3, 3) (3, 4) (3, 5) (4, 4) (4, 5) (5, 5)

se puede observar, que como en toda relación binaria, estos pares ordenados que definen una relación de orden son un subconjunto de A × A.

Para cerciorarnos de que es una relación de orden, tenemos que comprobar que goza de las propiedades características:

Reflexiva: a R a porque $a \leq a$

Antisimétrica: Si a R b quiere decir que $a \leq b$, por lo tanto solamente, puede ser $b \leq a$, esto es, b R a cuando a = b.

Transitiva: Si a R b, b R c } se deduce a R c

Si a R b esto supone que $a \leq b$
Si b R c esto supone que $b \leq c$
de donde se deduce que si *a* es menor o igual a *b*
y *b* es menor o igual a *c*, podemos afirmar que
el primero es menor o igual al último, $a \leq c$, luego
a R c como queríamos demostrar.

3. Definir entre los alumnos de un Centro Universitario una relación de orden.

Es fácil de comprobar que es una relación de orden la siguiente: el alumno *a* y el alumno *b* están relacionados si el alumno *a* estudia un curso anterior o es la misma persona que *b*.

Dentro de un mismo curso también se podrian ordenar los alumnos: el alumno *a* y el alumno *b* de un mismo curso están relacionados si el alumno *a* es más joven o es la misma persona que el alumno *b*.

3.2.1. Relaciones de orden total.

Dados dos elementos distintos del conjunto, la relación de orden dice siempre que uno es anterior al otro; cuando ordena cualquier par de elementos, cuando los ordena en su totalidad, decimos que la relación de orden es total.

Un conjunto finito, como el de los alumnos de una clase, está ordenado totalmente, la lista de clase nos puede decir que entre dos alumnos cualesquiera quién es el anterior al otro. En esta ordenación existe un alumno o elemento que es anterior a todos y que llamamos *primer elemento del conjunto;* existe también otro, posteror a todos, al que llamamos *último elemento del conjunto.*

No creamos que todo conjunto ordenado totalmente tiene primero y último elemento; basta fijarse en el de los números naturales que tiene primero y carece de último.

En conclusión, una relación binaria entre los elementos de un conjunto es una *relación de orden total,* si para cualquier par de elementos distintos señala uno de ellos como anterior al otro.

3.2.2. Relaciones de orden parcial.

Una relación de orden entre los elementos de un conjunto, se llama de *orden parcial,* si existe un par al menos de elementos del conjunto para los cuales la relación no dice cual es el anterior.

De un conjunto ordenado por una relación de orden parcial, se dice que está parcialmente ordenado.

Si consideramos un río, sus afluentes y subafluentes, podemos ordenar el conjunto de esos ríos, diciendo que uno es anterior al otro, si el agua que lleva el primero también pasa por el segundo. La ordenación que resulta es parcial; pueden existir ríos en los que no hay uno que sea anterior al otro, porque pasa distinta agua por uno que por otro. Es evidente que en esta ordenación hay un último río, el principal, que es posterior a todos.

Si en un conjunto ordenado, tanto total como parcialmente, el elemento *a* es anterior al *b* y no existe ningún elemento posterior a *a* y anterior a *b*, se dice que *a precede a b* y también que *a* es el elemento *precedente* a *b*; otras veces se prefiere expresar lo mismo, diciendo que *b sigue* a *a* o que es el elemento *siguiente* al *a*.

NOTAS ACLARATORIAS Y COMPLEMENTARIAS

* En el tema anterior ya habíamos hablado y tratado del concepto de relación, creemos es el momento adecuado de recordarlo. Cuando definíamos un conjunto nos interesaba dar un criterio lo suficientemente rígido para que dado un objeto cualquiera supiéramos si pertenecía o no pertenecía al conjunto, por lo tanto, un elemento cualquiera establece con el conjunto al que pertenece una *relación de pertenencia.*

* Al definir un subconjunto A, de un conjunto B, tratamos de indicar que A está incluido en B y lo expresamos así $A \subset B$, parece entonces lógico pensar que un subconjunto y el conjunto de partida definen una *relación de inclusión,* esta relación de inclusión es una relación de orden, todos los subconjuntos de un conjunto se pueden ordenar según la relación de inclusión.

* En algunas ocasiones las relaciones binarias definidas sobre un conjunto, suelen expresarse con un simbolismo matemático, que en cierto modo hemos mostrado. Así, si tenemos la relación binaria definida sobre el conjunto de los números naturales que nos dice: «dos números naturales están relacionados si el primero es múltiplo del segundo», se puede expresar:

$$a \, R \, b \Longleftrightarrow a = \dot{b} \qquad \text{siendo } a, b \in N$$

con N queremos indicar el conjunto de los números naturales.

CONCLUSIONES TEMA II

CONJUNTO PRODUCTO	Dados dos conjuntos A y B, A × B está formado por todos los pares cuya primera componente pertenezca a A (primer conjunto) y la segunda pertenezca a B (segundo conjunto).	
RELACION BINARIA	Es una manera de relacionar los elementos de un conjunto, por medio de un criterio lo suficientemente claro para que, dados los elementos cualesquiera del conjunto, sepamos perfectamente si están relacionados o no.	
PROPIEDADES DE LAS RELACIONES BINARIAS	*Reflexiva:* Todos los elementos del conjunto están relacionados consigo mismo. *Simétrica:* Si un elemento está relacionado con otro, esto implica que el segundo está relacionado con el primero. *Antisimétrica:* Si un elemento está relacionado con otro, esto implica que el segundo no está relacionado con el primero. *Transitiva:* Si un elemento está relacionado con un segundo elemento y éste con un tercero, podemos asegurar que el primero está relacionado con el tercero.	
CLASIFICACION RELACIONES BINARIAS	EQUIVALENCIA	Verifica las propiedades: Reflexiva, simétrica y transitiva.
	ORDEN	Verifica las propiedades: reflexiva, antisimétrica y transitiva.

BIBLIOTECA PUBLICA PTO. STA. MARIA

EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. *Siendo* $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *y* $(a, b) \in A \times A$, *estudiar las propiedades de la relación binaria:* $a + b > 0$.

2. *Se define en el conjunto* $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *la siguiente relación binaria:* $a - b < 2$. *Estudiar sus propiedades.*

3. *Formar todos los subconjuntos del conjunto* $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *y ordenarlos según la relación de inclusión. ¿Ha quedado el conjunto A totalmente ordenado por la relación de inclusión considerada?*

4. *Definimos en el conjunto de los números naturales la siguiente relación:* $a\ R\ b \Leftrightarrow a \leqslant b$. *¿Es una relación de orden? ¿Ha quedado el conjunto N totalmente ordenado?*

5. *Sean los conjuntos* $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *y* $B = \{1, 3, 5\}$. *Definimos una relación R: «x es menor que y» siendo* $x \in A$ *e* $y \in B$.

   1. *Escribir R como un conjunto de pares ordenados*
   2. *Trazar R en un diagrama de coordenadas de* $A \times B$.
   3. *Encontrar la relación inversa* R^{-1} *de la anterior.*

6. *Entre los conjuntos* $E = \{2, 3, 4, 5\}$ *y* $F = \{3, 6, 7, 10\}$ *definimos la relación binaria R: «x divide a y» siendo* $x \in E$ *e* $y \in F$.

   a) *Escribir R como un conjunto de pares ordenados.*

   b) *Trazar R en un diagrama de coordenadas E y F.*

   c) *Encontrar la relación inversa* R^{-1}.

7. *Sea* $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$ *y R es una relación binaria definida en N mediante la siguiente expresión matemática:* $x + 2y = 8$, *es decir,* $R = \{(x, y) / x, y \in N, x+2y=8\}$. *Escribir R como un conjunto de pares ordenados.*

8. *¿Cuál es el conjunto cociente de* $N \times N$ *según la relación: «(a, b) es equivalente a (c, d) si* $a + d = b + c$».

9. *Dado el conjunto C de las casillas de un tablero de ajedrez, hacer dos participaciones de tal conjunto y enunciar las correspondientes relaciones de equivalencia en C.*

10. *Sea el conjunto* $C = \{a, b, c\}$. *Formar todos los subconjuntos de C. Entre estos subconjuntos definimos la relación «X es anterior a Y si* $X \subset Y$» *ordenar estos subconjuntos de acuerdo a esta relación de orden parcial.*

11. *Consideremos el conjunto formado por todas las rectas del plano, definimos la siguiente relación binaria: dos rectas de este conjunto están relacionadas si son paralelas. Hallar el conjunto cociente que genera esta relación binaria en el conjunto de todas las rectas del plano.*

12. *En el conjunto C de los números enteros positivos se define la siguiente relación binaria: «dos números* a *y* b *de C están relacionados si* a *es múltiplo de* b». *¿Qué tipo de relación es?*

13. *Sea* $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$ *y* $C = \{3, 5\}$. *Comprobar si se verifica que* $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

14. *El conjunto A tiene cuatro elementos y los pares (a, b) y (c, d) pertenecen al producto* $A \times A$. *Calcular el conjunto A y el* $A \times A$.

15. *Sea el conjunto* $\{a, e, i\}$ y la relación definida mediante los siguientes pares ordenados: $\{(a, a), (a, e), (e, i), (e, e), (i, i), (e, a), (i, e)\}$. *¿Qué propiedades verifica?*

16. *En el conjunto de los números naturales se define la siguiente relación:* $a\ R\ b$ *si* $a + b =$ *número par. Comprobar que es de equivalencia y calcular el conjunto cociente.*

17. *El producto de conjuntos* $A \times B$, *¿tiene la propiedad conmutativa? Razonarlo.*

18. *Sobre el conjunto de los números enteros se define la siguiente relación:* $a\ R\ b$ *si* $a = b + n$, *siendo n un número natural. ¿Qué clase de relación es?*

19. *En el conjunto de los enteros se define la siguiente relación de equivalencia:*

    $a\ R\ b$ *si* $a - b = \dot{3}$

    Calcular el conjunto cociente.

20. *Consideremos el conjunto formado por todos los alumnos matriculados en el Curso de Acceso Directo. Los elementos de este conjunto son los alumnos; diremos que los alumnos están relacionados si estudian la misma carrera. ¿Es una relación de equivalencia? Calcular el conjunto cociente.*

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. Escribimos los pares que están relacionados:
   1 R 1, pues, $1 + 1 = 2 > 0$
   2 R 1, pues, $2 + 1 = 3 > 0$
   2 R 2, pues, $2 + 2 = 4 > 0$
   1 R 2, pues, $1 + 2 = 3 > 0$

   y así con todos los pares.

   a) Reflexiva, ya que 1 R 1, 2 R 2, 3 R 3, 4 R 4, 5 R 5, 6 R 6.

   b) *Simétrica,* ya que vemos que si 1 R 2, también 2 R 1.

      Si 1 R 3 se verifica que 3 R 1 y así sucesivamente.

   c) *Transitiva,* ya que si 1 R 3 y 3 R 4 se cumple que 1 R 4.

2. Veamos los pares que están relacionados:

1 R 2	$1 - 2 = -1 < 2$	
1 R 3	$1 - 3 = -2 < 2$	
1 R 4	$1 - 4 = -3 < 2$	
1 R 5		2 R 1
1 R 6		2 R 2
1 R 1		y así sucesivamente.

   a) *Reflexiva,* ya que $a - a = 0 < 2$, por tanto, si la cumple.

   b) *Simétrica,* no la cumple, ya que: 1 R 6, $1 - 6 = -5 < 2$, y por el contrario, 6 R 1, $6 - 1 = 5 > 2$.

c) *Transitiva,* no la cumple, ya que 6 R 5, pues $6 - 5 = 1 < 2$, 5 R 4, pues, $5 - 4 = 1 < 2$ y 6 $\not R$ 4, ya que $6 - 4 = 2$, que no es menor que 2.

3. Escribimos todos los subconjuntos ordenados:

ϕ; {1}; {2}; {3}; {4}; {1, 2}; {1, 3}; {1, 4}; {2, 3}; {2, 4}; {3, 4}; {1, 2, 3} {1, 2, 4}; {1, 3, 4}; {2, 3, 4}; {1, 2, 3, 4}

El orden no es total, ya que si tomamos los subconjuntos {2, 3} y {1, 3} ni el primero está contenido en el segundo ni el segundo en el primero. Algunos conjuntos ordenados con la inclusión son:

$\phi \subset \{1\} \subset \{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$
$\phi \subset \{3\} \subset \{3, 1\} \subset \{3, 1, 2\} \subset \{3, 1, 2, 4\}$

4. Veamos las propiedades que posee esta relación binaria:

Reflexiva: a R a en efecto $a = a$.

Antisimétrica: $\left.\begin{matrix} a \text{ R } b \\ b \text{ R } a \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = b$, en nuestro caso $\left.\begin{matrix} a \leq b \\ b \leq a \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{a = b}$

Transitiva: $\left.\begin{matrix} a \text{ R } b \\ b \text{ R } c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \text{ R } c$, en efecto $\left.\begin{matrix} a \leq b \\ b \leq c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \leq c$

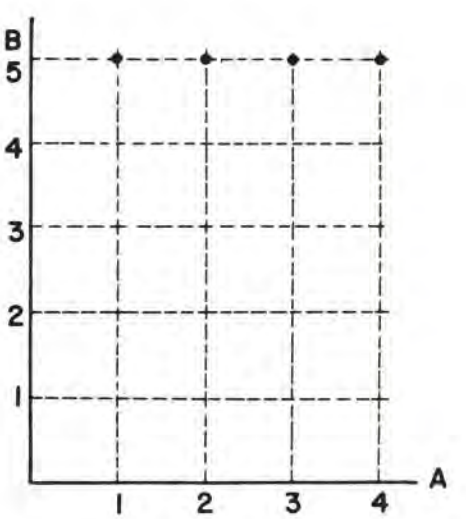
Por lo tanto, es una relación de orden.

El conjunto ha quedado totalmente ordenado por esta relación, pues dados dos números naturales a y b, siempre se verifica una, por lo menos, de las dos relaciones: $a \leq b$, $b \leq a$.

5. *a)* R consta de aquellos pares ordenados $(a, b) \in A \times B$ para los cuales $a < b$; luego

$$R: \{(1, 3)\ (1, 5)\ (2, 3)\ (2, 5)\ (3, 5)\ (4, 5)\}$$

b) El diagrama está dado según la figura siguiente



c) La inversa de R consta de los mismos pares de R, pero en orden invertido; por tanto:

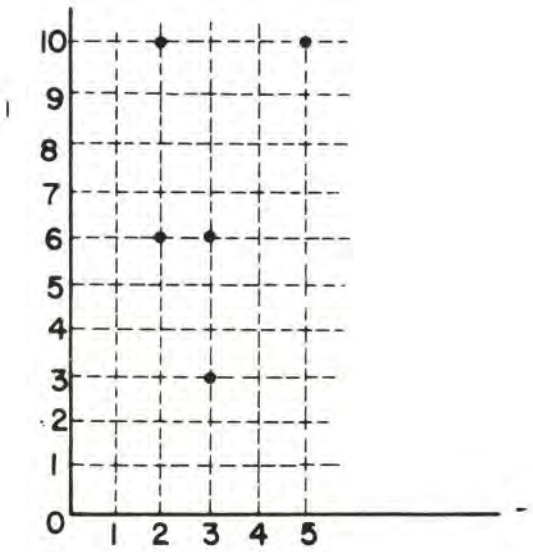
$$R^{-1} \{(3, 1) (5, 1) (3, 2) (5, 2) (5, 3) (5, 4)\}$$

como consecuencia, R^{-1} es la relación >, esto es, «x es mayor que y».

6. *a*) Escogemos aquellos pares en los cuales el primer elemento divide al segundo

$$R : \{(2, 6) (2, 10) (3, 3) (3, 6) (5, 10)\}$$

b)



c) Para hallar R^{-1} invertimos el orden de los elementos de R

$$\{(6, 2) (10, 2) (3, 3) (6,3) (10, 5)\}$$

7. Hay que buscar parejas de elementos de N que verifiquen la expresión dada: $x + 2y = 8$, obtenemos así las parejas siguientes:

$$\{(2, 3) (4, 2) (6, 1)\}$$

obsérvese, por ejemplo, para la primera pareja: $2 + 2 \times 3 = 8$, etc.

8. Si las parejas (a, b) y (c, d) son equivalentes, se cumplirá que $a + d = c + b$, y si, por ejemplo $a > b$, restando primero b a los dos miembros de la igualdad, y luego d nos irá quedando el resultado pedido.

9. Si imaginamos las casillas de un tablero de ajedrez, supuesto éste ante nosotros, podemos distribuirlas en filas, y así tendremos una partición; de modo análogo lo conseguiremos, distribuyéndolas en columnas.

Para la primera partición la relación en el conjunto de casillas es:

«*x* es equivalente a *y*, si están ambas en la misma fila.»

Para la segunda:

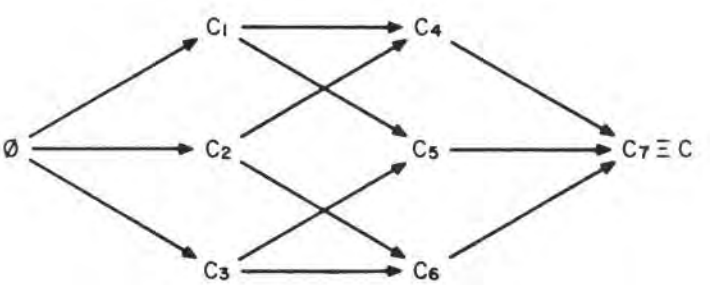
«*x* es equivalente a *y*, si están ambas en la misma columna.»

Naturalmente que *x* e *y* designan casillas del conjunto dado.

10. Los subconjuntos son:

ϕ, $C_1 = \{a\}$, $C_2 = \{b\}$, $C_3 = \{c\}$, $C_4 = \{a, b\}$, $C_5 = \{a, c\}$, $C_6 = \{b, c\}$, $C_7 = \{a, b, c\}$

La ordenación la podemos expresar con el siguiente gráfico:



11. Primero hay que probar que la relación binaria definida es una relación de equivalencia. En efecto, verifica las propiedades:

Reflexiva: Toda recta es paralela a si misma.

Simétrica: Si la recta *a* es paralela a la recta *b*, se deduce que la recta *b* es paralela a la recta *a*.

Transitiva: Si la recta *a* es paralela a la recta *b*, y la recta *b* es paralela a la recta *c*, se puede deducir que la recta *a* es paralela a la recta *c*.

El conjunto cociente está formado por clases de equivalencia, cada una de las clases de equivalencia está formada por todas las rectas paralelas a una dada, en definitiva, el conjunto cociente está formado por todas las direcciones del plano.

12. Es una relación de orden. Vamos a probarlo.

Decir que *a* es múltiplo de *b*, es equivalente a decir que existe un número entero *k* que multiplicado por *b* dé *a*. Veamos las propiedades:

Reflexiva: *a* es múltiplo de *a*.

Antisimétrica: Si *a* es múltiplo de *b* y al mismo tiempo *b* es múltiplo de *a*, *a* y *b* son el mismo número.

Transitiva: *a* es múltiplo de *b*; *b* es múltiplo de *c* } se deduce *a* es múltiplo de *c*

En efecto:

$$\left.\begin{array}{l} a = bk \\ \\ b = ch \end{array}\right\} \quad a = (ch)\,k = c\,(hk)$$

13. $B \cup C = \{3, 4, 5\}$

$A \times (B \cup C) = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$
$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$
$A \times C = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5)\}$
$(A \times B) \cup (A \times C) = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$

Por tanto, coinciden.

14. Son elementos de A = {a, b, c, d} el producto A × A será:

	a	b	c	d
a	(a, a)	(a, b)	(a, c)	(a, d)
b	(b, a)	(b, b)	(b, c)	(b, d)
c	(c, a)	(c, b)	(c, c)	(c, d)
d	(d, a)	(d, b)	(d, c)	(d, d)

15. *Reflexiva,* se tiene que verificar que todo elemento está relacionado consigo mismo y efectivamente se verifica (a, a), (e, e), (i, i).

Simétrica

vamos viendo los pares (a, e) y (e, a)
(e, i) y (i, e)
luego es simétrica

Transitiva

(a, e)
(e, i) luego (a, i)

como el par (a, i) no aparece no tiene la propiedad transitiva.

16. *Reflexiva*

a R a si ya que *si a es par la suma de 2 pares es par*
si a es impar la suma de 2 impares es par

Simétrica

a R b ⇒ b R a ya que si a + b es par también lo será b + a, pues los números naturales tienen la propiedad conmutativa.

Transitiva

a R b quiere decir que a + b es par
b R c quiere decir que b + c es par

Supongamos que b es par, entonces a y c han de ser pares y, por tanto, su suma par. Ahora si b es impar, entonces a y c han de ser impares y su suma par. Por tanto, a R c.

El conjunto cociente tiene dos clases: una de todos los pares, la otra de todos los impares.

17. No la tiene, ya que $A \times B \neq B \times A$.

Efectivamente, un elemento de $A \times B$ será (a, b) y el elemento de $B \times A$ será (b, a).

Los pares (a, b) y (b, a) son distintos.

18. Los números enteros son los positivos y negativos.

Reflexiva:

a R a, efectivamente $a = a + o$ y o es natural.

Simétrica:

a R b, $a = b + n$, luego $b = a - n$ y $-n$ no es natural, por tanto b no está relacionado con a. Luego no verifica la propiedad simétrica.

Antisimétrica

Para que $a\ R\ b$ $\quad a = b + n$
$b\ R\ a$ $\quad b = a + n'$ } luego $n = o$, $n' = o$ } por tanto $a = b$

Si verifica la propiedad antisimétrica.

Transitiva

$a\ R\ b$, $a = b + n$
b R c, $b = c + n'$ $\quad a = (c + n') + n = c + (n + n')$
$n + n'$ es natural

por tanto a R c. Es, pues, una relación de orden.

19. Los elementos del conjunto cociente son clases de equivalencia y cada clase estará formada por todos los elementos relacionados , así:

1 R 4 R 7 R 10 R 13..., pues su diferencia es 3 o múltiplo de 3

2 R 5 R 8 R 11 R 14..., pues su diferencia es 3 o múltiplo de 3

3 R 6 R 9 R 12 R 15..., pues su diferencia es 3 o múltiplo de 3

Tenemos así todos los números repartidos en 3 clases, por tanto, el conjunto cociente tiene 3 clases que se suelen representar por:

$$[\dot{3}]\ |\ [\dot{3}+1]\ |\ [\dot{3}+2]$$

20. *Reflexiva:*

a R a trivial.

Simétrica:

a R b, a y b estudian la misma carrera, luego b R a.

Transitiva:

a R b a estudia la misma carrera que b
b R a b estudia la misma carrera que c, luego a R c

Por tanto, es de equivalencia.

El conjunto cociente estará formado por las clases:

[ciencias] [letras] [económicas] [derecho].

TEMA III

CORRESPONDENCIAS ENTRE CONJUNTOS

ESQUEMA/RESUMEN

1. Correspondencia entre conjuntos.
   - 1.1. Representación gráfica.
   - 1.2. Correspondencia inversa.
2. Aplicaciones.
   - 2.1. Aplicaciones suprayectivas.
   - 2.2. Aplicaciones inyectivas.
   - 2.3. Aplicaciones biyectivas.
   - 2.4. Criterio práctico.
   - 2.5. Composición de aplicaciones.
3. Función.
4. Notas aclaratorias y complementarias.

INSTRUCCIONES PARA EL ESTUDIO DEL TEMA III

Acabamos de estudiar las relaciones binarias. Al definir una relación binaria sobre un conjunto podemos «relacionar» los elementos de un conjunto, de acuerdo con un criterio establecido de antemano, criterio que no necesita, en principio, requisito previo alguno. En este tema nos preocupa el establecer relaciones entre dos conjuntos de una manera semejante a la utilizada en el tema anterior. Para ello, estableceremos los criterios necesarios en la definición de una correspondencia entre dos conjuntos. Al estudiar este tema, el alumno debe darse cuenta de que establecer una relación binaria o una correspondencia es lo mismo, si se prescinde de que la primera se hace *sobre* un solo conjunto y la segunda *entre* dos conjuntos.

El tema III lo terminamos estudiando un tipo especial de correspondencia entre dos conjuntos; nos referimos a las aplicaciones entre conjuntos. El alumno observará que todo lo expuesto al hablar de las correspondencias entre conjuntos es generalizable sencillamente al hablar de las aplicaciones entre dos conjuntos. Nos preocupa, por último, analizar los distintos tipos de aplicaciones, que suponen, en definitiva, unas restricciones en la definición de aplicación.

1. CORRESPONDENCIA ENTRE CONJUNTOS

Consideremos dos conjuntos N y C; el primero es un conjunto de niños y el segundo un conjunto de ciudades por ejemplo:

$$N = \{\text{Juan, Pedro, Antonio, Luis, Carlos}\}$$

$$C = \{\text{Madrid, Barcelona, Valencia, Sevilla}\}$$

supongamos que:

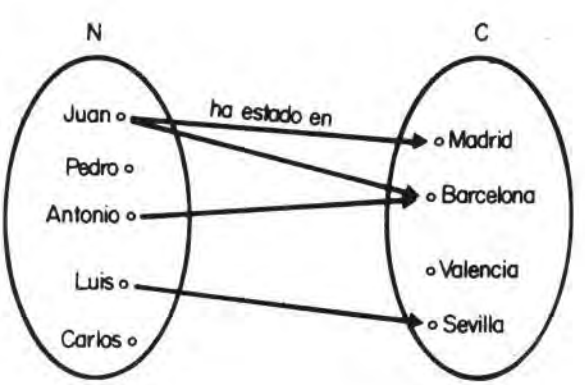
Juan *ha estado* en Madrid y en Barcelona.

Antonio *ha estado* en Barcelona.

Luis *ha estado* en Sevilla.

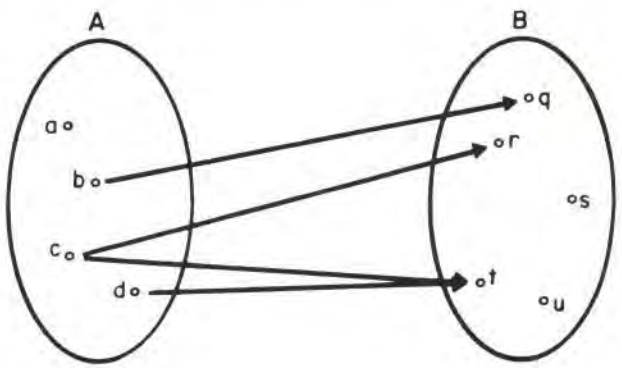
Pedro y Carlos *no han estado* en ninguna de estas ciudades.

lo que hemos hecho es asociar o corresponder a los niños del conjunto N las ciudades de C en que *han estado.* Mediante el diagrama de flechas siguiente tratamos de visualizar esta asociación entre elementos de dos conjuntos, basada en un criterio escogido por nosotros arbitrariamente.



Observemos que de Carlos y Pedro no parten ninguna flecha, esto significa que no han estado en ninguna de las ciudades del conjunto C, asimismo, en C hay una ciudad, Valencia, no asistida por ninguno de los niños del conjunto N.

Trabajemos, ahora, con los conjuntos A = {a, b, c, d} y B = {q, r, s, t, u}, entre estos conjuntos podemos establecer una asociación o correspondencia entre sus elementos, que esquematizamos en la figura siguiente:



Tenemos una situación semejante a la anterior, a ciertos elementos del primer conjunto A les asociamos con otros del conjunto B. De esta manera diremos que entre los conjuntos A y B hemos establecido una correspondencia entre sus elementos.

Al primer conjunto le denominaremos *conjunto de partida* y al B *conjunto de llegada,* por lo tanto, una correspondencia entre dos conjuntos liga los elementos del conjunto de partida y los del conjunto de llegada.

En el primer ejemplo, el conjunto de partida es N, mientras que el conjunto de llegada es C, siendo en el último caso considerado, A el conjunto de partida y B el conjunto de llegada.

Normalmente, designaremos a la correspondencia por f y expresaremos una correspondencia f entre un conjunto de partida A y uno de llegada B mediante:

$$f: A \to B \quad \text{ó} \quad A \xrightarrow{f} B$$

y se lee: correspondencia f de A en B.

Hemos quedado en que la correspondencia f asocia a un elemento del conjunto de partida uno o varios elementos del conjunto de llegada, así si nos referimos a los conjuntos A y B del último ejemplo, vemos que:

$$b \in A \xrightarrow{\text{le asociamos}} q \in B$$

$$c \in A \xrightarrow{\text{le asociamos}} r \in B, t \in B$$

$$d \in A \xrightarrow{\text{le asociamos}} t \in B$$

conviene hacer notar que en el conjunto de partida pueden existir elementos no asociados a ningún elemento del conjunto de llegada y viceversa. Continuando con el mismo ejemplo, observamos que al elemento *a* de A no le asociamos ningún elemento en B y que los elementos *s* y *u* de B no corresponden a ningún elemento de A.

Insistimos, la correspondencia f asocia al elemento *c* de A los elementos *r* y *t* del conjunto de llegada, llamaremos *imagen* del elemento c en la correspondencia f al conjunto {r, t} y lo escribiremos:

$$\text{im}(c) = \{r, t\}$$

análogamente, con los restantes elementos, teniendo presente que si a algún elemento del conjunto de partida no le asociamos ningún elemento en el conjunto de llegada, su imagen es el conjunto vacío ∅.

$$\text{im (b)} = \{q\}$$

$$\text{im (d)} = \{t\}$$

$$\text{im (a)} = \emptyset$$

los conjuntos que constituyen la imagen de cada elemento del conjunto de partida son subconjuntos del conjunto de llegada. En el caso que estamos considerando:

$$\text{im (a)} \subset B$$

$$\text{im (b)} \subset B$$

$$\text{im (c)} \subset B$$

$$\text{im (d)} \subset B$$

Resumiendo: Una correspondencia es un criterio por medio del cual se relacionan de una forma bien determinada los elementos de un conjunto con los elementos de otro, por lo tanto, para definir una correspondencia se necesitan tres requisitos:

- Conjunto de partida.
- Conjunto de llegada.
- Criterio o expresión que establece la correspondencia entre los elementos de ambos conjuntos.

Una correspondencia también puede expresarse de otra manera, a través de parejas de elementos, de pares ordenados, formados por los elementos que ligan la correspondencia definida, la primera componente de la pareja será el elemento del conjunto de partida y la segunda componente es su elemento imagen que es el elemento del conjunto de llegada.

En el ejemplo anterior la correspondencia f se define con las siguientes parejas:

$$(b, q)\ (c, r)\ (c, t)\ (d, t)$$

como la imagen del elemento c, im (c), tenía dos elementos aparecen dos parejas: (c, r) y (c,t). No hemos escrito en ningún par el elemento *a* —no le hemos asociado ningún elemento— ni los elementos s y u del conjunto B al no estar relacionados con ningún elemento del conjunto de partida.

Esta representación, insistimos, guarda mucha relación con la utilizada para las relaciones binarias y nos permite afirmar, que toda correspondencia entre dos conjuntos cualesquiera E y F puede definirse perfectamente a través de un subconjunto del conjunto producto E × F. Así en el caso que estamos considerando tendríamos:

$$\{(b, q), (c, r), (c, t), (d, t)\} \subset E \times F$$

1.1. Representación gráfica

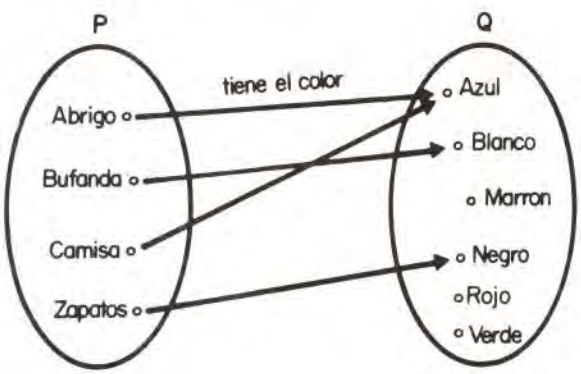
En el segundo ejemplo del apartado anterior ya hemos utilizado una posible representación, que denominaremos sagital, de fácil comprensión, con una flecha uníamos los elementos de los conjuntos de partida y de llegada que estaban relacionados, cuando no figura flecha significa la no correspondencia entre esos elementos, colocando, normalmente a la izquierda el conjunto de partida y a la derecha el de llegada.

Veamos otro ejemplo: Sean los conjuntos P y Q

$$P = \{\text{abrigo, bufanda, camisa, zapatos}\}$$

$$Q = \{\text{azul, blanco, marrón, negro, rojo, verde}\}$$

Hacemos corresponder a cada elemento de P su correspondendiente color que es un elemento de Q. La figura adjunta nos muestra la representación sagital adecuada:



Todos los elementos de P tienen imagen en Q, si queremos utilizar las parejas de elementos para expresar esta correspondencia escribiriamos los siguientes pares de elementos:

(Abrigo, Azul) (Bufanda, Blanco) (Camisa, Azul) (Zapatos, Negro)

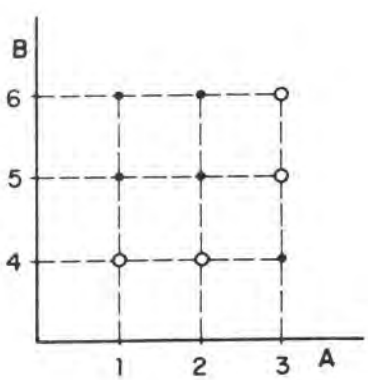
En los elementos Marrón, Rojo, Verde no termina ninguna flecha, esto quiere decir que no pertenecen a ninguna imagen de los elementos de P.

Como una correspondencia es un subconjunto del conjunto producto de los elementos en que está definida, podemos utilizar la representación gráfica utilizada para representar a este conjunto.

Asi, si consideramos los conjuntos

$$A = \{1, 2, 3\} \quad y \quad B = \{4, 5, 6\}$$

su representación gráfica, se realizaría considerando en la representación del conjunto A × B, las parejas de elementos afectados por la correspondencia. Por eso si observamos la figura adjunta:

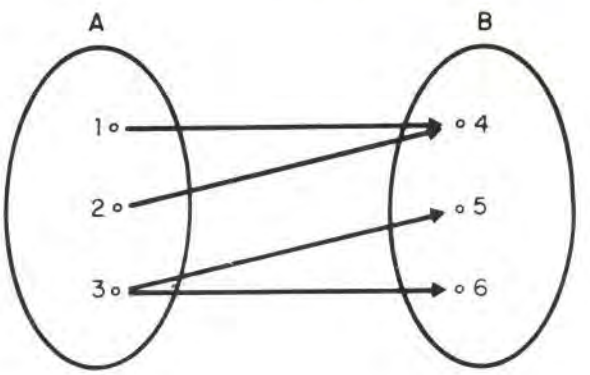


Las parejas de elementos afectados por una determinada correspondencia que está representada por los puntos señalados en «blanco» sería:

$$(1, 4)\ (2, 4)\ (3, 5)\ (3,6)$$

De una manera clara se ve en esta figura que esta correspondencia es un subconjunto de $A \times B$.

Pasando esta correspondencia a una representación sagital tenemos:



1.2. Correspondencia inversa

Dada una correspondencia f entre los conjuntos A y B: $f: A \to B$

definida por un subconjunto S de $A \times B$ se llama correspondencia inversa de f a la correspondencia de B en A definida por un subconjunto de $B \times A$ obtenido cambiando el orden de las parejas del subconjunto S. A la correspondencia inversa de una correspondencia f, la representaremos por f^{-1}.

$$f^{-1}: B \to A$$

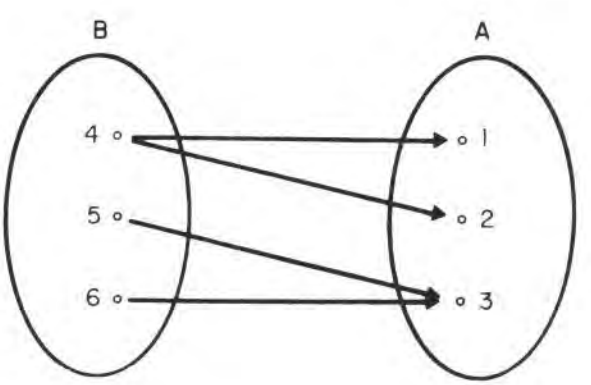
En el último ejemplo considerado en el párrafo 1.1., teníamos establecida una correspondencia f entre los conjuntos A y B definida por un subconjunto de $A \times B$

$$S = \{(1, 4)\ (2, 4)\ (3, 5)\ (3, 6)\}$$

La correspondencia inversa f^{-1}, se puede obtener cambiando el orden de las parejas que constituyen este subconjunto.

$$\{(4, 1)\ (4, 2)\ (5,3)\ (6,3)\}$$

Lo visualizamos utilizando la representacion sagital:



Ejercicios y ejemplos

1. Dado el conjunto de países P y el conjunto de colores Q.

$$P = \{\text{España, Italia, Francia, Alemania}\}$$

$$Q = \{\text{amarillo, azul, blanco, negro, rojo, verde, violeta}\}$$

definimos entre estos conjuntos una correspondencia que asocia a cada país, perteneciente al conjunto P, los colores de su bandera. Establecer las parejas de elementos a que afecta esta correspondencia y hacer una representación sagital de la misma.

Las parejas determinadas son:

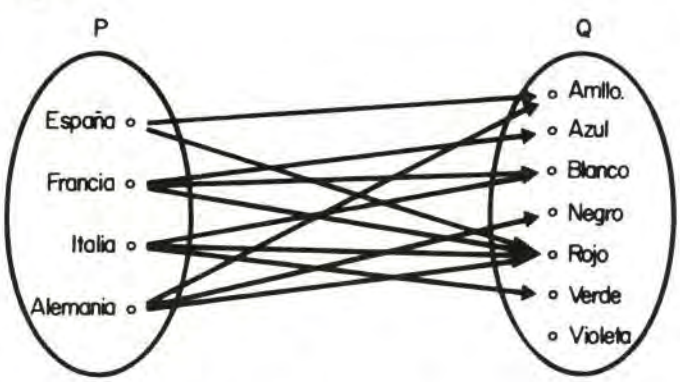
(España, rojo) (España, amarillo)

(Italia, verde) (Italia, blanco) (Italia, rojo)

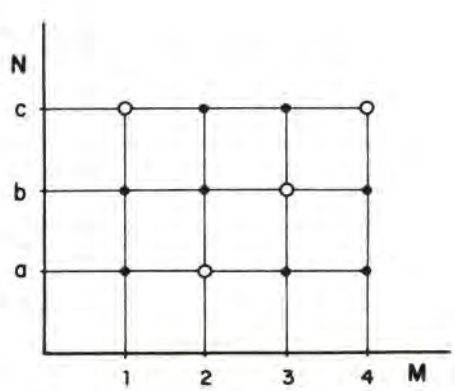
(Francia, azul) (Francia, blanco) (Francia, rojo)

(Alemania, rojo) (Alemania, amarillo) (Alemania, negro)

La representación sagital:



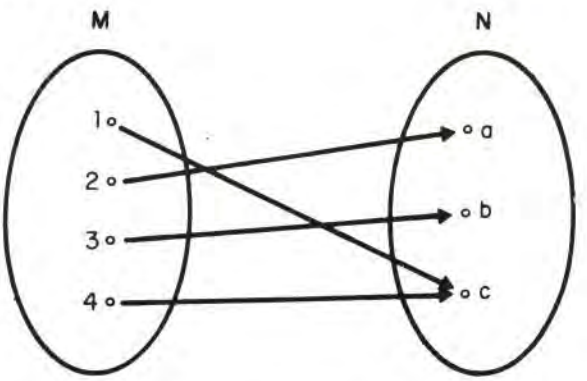
2. Dados los conjuntos M = {1, 2, 3, 4} y N = {a, b, c}. Definimos una correspondencia f: M → N a través de los puntos señalados en «blanco» en el diagrama cartesiano de M × N. Escribir las parejas de elementos afectadas por esta correspondencia, hacer la representación sagital y averiguar la correspondencia inversa.



Las parejas de elementos, forman el siguiente subconjunto de M × N:

$$S = \{(1, c)\ (2, a)\ (3, b)\ (4, c)\}$$

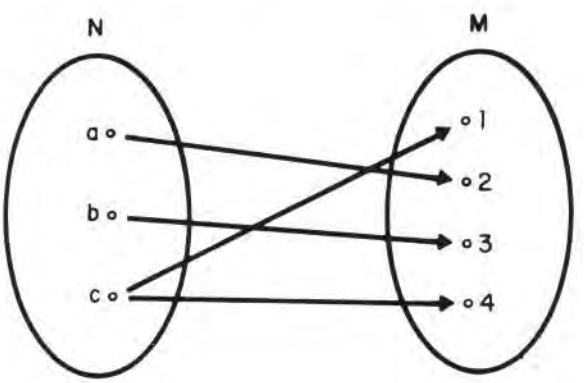
Su representación sagital es:



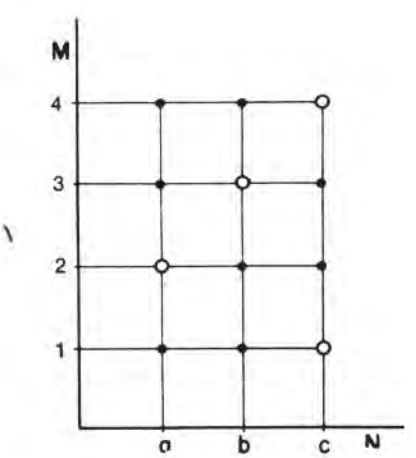
La correspondencia inversa se obtiene cambiando el orden de las parejas del subconjunto S, resulta:

$$(c, 1)\ (a, 2)\ (b, 3)\ (c, 4)$$

La representación sagital de esta correspondencia inversa es:

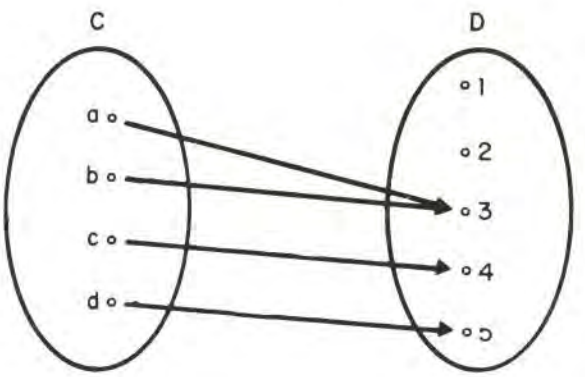


Si utilizamos la representación cartesiana:



2. APLICACIONES

Entre los conjuntos C = {a, b, c, d} y D = {1, 2, 3, 4, 5} definimos una correspondencia mediante el siguiente diagrama sagital:



Esta correspondencia presenta una caracteristica muy importante: A cada elemento del conjunto de partida asocia un solo elemento del conjunto de llegada.

Cuando una correspondencia definida entre dos conjuntos cumple esta condición le daremos el nombre especial de *Aplicación*. Esto es, una aplicación es una correspondencia en que la imagen de cada elemento del conjunto de partida es un conjunto unitario.

Un nuevo ejemplo nos ayudará a familiarizarnos con este nuevo tipo de correspodencias: Consideremos dos conjuntos M y N, el primero es un conjunto de ciudades y el otro, es un conjunto de naciones

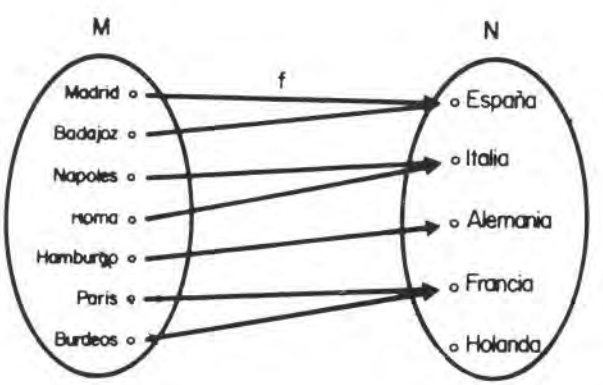
M = {Madrid, Badajoz, Nápoles, Roma, Hamburgo, Paris, Burdeos}

N = {España, Italia, Alemania, Francia, Holanda}

A cada ciudad del conjunto M le hacemos corresponder la nación a la que pertenece que es un elemento de N, como consecuencia podemos escribir las siguientes parejas de elementos, engendradas por esta correspondencia:

(Madrid, España) (Badajoz, España) (Nápoles, Italia) (Roma, Italia) (Hamburgo, Alemania) (París, Francia) (Burdeos, Francia)

o a través de un diagrama sagital:



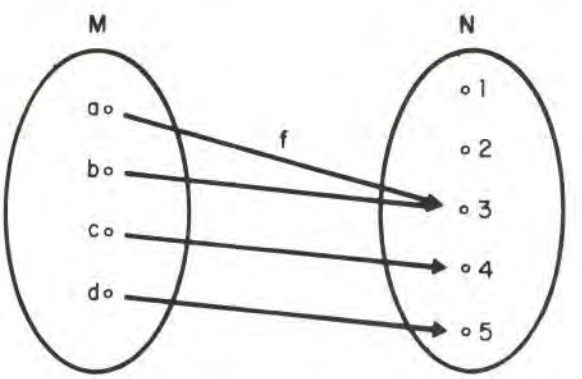
Hemos visto que a cada ciudad le hacemos corresponder una nación, y sólo una, tenemos por lo tanto una aplicación.

Toda aplicación como la anterior, efectúa una selección entre los elementos del conjunto de llegada; hay elementos de este conjunto que son imágenes, o corresponden, por lo menos, a un elemento del conjunto de partida. Estos elementos forman un subconjunto del conjunto de llegada que llamaremos imagen de la aplicación f. Sería el subconjunto:

{España, Italia, Alemania, Francia}

conjunto que no coincide exactamente con el conjunto de llegada, hay un elemento, Holanda, que pertenece a N, y no pertenece a este subconjunto.

Llegado este momento merece la pena detenerse en la perfecta comprensión de estos conceptos y en la simbolización que utilizamos posteriormente. Consideremos los conjuntos M = {a, b, c, d} y N = {1, 2, 3, 4, 5} entre ellos definimos una aplicación f: M → N esquematizada con el siguiente diagrama:



La imagen del elemento c en la aplicación f es el elemento 4, lo podemos expresar

$$f(c) = 4 \quad \text{ó} \quad c \xrightarrow{f} 4$$

se lee: «f de c igual a 4» o «f aplica c en 4»

Nótese que en el conjunto de llegada N hay elementos, como 1 y 2 a los que no llega ninguna flecha. El conjunto de los elementos de N a los que llegan flecha, esto es 3, 4, 5, son todos los elementos que son imagen de uno o varios elementos de M, se llama conjunto imagen de la aplicación f, que escribiremos así:

$$\text{im}(f) = \{3, 4, 5\}$$

En general: Dada una aplicación f: M → N se llama imagen de f y se representa por im (f) al subconjunto de N formado por los elementos que son imagen de, por lo menos, un elemento de M.

De esta misma expresión se desprende que im (f) puede ser todo el conjunto N o una parte propia de él.

Como consecuencia de lo acabado de exponer, conviene decir que para indicar cuando a un elemento, por ejemplo al número 3, de N llegan dos flechas, procedentes de los elementos a y b de M, decimos que el conjunto original del elemento 3 es {a, b}, abreviadamente lo escribimos:

$$\text{or}(3) = \{a, b\}$$

análogamente, para los restantes elementos, es evidente que cuando no llega ninguna flecha lo expresaremos con el conjunto vacio:

$$or\ (1) = \varnothing \qquad or\ (2) = \varnothing \qquad or\ (4) = \{c\} \qquad or\ (5) = \{d\}$$

De una manera general podemos decir: Dada una aplicación f: $M \to N$ para cada elemento $n \in N$ se llama conjunto original de n al subconjunto de M formado por los elementos cuya imagen es n. Lo representamos por or (n).

Si volvemos al ejemplo de los conjuntos de las naciones y de las ciudades, parece evidente el cálculo de los originales:

$$or\ (España) = \{Madrid, Badajoz\}$$

$$or\ (Italia) = \{Nápoles, Roma\}$$

$$or\ (Alemania) = \{Hamburgo\}$$

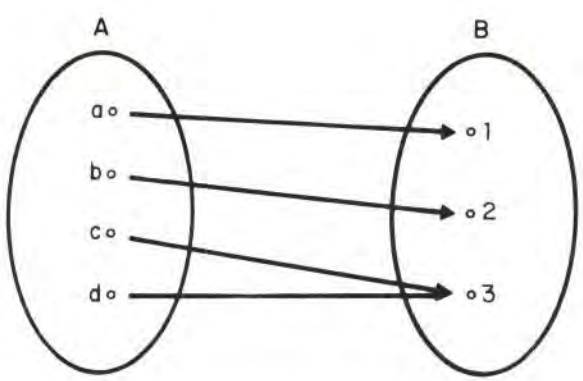
$$or\ (Francia) = \{París, Burdeos\}$$

$$or\ (Holanda) = \varnothing$$

A las aplicaciones también suelen llamarse *correspondencias unívocas* y *funciones uniformes*.

2.1. Aplicaciones suprayectivas

Sean los conjuntos A = {a, b, c, d} y B = {1, 2, 3} definimos una aplicación f: A → B a través del siguiente diagrama:



o si se prefiere, a través de las parejas de elementos:

$$\{(a, 1)\ (b, 2)\ (c, 3)\ (d, 3)\}$$

en esta aplicación, pódemos observar que todos los elementos de B son imagen de algún elemento de A, como consecuencia, la imagen de f, im (f), coincide con el conjunto de llegada B.

Con esta idea podemos definir un nuevo tipo especial de aplicaciones denominada *aplicación suprayectiva*. Una aplicación f: A → B se llama suprayectiva si im (f) = B

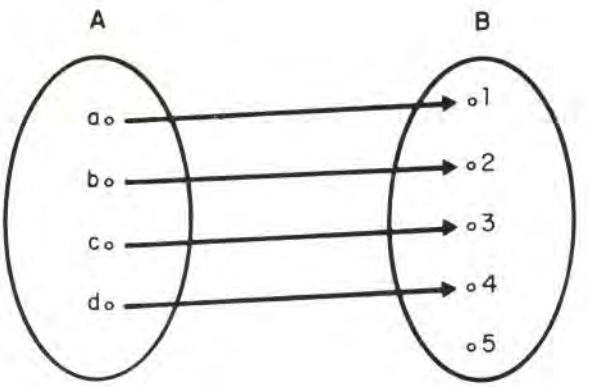
Las aplicaciones suprayectivas se llaman también *suprayecciones*, aplicaciones *sobre* o aplicaciones *exhaustivas*.

2.2. Aplicaciones inyectivas

Consideremos los conjuntos A y B: A = {a, b, c, d} B = {1, 2, 3, 4, 5}, entre ellos definimos una aplicación por medio de los siguientes pares ordenados:

(a, 1) (b, 2) (c, 3) (d, 4)

que representamos con el siguiente diagrama:



Observemos que cada elemento de B tiene por original el conjunto vacío o un conjunto unitario, o de otro modo, no hay dos elementos de A que tengan la misma imagen en B: elementos distintos de A tienen imágenes distintas en B.

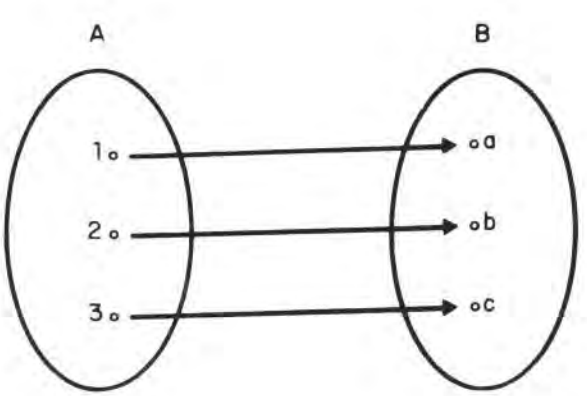
De una manera general: Una aplicación f de E en F es inyectiva si el conjunto original de cada elemento de F es unitario o conjunto vacío. Esto equivale a que si f(x) = f(y) se verifica x = y.

A este tipo de aplicaciones también se les suele llamar inyecciones.

2.3. Aplicaciones biyectivas.

Si analizamos los dos tipos de aplicaciones estudiadas en los párrafos 2.1 y 2.2 podemos llegar a la conclusión de que se han obtenido imponiendo condiciones en el conjunto de llegada, así, cuando se trata de aplicaciones suprayectivas en este conjunto no quedaba ningún elemento libre, mientras que, en el caso de aplicaciones inyectivas nos interesaba que cada elemento del conjunto de llegada fuera imagen de un sólo elemento del conjunto de partida.

Es evidente que estas dos condiciones no son incompatibles entre si, como ponemos de manifiesto en el siguiente ejemplo: Sean A y B los conjuntos: A = {1, 2, 3}, B = {a, b, c} entre ellos definimos la siguiente aplicación: {(1, a), (2, b), (3, c)} que esquematizamos así



Es fácil de ver que verifica las dos características que antes exponíamos, cada elemento de B es imagen de algún elemento de A (no hay en B ningún elemento libre) y además elementos distintos de A tienen imágenes distintas en B.

A las aplicaciones que son a la vez suprayectivas e inyectivas las llamaremos *aplicaciones biyectivas.*

Las aplicaciones biyectivas se llaman también *biyecciones* o *correspondencias biunívocas.*

Si entre dos conjuntos se puede establecer una aplicación biyectiva decimos que los dos conjuntos son *coordinables.*

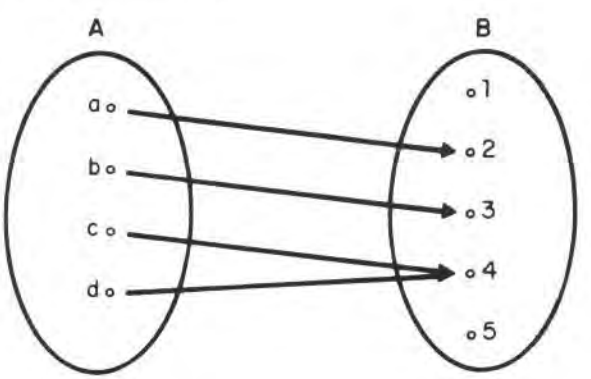
Como consecuencia, podemos afirmar que dado un conjunto arbitrario A, la aplicación i: $A \to A$, tal que para todo $a \in A$ es $i(a) = a$, es decir, la aplicación que asocia a cada elemento *a*, el mismo elemento a, es una aplicación biyectiva, llamada habitualmente *aplicación idéntica* o *identidad* y será analizada en algunos ejemplos después.

2.4. Criterio práctico.

Vamos a expresar de una manera rápida unos criterios para determinar cuando una correspondencia definida entre dos conjuntos A y B es una aplicación y poder clasificarla.

Aplicaciones. Sean A y B dos conjuntos entre los que se ha definido una correspondencia f, diremos que f es una aplicación cuando para cada elemento de A existe una imagen en B.

La representación sagital de una aplicación es:



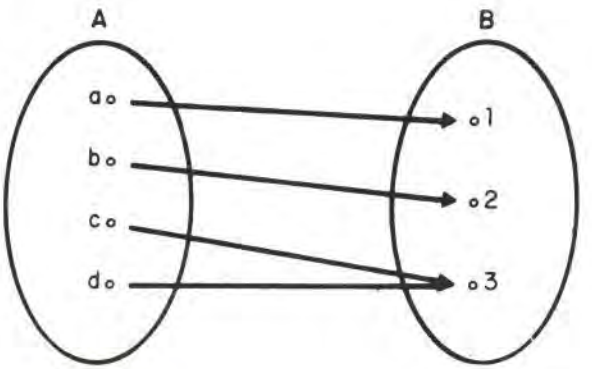
Observemos que de cada uno de los elementos de A sale una flecha, no puede existir ningún elemento de A del que no salga una flecha o salgan dos o más flechas.

Si la aplicación viene expresada por pares ordenados, los elementos que forman las primeras componentes de los mismos, solamente pueden aparecer en una pareja. Así es una aplicación la dada por los siguientes pares: (a, 2), (b, 3), (c, 4) y (d, 4). Y en la primera componente deben figurar todos los elementos de A.

En definitiva, cuando establecemos una aplicación imponemos una condición en el conjunto de partida.

Aplicaciones suprayectivas. Una aplicación entre los conjuntos A y B es una aplicación suprayectiva, cuando todo elemento de B es imagen de algún elemento de A, esto es, no puede quedar ningún elemento en B libre.

Su representación sagital es:

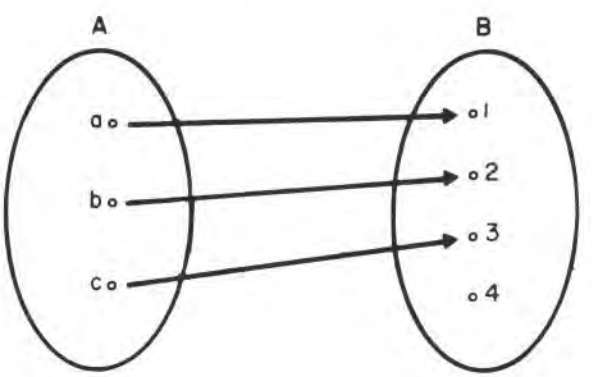


En todos los elementos de B, tiene que terminar, por lo menos, una flecha, aunque puede ocurrir que en algún elemento de B termine más de una flecha.

Expresado este tipo de aplicación en forma de parejas de elementos, una observación conviene tener presente, en la segunda componente han de figurar todos los elementos de B, aunque puede repetirse alguno de estos elementos. En el caso representado antes, tendríamos: (a, 1), (b, 2), (c, 3) y (d, 3).

Aplicaciones inyectivas. Una aplicación entre los conjuntos A y B es una aplicación inyectiva, cuando cada elemento de B es imagen de un elemento de A cuando más, de modo que elementos distintos de A tienen imágenes en B también distintas.

La representación sagital de una aplicación inyectiva es:



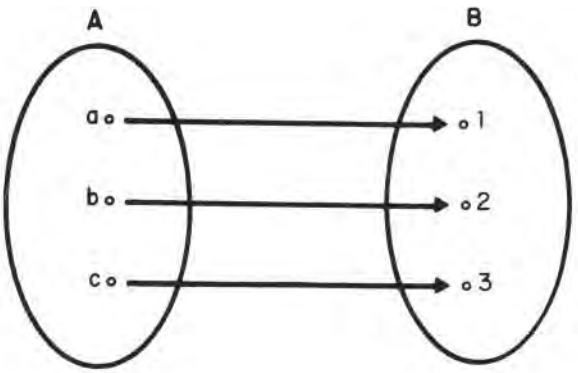
De todos y a cada uno de los elementos de A sale una flecha, a los elementos de B llega una flecha pudiendo existir elementos que no reciban flecha.

Expresándola de otra manera: (a,1) (b,2) (c,3)

Esto es, para distintas primeras componentes de estos pares ordenados, deben aparecer diferentes segundas componentes.

Aplicaciones biyectivas Entre dos conjuntos A y B se ha definido una aplicación biyectiva, cuando es inyectiva y suprayectiva a la vez. Elementos distintos de A tienen que tener imágenes distintas en B, además no puede quedar ningún elemento de B sin que sea imagen de algún elemento de A.

La representación sagital es:



De cada elemento de A parte una flecha y a todos los elementos de B les llega una sola flecha.

Si la expresamos por pares ordenados: (a,1) (b,2) (c,3)

Conviene notar que todas las primeras componentes son distintas, lo mismo ocurre con las segundas componentes de estos pares ordenados.

El siguiente esquema trata de resumir todo lo visto, hasta ahora, en este tema:

Correspondencia { Imponemos / restricción en el / conjunto partida } Aplicaciones { Imponemos / restricción en el / conjunto llegada } { Aplicaciones inyectivas / Aplicaciones suprayectivas / Aplicaciones biyectivas }

Ejercicios y ejemplos

1. Entre los conjuntos N y M se define la siguiente correspondencia: «a cada elemento de N le asociamos la cifra en que termina su cuadrado».

$$N = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,\}$$

$$M = \{0, 1, 4, 5, 6, 9,\}$$

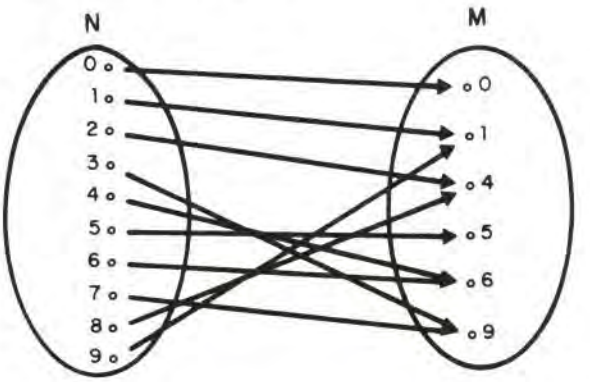
Comprobar que es una aplicación.

Será una aplicación si todos los elementos de N tienen imagen única en M, el procedimiento es sencillo, calculamos el cuadrado de todos los elementos de N y le asociamos su última cifra. Lo esquematizamos así:

$0 \to 0$ $5 \to 5$
$1 \to 1$ $6 \to 6$
$2 \to 4$ $7 \to 9$
$3 \to 9$ $8 \to 4$
$4 \to 6$ $9 \to 1$

Obtendríamos, pues, las siguientes parejas: (0, 0) (1, 1) (2, 4) (3, 9) (4, 6) (5, 5) (6, 6) (7, 9) (8, 4) (9, 1)

Realizando una representación sagital tendríamos:



De cada elemento de N parte una sola flecha, esto es lo mismo que decir que todos sus elementos tienen imagen única. Podemos añadir que es una aplicación suprayectiva, pues no hay ningún elemento de M que no sea imagen de alguno de N.

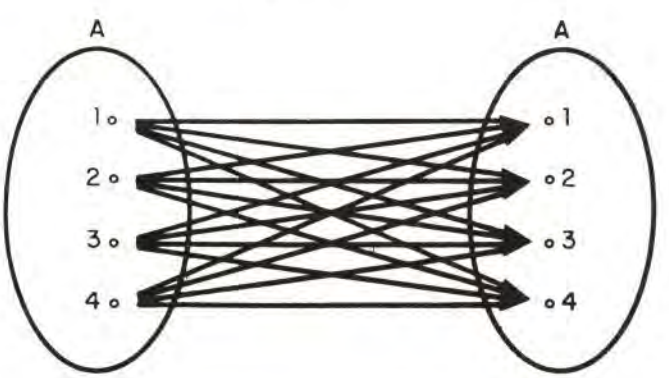
2. Vamos a considerar la correspondencia que asocia a cada persona la casa en que vive, ¿es una aplicación esta correspondencia? Estudiar su correspondencia inversa.

En efecto, es una aplicación pues a cada persona se le puede asociar la casa donde vive, esto es tiene su imagen única.

La correspondencia inversa asociaría al conjunto de todas las casas el de todas las personas, es evidente que esta correspondencia no es una aplicación, puesto que en una misma casa pueden vivir varias personas, cada elemento del conjunto de partida tendría varias imágenes en el conjunto de llegada.

3. Consideramos el conjunto A = {1, 2, 3, 4,} y establezcamos la correspondencia siguiente: «a cada elemento de A le hacemos corresponder todos los elementos de A». ¿Es una aplicación esta correspondencia?

Primero hacemos una representación sagital:



Con sólo observar esta figura podemos decir que no es una aplicación, los elementos de A tienen más de una imagen.

4. En el conjunto P = {1, 2, 3, 4, 5, 6} definimos la siguiente correspondencia: «a cada número impar le hacemos corresponder el número natural siguiente y a cada par el número natural anterior».

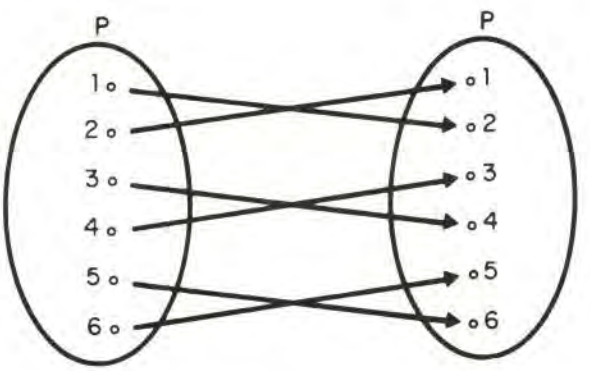
¿Es una aplicación esta correspondencia?

Siguiendo el criterio indicado podemos escribir:

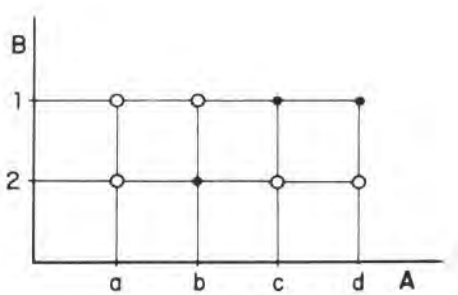
1 le asociamos el 2	4 le asociamos el 3
2 " " " 1	5 " " " 6
3 " " " 4	6 " " " 5

lo que nos daría lugar a las siguientes parejas: (1, 2) (2, 1) (3, 4) (4, 3) (5, 6) (6, 5)

Podemos asegurar que es una aplicación biyectiva, puesto que elementos distintos tienen imágenes distintas y que no hay ningún elemento del conjunto de llegada que no sea imagen de algún elemento del conjunto de partida.



5. ¿Es una aplicación la correspondencia entre A y B expresada por el gráfico?



Para tener una aplicación de A en B es necesario que cada elemento de A tenga una sóla imagen, en este caso observamos que *a* tiene dos imágenes, por lo tanto, no es una aplicación.

6. En un autobús hay 35 asientos libres, al llegar a una parada suben 26 pasajeros, sin que baje nadie. ¿Puede establecerse una aplicación entre el conjunto de pasajeros y el de asientos libres? ¿De qué clase? ¿Y si hubieran subido 40 pasajeros?

En este caso el conjunto de partida es el conjunto de los pasajeros, mientras que el conjunto de llegada es el conjunto de los asientos. Es evidente que podemos establecer una aplicación, no merece discusión que cada pasajero ocupa su asiento, siendo imposible que normalmente, un pasajero ocupe más de un asiento, luego podemos añadir algo más: es una aplicación inyectiva.

Si hubieran subido 40 pasajeros, como solamente tenemos 35 asientos libres, luego quedarían pasajeros sin asientos, o lo que es lo mismo, tendríamos elementos del conjunto de partida que no tienen imagen. En este caso no tenemos una aplicación.

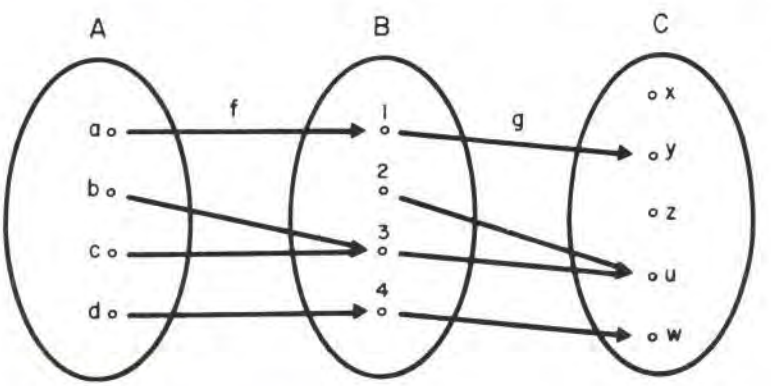
7. Establezcamos una nueva correspondencia entre los conjuntos H = {hijos} y P = {Padres} ; «a cada hijo le hacemos corresponder su padre» ¿Se trata de una aplicación?

Cada hijo tiene su imagen en su padre, luego es una aplicación. Esta aplicación no es inyectiva, pues elementos distintos del conjunto H no tienen imágenes distintas en el conjunto P, basta pensar en dos hijos que además sean hermanos. En cambio, en el segundo conjunto, en el conjunto de los padres, no hay ningún elemento que no sea imagen de algún elemento del primer conjunto, todo padre tiene un hijo por lo menos, es, por lo tanto, una aplicación suprayectiva.

Si consideramos la correspondencia inversa, esto es, hacemos corresponder a cada padre su o sus hijos, no tendríamos una aplicación, porque existen padres con varios hijos, esto es, algún elemento de P tiene varias imágenes en H.

2.5. Composición de aplicaciones.

Consideremos tres conjuntos: A = {a, b, c, d}, B = {1, 2, 3, 4} y C = {x, y, z, u, w}. Entre A y B se define la aplicación f: A → B y la aplicación g entre B y C, g: B → C, representadas en el diagrama siguiente:



Como consecuencia de estas dos aplicaciones, podemos considerar una tercera aplicación, que llamaremos aplicación compuesta de f y g, de manera que el conjunto de partida sea A y el de llegada C.

Veamos como lo podemos hacer: sabemos que:

$$a \xrightarrow{f} 1 \qquad y \qquad 1 \xrightarrow{g} y$$

en la aplicación compuesta de f y g tendremos: a→ y

Análogamente con los restantes elementos podemos resumirlos en el siguiente cuadro

f	g	Aplicación compuesta de f y g
a → 1	1 → y	a → y
b → 3	3 → u	b → u
c → 3	3 → u	c → u
d → 4	4 → w	d → w

BIBLIOTECA PUBLICA PTO. STA. MARIA

Este caso particular se puede generalizar a tres conjuntos cualesquiera E, F y G, entre los que se han definido las aplicaciones f y g:

$$f: E \to F \qquad g: F \to G$$

Se llama aplicación compuesta, de f y g, a la aplicación de E en G, tal que, si la imagen del elemento $x \in E$, en f, es el elemento $y \in F$, y la imagen del elemento $y \in F$ es el elemento $z \in G$, entonces la imagen de x, en la aplicación compuesta de f y g, es z.

Consideremos el siguiente ejemplo: Entre los conjuntos

$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ y $C = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ se definen las siguientes aplicaciones: $f: A \to B$ y $g; B \to C$ dadas, por pares de elementos,

$$f: \{(1, a)\ (2, b)\ (3, c)\ (4, d)\}$$

$$g: \{(a, 5)\ (b, 5)\ (c, 7)\ (d, 8)\}$$

queremos calcular la aplicación compuesta de f y g, que representaremos, de ahora en adelante asi $g * f$.

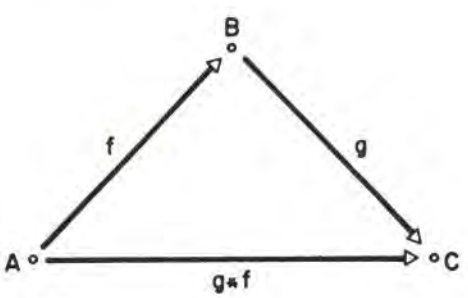
Para más facilidad en el entendimiento lo esquematizamos en un cuadro semejante al utilizado antes.

f	g	g * f
1 → a	a → 5	1 → 5
2 → b	b → 5	2 → 5
3 → c	c → 7	3 → 7
4 → d	d → 8	4 → 8

Si lo queremos expresar por pares ordenados de elementos:

$$g * f: \{(1, 5)\ (2, 5)\ (3, 7)\ (4, 8)\}$$

Muchas veces a la aplicación compuesta se llama también *aplicación producto,* en infinidad de ocasiones esquemáticamente se suele expresar así:



3. FUNCION.

A las correspondencias se les llaman también funciones.

Clásicamente se designa con el nombre de *función* a cualquier correspondencia en la que tanto el conjunto de partida como el de llegada son números. Algunos autores restringen el concepto de función solamente a aquellas correspondencias que son aplicaciones.

Nosotros vamos a adoptar este último criterio, pero antes pensamos que es conveniente hacer un recorrido por distintas ramas de la Ciencia, donde se presenta esta idea de forma muy corriente.

En el lenguaje corriente la idea de función viene asociada a la dependencia de una magnitud variable respecto de otra variable. Por eso muchas veces se dice que la longitud de una circunferencia depende o es función de su radio, que el peso de una persona depende o es función de su altura, que el precio de un billete de ferrocarril depende o es función de la longitud de su recorrido, etc.

En seguida se puede objetar que esta idea de dependencia es bastante convencional, pues si nos referimos a los casos presentados antes; es correcto decir que la longitud de una circunferencia depende del área de su círculo, que el peso de una persona depende de su alimentación, que el precio de un billete de ferrocarril depende de lo confortable del viaje realizado, etc. Por lo tanto, lo interesante de este concepto no es la dependencia entre las variable consideradas, sino la idea de la correspondencia entre las variables que estimemos convenientes.

Insistimos, con algunos ejemplos, en esta idea:

a) En Geografía es normal construir mapas de regiones de la tierra que establecen una correspondencia entre cada punto de la tierra y cada punto del mapa. El mapa es una representación de una correspondencia.

b) En Economía, los precios de un cierto producto en el transcurso de un determinado periodo de tiempo nos dan, también, lugar a una correspondencia.

c) En Medicina, el peso de un niño a lo largo de su primer año de vida nos da una idea de función.

d) En Física, en un movimiento rectilíneo con aceleración constante, existe una correspondencia entre la velocidad y el tiempo.

e) En una ciudad existe una función entre el conjunto de los maridos y sus correspondientes esposas.

El número de ejemplos es muy grande, pero creemos son suficientes para aclarar la idea de función, sin perjuicio, de que en otra parte de este curso volvamos a insistir, podemos concretar diciendo: Cuando tenemos una aplicación entre dos conjuntos de números la llamaremos una función.

Las funciones se suelen expresar a través de expresiones algebraicas así:

$$x \to 2x$$

significa que para los distintos valores que puede tomar la primera variable x obtenemos los valores de la segunda. Esquematizamos algunos valores en el siguiente cuadro:

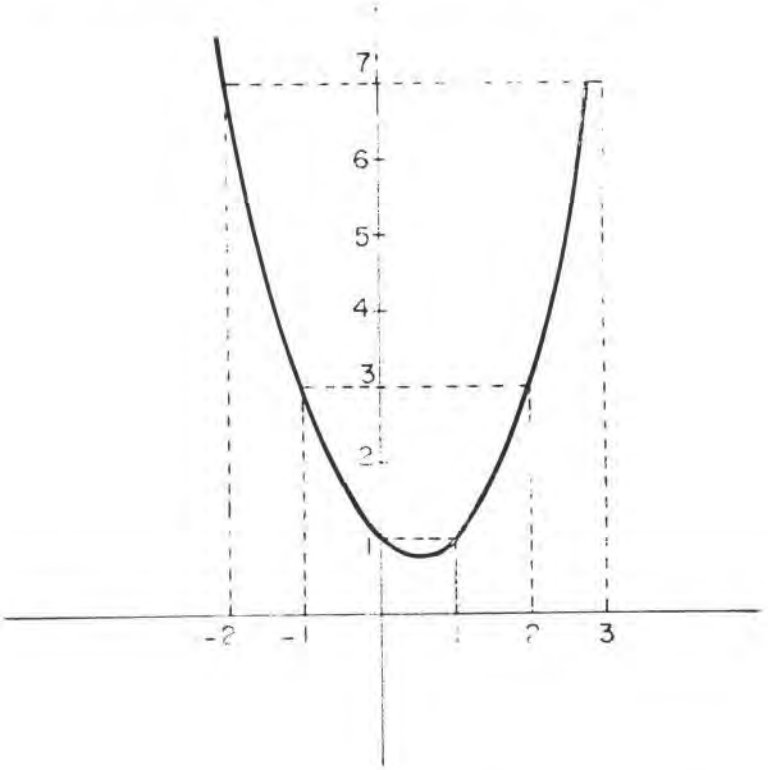
x	2x
0	0
1	2
2	4
—2	—4

de una forma más breve se escribe $y = 2x$, de manera que según los distintos valores que toma x, nos proporciona los valores y.

Otro ejemplo: $y = x^2 - x + 1$ (*)

x	y
0	1
1	1
—1	3
2	3
—2	7
3	7

se puede recurrir a la representación gráfica, recordando lo visto en este tema:

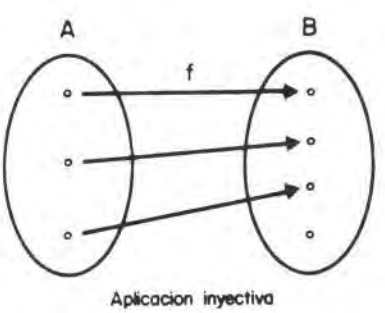


La linea gruesa está formada por todas las parejas de puntos obtenidas realizando las operaciones indicadas en (*)

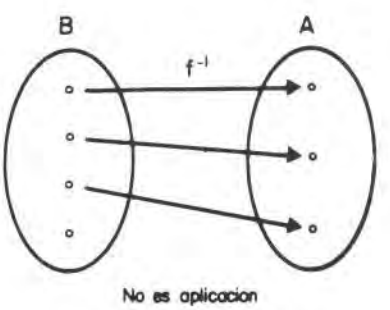
NOTAS ACLARATORIAS Y COMPLEMENTARIAS

• Dada una aplicación f entre los conjuntos A y B: f: A → B, llamaremos aplicación inversa de f, y la representamos así f^{-1}, a la aplicación entre B y A: f^{-1}: B → A. Recordando la definición dada de aplicación, podemos afirmar que no siempre la inversa de una aplicación es otra aplicación.

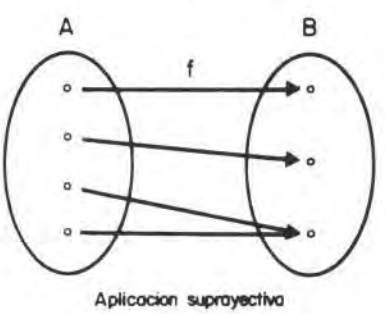
De una manera rápida, podemos decir que dada una aplicación f, su aplicación inversa se obtiene cambiando el orden de los pares ordenados o cambiando el sentido de la flechas si se trata de la representación sagital. Utilizando esta representación vamos a ver tres casos:



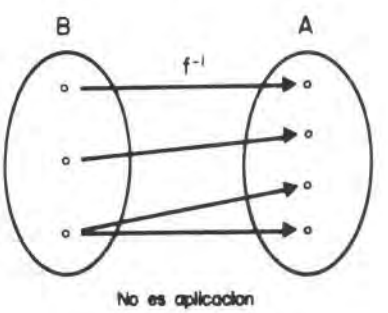
Aplicacion inyectiva



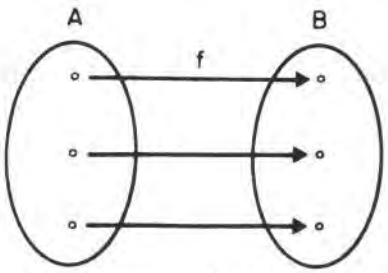
No es aplicacion



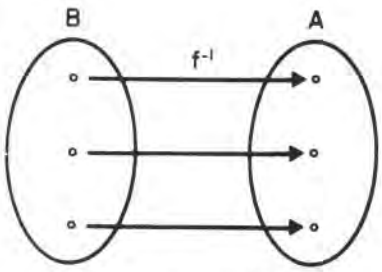
Aplicacion suprayectiva



No es aplicacion



Aplicacion biyectiva



Aplicacion biyectiva

• A lo largo de este tema hemos dicho que a una misma aplicación se la conoce con diversas denominaciones. Tratamos en el siguiente cuadro de recopilar las más usuales.

Aplicaciones pueden ser:	Aplicación inyectiva		Inyección
			Aplicación «en»
	Aplicación suprayectiva		Sobreyección
			Suprayección
			Aplicación «sobre»
			Aplicación exhaustiva
			Aplicación epiyectiva
	Aplicación biyectiva		Biyección
			Biunívoca

• Nos vamos a referir a la *aplicación compuesta*. También tratamos de esquematizar el tipo de aplicación producto, según la clase de aplicación integrante. Sólo presentamos tres casos, pensando en su totalización por parte del alumno.

f	g	g * f
Suprayectiva	Suprayectiva	Suprayectiva
Inyectiva	Inyectiva	Inyectiva
Biyectiva	Biyectiva	Biyectiva

• Conviene insistir en algo tratado en este tema en algunos casos particulares, pero que es totalmente general. Hemos definido las aplicaciones entre dos conjuntos distintos A y B, es totalmente análogo hacerlos con un sólo conjunto, tendríamos una aplicación de A en A, por ejemplo.

• Recordando lo visto en el tema anterior sería correcto decir que cuando se define una aplicación entre dos conjuntos, es equivalente a decir que en el conjunto de partida se ha definido una relación de equivalencia: dos elementos son equivalentes si tienen la misma imagen. Como consecuencia se introduce una clase de equivalencia.

• Una aplicación también se puede definir por comprensión, basta para ello dar una ley que nos permita, conocido un elemento del conjunto inicial, calcular su imagen.

Consideremos un ejemplo: sea la aplicación N → N de manera que a cada elemento del primer conjunto le hacemos corresponder su cuadrado, lo podemos expresar así:

$$x \rightarrow x^2$$

o sea,

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow 1 \\ 2 &\rightarrow 2^2 = 4 \\ 3 &\rightarrow 3^2 = 9 \\ 4 &\rightarrow 4^2 = 16 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

CONCLUSIONES TEMA III

CORRESPONDENCIA ENTRE DOS CONJUNTOS	Es un criterio por medio del cual se relacionan de una forma bien determinada los elementos de un conjunto con los elementos de otro. Pueden expresarse, a través de parejas de elementos, pares ordenados, formados por los elementos que ligan la correspondencia dada, la primera componente de la pareja será del conjunto de partida y la segunda componente es su elemento imagen que es elemento del conjunto de llegada.	
APLICACIONES ENTRE DOS CONJUNTOS	Es una correspondencia que asocia a cada elemento del conjunto de partida un solo elemento del conjunto de llegada. De otra manera, una aplicación es una correspondencia en que la imagen de cada elemento del conjunto de partida es un conjunto unitario.	
TIPOS DE APLICACIONES	SUPRAYECTIVAS	Todos los elementos del segundo conjunto (conjunto de llegada) son imagen de algún elemento del primer conjunto (conjunto de partida).
	INYECTIVAS	No hay dos elementos del primer conjunto que tengan la misma imagen en el segundo. O sea, elementos distintos del conjunto de partida tienen imágenes distintas en el conjunto de llegada.
	BIYECTIVAS	Cada elemento del conjunto de llegada es imagen de algún elemento del conjunto de partida y además elementos distintos del conjunto de partida tienen imágenes distintas en el conjunto de llegada.
COMPOSICION DE APLICACIONES	Dados tres conjuntos E, F y G, y las aplicaciones f y g entre E y F y entre F y G, respectivamente, se llama aplicación compuesta, de f y g a la aplicación de E en G, tal que, si la imagen del elemento $x \in E$, en f, es el elemento $y \in F$, y la imagen del elemento $y \in F$ es el elemento $z \in G$, entonces la imagen de x, en la aplicación compuesta de f y g, es z.	

EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. *Los dos conjuntos* $L = \{a, b, c\}$ *y* $N = \{1, 2, 3\}$ *son coordinables. ¿Cuántas aplicaciones biyectivas podemos encontrar?*

2. *Hallar los números correspondientes a:* $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 3, x_3 = -0{,}5, x_4 = 0$ *en la función* $y = -6x$.

3. *Dado el conjunto* $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, *hagamos corresponder a cada número impar el número natural siguiente, y a cada par el número natural anterior. ¿Es una aplicación esta correspondencia de A en A?*

4. *Dado el conjunto* $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ *se establece la correspondencia siguiente: a cada elemento de B que sea un número par le corresponde el número 6. ¿Es una aplicación?*

5. *Dado el conjunto* $B = \{a, b, c, d\}$. *¿Puede establecerse una aplicación inyectiva de B consigo mismo, que no sea biyectiva?*

6. *Consideremos la correspondencia entre los conjuntos de los números naturales N y N definida por,* $F: x \to x + 5$. *Señalar cuáles de entre los pares ordenados siguientes pertenecen al subconjunto de* $N \times N$ *que la define:*

   (2, 6) (3, 8) (4, 7) (1, 5) (1, 6) (2, 7) (10, 15)

7. *Consideremos el conjunto {Pepe, Francisco, Miguel, Luis, Santiago} y asignemos a cada uno de sus elementos el número de letras que aparecen en su nombre. ¿Cuál es el conjunto de llegada? ¿Es una aplicación esta correspondencia?*

8. *Sea* $A = \{Paco, Juan, Carmen\}$, $B = \{María, Luis\}$. *Seleccionar entre todos los elementos de* $A \times B$, *aquellos que posean un nombre masculino y otro femenino. Este subconjunto ¿define una aplicación de A en B?*

9. *Sea* $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. *Estudiar la aplicación de A en A:*

$$x \to y = x^2 + 2x - 1$$

10. *Establecer entre los conjuntos* $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ *y* $B = \{a, e, i, o, u\}$ *una correspondencia que no sea aplicación. ¿Podríamos establecer una aplicación que no sea ni inyectiva ni suprayectiva?*

11. *Dados los conjuntos* $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *y* $B = \{1, 4, 9, 16, 25, 30\}$. *Entre A y B se define una correspondencia de la siguiente manera:*

$$x \to x^2$$

¿Es una aplicación? En caso afirmativo, ¿de qué tipo?

12. *Se da la correspondencia de* $N \to N$, *siendo N el conjunto de los números naturales, definida por:*

$$x \to 2x + 1$$

¿Es una aplicación? Clasificarla.

13. *Siendo Z el conjunto de los números enteros se define una correspondencia de Z en Z de la siguiente forma:* $x \to 2x$. *¿Es una aplicación? ¿De qué tipo?*

14. *Sean A, B y C tres conjuntos, siendo:* $A = \{2, 4, 6, 7\}$, *f una correspondencia entre A y B definida por* $x \to 2x - 1$, *y g una correspondencia entre B y C, tal que* $x \to x - 1$. *Calcular la imagen de* $g \circ f$.

15. *Sea* $A = \{1, 2, 3, 4\}$ $B = \{a, b, c\}$ $C = \{5, 6, 7\}$

Sea $f = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, a)\}$

Sea $g = \{(a, 5), (b, 6), (c, 7)\}$

a) *¿Son f y g aplicaciones? ¿De qué tipo?*

b) *Calcular la aplicación compuesta* $h = g \circ f$. *¿Qué tipo de aplicación es?*

16. *Dado* $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *y sea* $A \to B \to C$

$f: x \to 2x$ *y* $g: x \to 3x - 1$. *Calcular la imagen de* $g \cdot f$.

17. *Sean f y g aplicaciones* $N \to N \to N$.

Si $f: x \to 2x$ *y* $g: x \to x + 1$.

Calcular $g \circ f$.

18. $Z \xrightarrow{f} Z$.
$x \to x^2 + 1$.

En el conjunto Z de los números enteros se define la correspondencia tal que $x \to x^2 + 1$.

Se pide:

a) ¿Es una aplicación?

b) ¿De qué tipo?

c) Calcular f(3), f(−1) y f(2).

19. *Dados los conjuntos* $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *y* $B = \{a, b, c\}$.

a) Establecer una aplicación que no sea suprayectiva.

b) Establecer una aplicación que sea suprayectiva, pero no inyectiva.

20. *Dados los conjuntos* $A = \{a, b, c\}$ *y B.*

Averiguar:

a) ¿Cuántos elementos ha de tener B para poder establecer una aplicación entre A y B que sea inyectiva?

b) ¿Cuántos para que sea biyectiva?

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. Dos conjuntos son coordinables cuando tienen el mismo número de elementos. Podemos escribir seis aplicaciones biyectivas distintas

$a \to 1$	$a \to 1$	$a \to 2$	$a \to 2$	$a \to 3$	$a \to 3$
$b \to 2$	$b \to 3$	$b \to 1$	$b \to 3$	$b \to 1$	$b \to 2$
$c \to 3$	$c \to 2$	$c \to 3$	$c \to 1$	$c \to 2$	$c \to 1$

2. Tenemos que realizar la operación indicada en la expresión que nos da la función, obteniendo así unos pares ordenados afectados por esta función:

$$x_1 = 1/2, \quad y_1 = -6 \cdot 1/2 = -3$$
$$x_2 = 3, \quad y_2 = -6 \cdot 3 = -18$$
$$x_3 = -0{,}5, \quad y_3 = (-6)(-0{,}5) = 3$$
$$x_4 = 0, \quad y_4 = -6 \cdot 0 = 0$$

Las parejas obtenidas son: $(1/2, -3)$ $(3, -18)$ $(-0{,}5, 3)$ $(0, 0)$

3. Según este criterio tendríamos:

$3 \to 4$
$4 \to 3$
$5 \to 6$
$6 \to 5$
$7 \to 8$
$8 \to 7$
$9 \to 10$

Observese que 10 no es un elemento de A, por lo tanto, esta correspondencia no es una aplicación, porque el 9 no tiene imagen en A.

4. No es una aplicación porque los números impares no tienen imagen. El 5 y el 7 no tienen imagen según el criterio dado.

5. No, porque los elementos del conjunto B deben tener imágenes distintas —para que la aplicación sea inyectiva—, y al ser B un conjunto finito, se agotan las imágenes al mismo tiempo que los elementos del conjunto de partida.

6. Ya sabiamos como funciona este tipo de expresiones para una x determinada obtenemos la imagen realizando la operación indicada. Luego las primeras componentes de las parejas dadas son los distintos valores de x:

x	x + 5
2	7
3	8
4	9
1	6
10	15

Las únicas parejas que pertenecen al subconjunto que definen esta función son:

(2, 7) (3, 8) (1, 6) (10, 15)

7. La correspondencia es:

Pepe ⟶ 4
Francisco ⟶ 9
Miguel ⟶ 6
Luis ⟶ 4
Santiago ⟶ 8

Luego el conjunto de llegada es: {4, 6, 8, 9}

Es una aplicación pues todos los elementos tienen imagen, es además, suprayectiva.

8. Construimos el conjunto producto A x B:

A x B = {(Paco, María) (Paco, Luis) (Juan, María) (Juan, Luis) (Carmen, María) (Carmen, Luis)}

Las parejas que poseen un nombre masculino y otro femenino son:

{(Paco, María) (Juan, María) (Carmen, Luis)}

Si es una aplicación porque todos los elementos de A tienen imagen única en B.

9. Utilizando el mismo procedimiento visto en otros ejercicios:

x	y
—2	—1
—1	—2
0	—1
1	2
2	7

No es una aplicación de A en A pues x = 2 no tienen imagen en A.

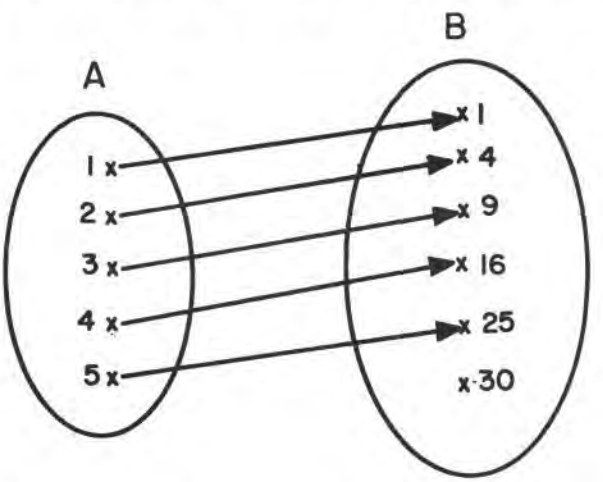
10. La correspondencia 1 → a. No es una aplicación, pues no todos los elementos de A tienen imagen.

Si establecemos la correspondencia:

$$1 \to a \qquad 3 \to a \qquad 5 \to a \qquad 7 \to a \qquad 9 \to a \qquad 11 \to a$$

tenemos una aplicación, pues todo elemento de A tiene una imagen y una sola; no es inyectiva, pues el $a \in B$ tiene más de un original; no es suprayectiva, pues quedan elementos de B sin original.

11. Cuando los conjuntos son finitos lo mejor es representar la correspondencia



a cada elemento le corresponde su cuadrado.

Por tanto, es una aplicación inyectiva; no es suprayectiva, pues el elemento 30 no es imagen de ningún elemento de A.

12

$$N \to N$$
$$x \to 2x + 1$$

Calculemos algunas imágenes:

$$2 \to 5$$
$$3 \to 7$$
$$4 \to 9$$

Por tanto, como a cada número natural le corresponde un solo elemento, se trata de una aplicación.

Es inyectiva, ya que cada elemento tiene un solo origen, es decir,

$$f(x) = f(y)$$
$$2x + 1 = 2y + 1 \Rightarrow x = y$$

No es suprayectiva, ya que las imágenes serán siempre números impares y, en consecuencia, a los pares no les llega ninguna flecha en una representación sagital.

13. $$Z \to Z$$
$$x \to 2x$$

Calculemos algunas imágenes:

$$1 \to 2$$
$$2 \to 4$$
$$3 \to 6$$

Por tanto, es aplicación, pues a cada número entero le corresponde una sola imagen.

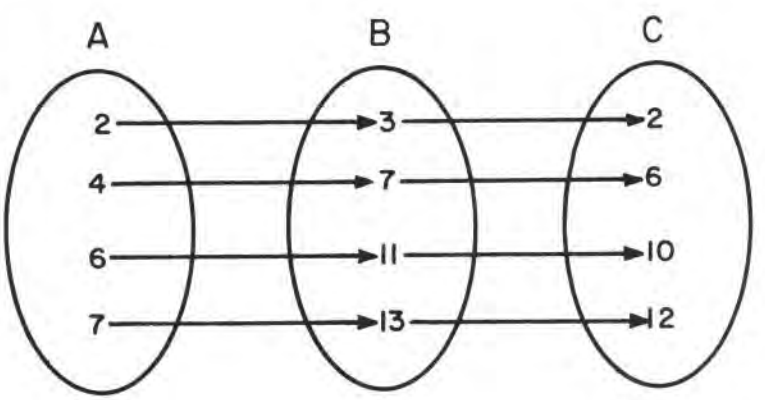
Es inyectiva, ya que cada elemento tiene una sola imagen, es decir:

$$f(x) = f(y)$$

$$2x = 2y \qquad x = y$$

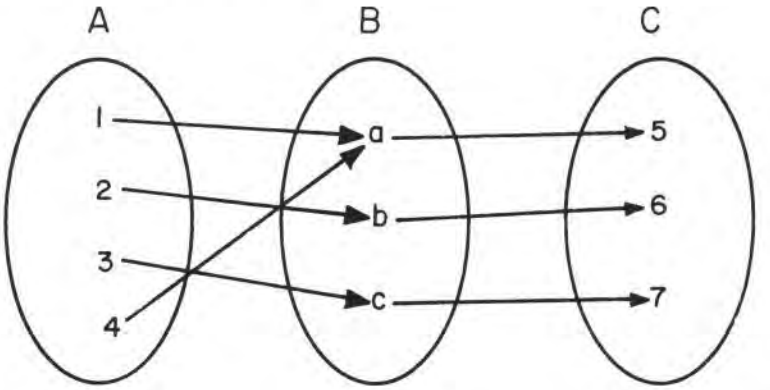
No es suprayectiva, puesto que las imágenes son siempre números pares.

14. Como el conjunto es finito lo representamos



luego, im $(g \cdot f) = \{2, 6, 10, 12\}$

15. Como es finito lo representamos

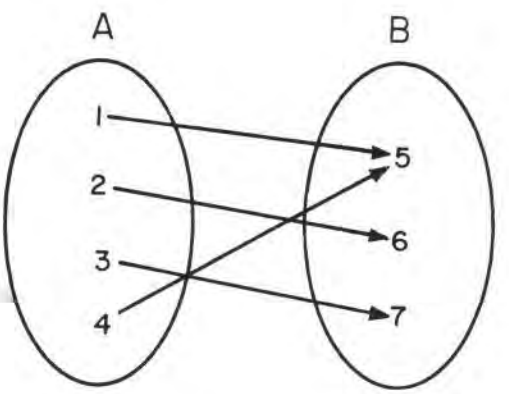


a) f es aplicación suprayectiva, pero no inyectiva, pues

a es imagen de 1 y de 4

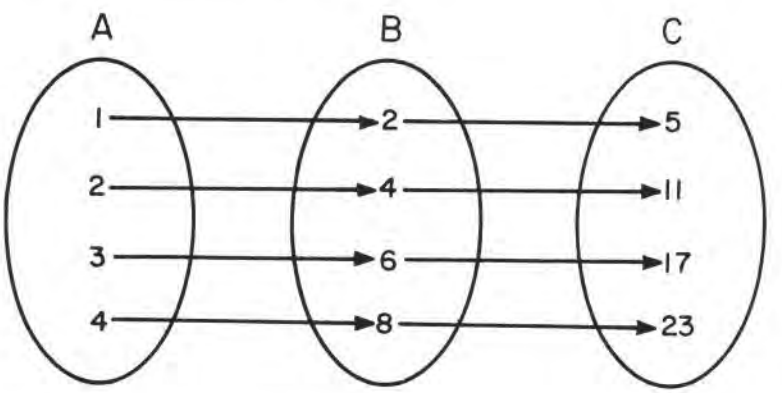
g es aplicación biyectiva

b) $h = g \cdot f = \{(1, 5), (2, 6), (3, 7), (4, 5)\}$



Por tanto, será aplicación suprayectiva.

16. Como es finito lo representamos



luego: im $(g \cdot f) = \{5, 11, 17, 23\}$

17.

$$\begin{array}{ccccc} & & f & & g \\ N & \to & N & \to & N \\ x & \to & 2x & & \\ & & x & \to & x+1 \end{array}$$

$$h = g \circ f\,(x) = g\,(2x)$$

por ser $f\,(x) = 2x$, la aplicación g a cada elemento le suma 1, luego $g\,(2x) = 2x + 1$, por tanto, $g \circ f\,(x) = 2x + 1$.

18.

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ Z & \to & Z \\ x & \to & x^2 + 1 \end{array}$$

Calculemos algunas imágenes:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \to & 2 \\ 2 & \to & 5 \\ 3 & \to & 10 \\ 4 & \to & 17 \end{array}$$

Por tanto, es aplicación, pues a cada número entero le corresponde una sola imagen. Veamos si es inyectiva:

$$f\,(x) = f\,(y)$$

$$x^2 + 1 = y^2 + 1,$$

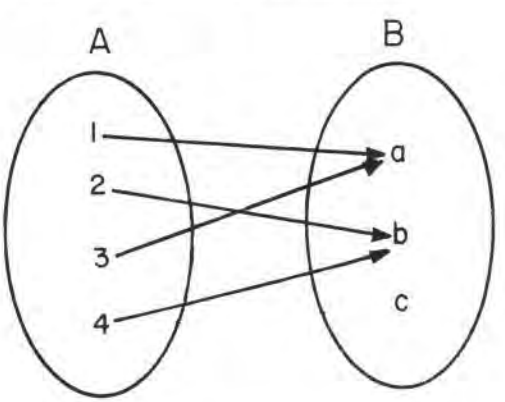
luego $$x^2 = y^2 \not\Rightarrow x = y$$

Efectivamente, la imagen de 2 es 5 y la de -2 es también 5. Por tanto, no es inyectiva.

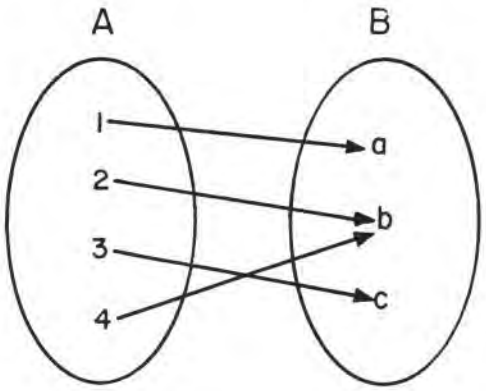
Tampoco será suprayectiva, ya que el 3 no es imagen de ninguno.

$$f\,(3) = 10 \quad f\,(-1) = (-1)^2 + 1 = 2 \quad f\,(2) = 2^2 + 1 = 5$$

19. Como el conjunto es finito lo representaremos

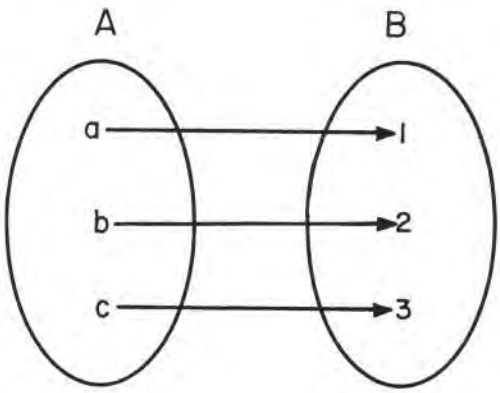


No es suprayectiva, ya que c no es imagen de ninguno.



Es suprayectiva, pues todos los elementos de B son imágenes y no es inyectiva por ser b imagen de 2 y de 4.

20.



a) B puede tener como mínimo 3 elementos, pues ninguno puede ser imagen de más de 1 elemento.

b) Para que sea biyectiva ha de ser inyectiva y suprayectiva, por tanto necesariamente B ha de tener 3 elementos.

TEMA IV

ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

ESQUEMA/RESUMEN

1. Estructuras algebraicas.

2. Ley de composición interna.
   - 2.1. Propiedades de las leyes de composición interna.
     - 2.1.1. Propiedad asociativa.
     - 2.1.2. Propiedad conmutativa.
     - 2.1.3. Elemento neutro.
     - 2.1.4. Elemento simétrico.

3. Semigrupos.

4. Grupos.
   - 4.1. Subgrupos.

5. Notas aclaratorias y complementarias.

INSTRUCCIONES PARA EL ESTUDIO DEL TEMA IV

Con este tema terminamos la primera Unidad Didáctica, probablemente le haya supuesto un esfuerzo grande llegar hasta aquí si no tenía conocimientos previos de Matemáticas modernas, siguiendo la denominación habitual, aunque es inexacta. Si ha llegado despacio y conscientemente a este tema, le podemos adelantar que ha pasado la parte peor de la asignatura, con los conocimientos adquiridos todo será más sencillo.

Ahora nos proponemos que aprenda a realizar una operación muy sencilla: dados dos elementos cualesquiera de un conjunto, asignarle otro elemento que también pertenezca al conjunto. Para establecer esta correspondencia no es necesario, a priori, tener ninguna restricción. Cuando se ha establecido una correspondencia, por medio de la misma a cada pareja de elementos del conjunto le asociamos otro elemento que pertenece al conjunto, se dice que se ha definido sobre este conjunto una ley de composición interna.

Una ley de composición interna puede gozar de unas determinadas propiedades, considerando estas propiedades el conjunto de referencia queda dotado de una determinada estructura algebraica.

En definitiva, una estructura algebraica se consigue cuando se ha definido sobre un conjunto una ley de composición interna. Considerando las propiedades de la ley de composición interna utilizada tendremos diferentes tipos de estructuras algebraicas.

1. ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

Hasta ahora hemos tratado a los conjuntos como simples agrupaciones de elementos, no nos ha preocupado pensar que estos elementos estén dispuestos de alguna manera especial constituyendo alguna organización o estructura. Algo así ocurre con un idioma: el poder hablar una lengua no es sólo conocer una serie de elementos de la misma —palabras—, hay que relacionar o ligar las palabras entre sí de una manera adecuada.

Establecer una *estructura* entre los elementos de un conjunto, no es cosa totalmente nueva, para nosotros. En el tema 2 hemos hablado de diversos procedimientos para relacionar los elementos de un conjunto, concretamente, hemos aprendido a clasificarlos según subconjuntos disjuntos cuando utilizábamos las relaciones de equivalencia y a disponerlos de una cierta manera, de forma que dados dos elementos cualesquiera podíamos considerar uno anterior al otro, para ello empleábamos las relaciones de orden.

Ahora nos interesan otros tipos de estructuras, las llamadas *estructuras algebraicas*, conseguidas como consecuencia de un tipo particular de relaciones definidas entre los elementos de un conjunto.

2. LEY DE COMPOSICION INTERNA

Empecemos, en esta ocasión, por dar una definición: Dado un conjunto A, se llama ley de composición interna en A a una aplicación de $A \times A$ en A, es decir, a toda correspondencia que asocia a cada elemento de $A \times A$ otro elemento de A.

Analicemos este enunciado. Se trata de una aplicación de $A \times A$ en A, esto supone que todas y cada una de las parejas de $A \times A$ tienen que tener una imagen en A, de otra manera, a cada par ordenado de $A \times A$ hemos de asociarle un elemento de A.

Vayamos a un caso concreto: Sea el conjunto $A = \{a, b, c\}$ vamos a definir una ley de composición interna, para ello formamos primero el conjunto $A \times A$.

$$A \times A = \{(a, a)\ (a, b)\ (a, c)\ (b, a)\ (b, b)\ (b, c)\ (c, a)\ (c, b)\ (c, c)\}$$

ahora tenemos que establecer una aplicación de A × A en A, para ello bastará con establecer un criterio cualquiera de forma que adjudique a cada par ordenado de A × A un elemento de A, por ejemplo:

$$\begin{array}{lll} (a, a) \to a & (b, a) \to b & (c, a) \to c \\ (a, b) \to b & (b, b) \to c & (c, b) \to a \\ (a, c) \to c & (b, c) \to a & (c, c) \to b \end{array}$$

podemos comprobar que es una aplicación de A × A en A, pues cada elemento de A × A tiene una imagen que es un elemento de A.

Se acostumbra a expresarlo a través de una tabla de doble entrada:

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

A las líneas horizontales las llamaremos filas y a las líneas verticales columnas. Leeremos primero las filas y luego las columnas, lo haremos de la siguiente manera: «a compuesto con a es a», «a compuesto con b es b», «b compuesto con b es c», «c compuesto con b es a», etc. En ocasiones simbolizaremos la ley de composición interna con un signo, supongamos que la ley anterior la simbolizamos con *, podríamos escribir

$$a * a = a, \quad b * c = a, \text{ etc.}$$

y se lee: «a compuesto con a es igual a a», «b compuesto con c es igual a a», etc.

Todos estamos acostumbrados al significado de expresiones matemáticas como:

$$a + b \quad 3 + 5 \quad 2 \times 6 \quad 7 - 8 \quad \text{etc.}$$

son simbolos empleados para expresar leyes de composición interna.

Cuando una ley de composición interna está bien definida, supone decir que a todas las parejas obtenidas les asociamos un elemento de este conjunto. Esto se suele expresar diciendo que el conjunto es cerrado respecto a esta ley de composición interna.

Una ley de composición interna no siempre se expresa de la manera que acabamos de analizar, puede hacerse, también, por comprensión, esto es, por medio de una expresión matemática se pueden señalar todas las posibilidades de combinación de los elementos de un conjunto. Un ejemplo nos aclarará esta idea: Supongamos que sobre el conjunto de los números enteros definimos una ley de composición interna, expresada así:

$$a * b = a + 2b$$

siendo *a* y *b* dos números enteros cualesquiera; en el caso de que los números sean 2 y 3, el resultado que obtenemos es:

$$2 * 3 = 2 + 2 \cdot 3 = 2 + 6 = 8$$

de una manera más clara, podemos decir que esta ley de composición interna permite asociar a dos elementos cualesquiera del conjunto de los números enteros otro elemento, que también es un número entero, obtenido sumando al primer elemento el doble del segundo. El alumno comprenderá fácilmente que la expresión matemática simplifica enormemente su enunciado.

Todavía ensayamos algunos casos más, con la ley de composición interna anterior, a modo de ejercicio:

$$2 * 4 = 2 + 2.4 = 2 + 8 = 10$$

$$3 * 5 = 3 + 2.5 = 3 + 10 = 13$$

Ejercicios y ejemplos

1. Sea A = {i, j, k} definimos la siguiente ley de composición interna

$\perp$	i	j	k
i	i	k	j
j	j	k	j
k	i	i	k

es efectivamente una ley de composición interna, pues a cualquier pareja de elementos de A × A le corresponde un elemento de A. Basta observar que en el cuadro delimitado a la derecha de la linea vertical gruesa y por debajo de la linea gruesa horizontal aparecen solamente elementos de A.

Si simbolizamos esta ley con $\perp$ se podria escribir como hemos dicho antes:

$$i \perp i = i \quad i \perp j = k \quad i \perp k = j \quad j \perp i = j \quad j \perp j = k \quad \text{etc.}$$

Supongamos en este mismo conjunto A otra ley de composición interna, definida en esta ocasión por la siguiente tabla:

*	i	j	k
i	i	j	k
j	10	k	j
k	i	i	k

Observemos que en este caso no tenemos una ley de composición interna, pues no todos los elementos que aparecen en esta tabla pertenecen a A; $j * i = 10$ y $10 \notin A$.

2. Consideremos el conjunto N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, ...} de los números naturales. La suma es una ley de composición interna, pues a cada par de elementos le asocia otro elemento.

$$(2, 7) \xrightarrow{+} 9$$

$$(3, 5) \xrightarrow{+} 8$$

$$(5, 6) \xrightarrow{+} 11$$

etcétera

que habitualmente se acostumbra a escribir:

$$2 + 7 = 9 \qquad 3 + 5 = 8 \qquad 5 + 6 = 11 \qquad \text{etcétera}$$

Se puede asegurar que es una ley de composición interna, pues a toda pareja de elementos de N × N le asociamos otro elemento de N, por lo tanto, es una aplicación de N × N en N.

La suma en el conjunto N es una ley de composición interna, pero no la podemos expresar en una tabla de doble entrada, como en el caso anterior, porque N es un conjunto de infinitos elementos.

3. Sigamos con el mismo conjunto N de los números naturales.

N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, ...}. El producto de números naturales es una ley de composición interna, en efecto, dada una pareja cualquiera de N × N le podemos asociar otro elemento de N. Veamos algunos casos:

$$(2, 7) \xrightarrow{\times} 14$$

$$(3, 1) \xrightarrow{\times} 3$$

$$(2, 0) \xrightarrow{\times} 0$$

$$(4, 5) \xrightarrow{\times} 20$$

etcétera

utilizando otra manera de expresarla:

$2 \times 7 = 14 \qquad 3 \times 1 = 3 \qquad 2 \times 0 = 0 \qquad 4 \times 5 = 20 \qquad$ etcétera

4. Pensemos, ahora, en la sustracción de números naturales. A la pareja (3, 2) se le asocia 1:

$$(3, 2) \rightarrow 1$$

pero a la pareja (2, 7) no se le puede asociar ningún número natural, puesto que la diferencia de 2 y 7 no es ningún número natural, es un número entero −5. Luego, la sustracción de números naturales no es una aplicación de N × N en N y, como consecuencia, no es una ley de composición interna.

5. En este conjunto de los números naturales definimos una ley de composición interna de la siguiente forma:

$$(a, b) \rightarrow a + b + ab$$

en este caso, para asociar a cada pareja (a, b) $\in$ N $\times$ N su correspondiente imagen en N, tenemos que realizar la operación indicada. Vamos a realizar algunas parejas:

$$(2, 1) \to 2 + 1 + 2 \cdot 1 = 5 \text{ luego } (2, 1) \to 5$$
$$(3, 2) \to 3 + 2 + 3 \cdot 2 = 11 \quad " \quad (3, 2) \to 11$$
$$(3, 5) \to 3 + 5 + 3 \cdot 5 = 23 \quad " \quad (3, 5) \to 23$$
$$(2, 3) \to 2 + 3 + 2 \cdot 3 = 11 \quad " \quad (2, 3) \to 11$$

Es fácil comprender que hemos establecido una correspondencia entre N $\times$ N y N que es una aplicación, todos los elementos de N $\times$ N tienen imagen en N, por tanto, es una ley de composición interna.

6. La potenciación de números naturales es una ley de composición interna que podemos expresar así:

$$(a, b) \to a^b$$

de manera que a cada elemento de N $\times$ N le hemos asociado un elemento de N, no quedando ningún elemento de N $\times$ N sin imagen en N.

$$(2, 3) \to 2^3 = 8$$
$$(3, 2) \to 3^2 = 9$$
$$(7, 2) \to 7^2 = 49$$
$$(3, 1) \to 3^1 = 3$$

etcétera.

2.1. Propiedades de las leyes de composición interna.

Vamos a analizar algunas propiedades de las leyes de composición interna, que luego utilizaremos para introducir diversas estructuras algebraicas en los conjuntos. Hay que tener presente la posibilidad de la existencia de una ley de composición interna perfectamente definida sin que verifique ninguna de estas propiedades o que cumpla alguna.

2.1.1. Propiedad asociativa

Una ley de composición interna $*$ definida sobre un conjunto *A* es asociativa, si para tres elementos cualesquiera de *A* se verifica:

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

siendo *a, b, c* tres elementos pertenecientes al conjunto A.

La suma de números naturales es asociativa si *a, b, c* son tres números naturales, siempre se verifica:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

comprobaremos para un caso particular:

$$(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4) \begin{cases} (2 + 3) + 4 = 5 + 4 = 9 \\ 2 + (3 + 4) = 2 + 7 = 9 \end{cases}$$

luego verifica la propiedad asociativa.

Sea, ahora la ley de composición definida sobre el conjunto de los números enteros:

$$a * b = a + b + 2\,a\,b$$

Vamos a comprobar que verifica la propiedad asociativa, es decir, se tiene que cumplir:

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

siendo *a*, *b* y *c* números enteros.

Consideremos el primer miembro:

$$(a * b) * c = (a + b + 2ab) * c = a + b + 2ab + c + 2\,(a + b + 2ab)\,c = \\ = a + b + 2ab + 2ac + 2bc + 4abc + c$$

Consideremos el segundo miembro:

$$a * (b * c) = a * (b + c + 2bc) = a + b + c + 2bc + 2a\,(b + c + 2bc) = \\ = a + b + c + 2bc + 2ab + 2ac + 4abc$$

como el resultado obtenido en el primero y segundo miembros coincide, se verifica la propiedad asociativa.

Por último, sea la ley de composición interna definida en el conjunto de los números enteros siguiente:

$$a \perp b = a + 2b$$

intentamos averiguar si cumple la propiedad asociativa:

$$(a \perp b) \perp c = a \perp (b \perp c)$$

siendo *a*, *b* y *c* números enteros.

Procedemos de la misma manera que en el ejemplo anterior.

Primer miembro:

$$(a \perp b) \perp c = (a + 2b) \perp c = a + 2b + 2c$$

Segundo miembro:

$$a \perp (b \perp c) = a \perp (b + 2c) = a + 2b + 4c$$

como ambos resultados no coinciden no es asociativa.

2.1.2. Propiedad conmutativa.

En el conjunto A, diremos que la ley de composición interna * es conmutativa, si verifica:

$$a * b = b * a$$

cualesquiera que sean los elementos a y b pertenecientes al conjunto A.

Asi el producto de números naturales es una ley de composición interna que goza de esta propiedad, si a y b son dos números naturales cualesquiera

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Exactamente lo mismo ocurre con la suma de números naturales

$$a + b = b + a$$

En cambio, no es conmutativa la ley de composición interna definida en el conjunto de los números enteros, Z, siguiente:

$$a \perp b = 2a + b - 1$$

siendo a, b dos números naturales cualesquiera:

$$a \perp b \neq b \perp a \begin{cases} a \perp b = 2a + b - 1 \\ b \perp a = 2b + a - 1 \end{cases}$$

Si esta ley la aplicamos a los números 2 y 3, se entiende de forma más clara que no goza de esta propiedad:

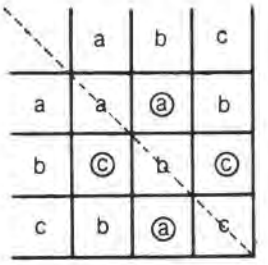
$$2 \perp 3 \neq 3 \perp 2 \begin{cases} 2 \perp 3 = 2 \cdot 2 + 3 - 1 = 6 \\ 3 \perp 2 = 2 \cdot 3 + 2 - 1 = 7 \end{cases}$$

Si una ley de composición interna definida sobre un conjunto finito la expresamos con una tabla de doble entrada es muy fácil averiguar si esta ley es conmutativa con la simple observación de la tabla. Pensemos en el conjunto C = {a, b, c} sobre el que se ha definido una ley de composición interna de acuerdo con la siguiente tabla:

	a	b	c
a	a	c	b
b	c	b	a
c	b	a	c

Se puede asegurar que esta ley es conmutativa porque es simétrica, los elementos que aparecen por encima de la línea de puntos son los mismos y están escritos en el mismo orden que los que aparecen debajo.

Si la ley hubiera sido



	a	b	c
a	a	ⓐ	b
b	ⓒ	b	ⓒ
c	b	ⓐ	c

no sería conmutativa aunque los elementos que están por encima de la linea de puntos son los mismos que están por debajo, pero están en distinto orden; obsérvese los elementos señalados con un circulo.

2.1.3. Elemento neutro.

Dado un conjunto A en el que se ha definido una ley de composición interna $*$ diremos que $e \in A$ es un elemento neutro de A, si se verifica

$$e * a = a * e = a$$

cualquiera que sea el elemento a perteneciente a A.

No todas las leyes de composición interna tienen elemento neutro, pero si existe, es único.

Habiamos quedado que la suma de números naturales es una ley de composición interna, su elemento neutro es el 0, es evidente que para cualquier número natural

$$a + 0 = 0 + a = a$$

En el producto de números naturales, también tenemos elemento neutro, es el número 1, resulta claro que al multiplicar cualquier número por 1 se repite este número:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

Supongamos que en el conjunto de los números enteros definimos la siguiente ley de composición interna:

$$a \perp b = a + b - ab$$

¿Cuál sería el elemento neutro?

Se tiene que verificar $a \perp e = a$ siendo e el elemento neutro:

$$a + e - ae = a$$

de acuerdo con la definición de esta ley. La expresión anterior nos permite determinar el elemento neutro despejando e

$$e - ae = 0 \qquad e(1 - a) = 0 \qquad e = 0$$

Comprobamos que efectivamente es el elemento neutro:

$$a \perp 0 = a + 0 - a \cdot 0 = a$$

Cuando la ley está definida a través de una tabla, se puede obtener fácilmente el elemento neutro, averiguando la fila y la columna que repite la fila y columna enunciada (por debajo y por la derecha de la línea gruesa), respectivamente. Veamos cómo lo hacemos en el conjunto A = {0, 1, 2, 3, 4} cuya ley de composición interna está dada por

*	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

→ fila que repite la «fila enunciado»

↑ columna que repite la «columna enunciado»

Hay que tener presente que en esta repetición han de figurar los elementos en el mismo orden que en la «fila enunciado» y en la «columna enunciado». El número que encabeza la fila o la columna repetida es el elemento neutro.

En nuestro caso el elemento neutro es el 0:

$$1 * 0 = 1 \qquad 2 * 0 = 2 \qquad 0 * 2 = 2 \qquad 4 * 0 = 4 \qquad \text{etcétera}$$

2.1.4. Elemento simétrico.

Dado un conjunto A y una ley de composición interna $*$, entre sus elementos, diremos que un elemento a de A posee elemento simétrico a', cuando

$$a * a' = a' * a = e$$

siendo $a' \in A$ y e el elemento neutro de la ley $*$ en A.

Si consideramos el conjunto C = {−1, −2, 0, 1, 2}, su elemento neutro es el número 0, si consideramos como ley de composición interna la suma, puesto que:

$$-1 + 0 = -1, \qquad -2 + 0 = -2, \qquad 1 + 0 = 1, \qquad \text{etcétera}$$

¿Cual es el elemento simétrico del número 1? Tenemos que buscar un número que sumado a 1 nos dé el elemento neutro, 0.

$$1 + (-1) = 0$$

Análogamente el elemento simétrico de 2 es el −2 : 2 + (−2) = 0. De acuerdo con la definición el elemento simétrico de −1 es 1 y el de −2 es 2.

BIBLIOTECA PUBLICA PTO. STA. MARIA

Veamos un caso en el que la ley de composición interna venga dada por una tabla: Sea el conjunto $M = \{1, 2, 3, 4\}$.

*	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	3	4	1
3	3	4	1	2
4	4	1	2	3

Averiguamos, en primer lugar, el elemento neutro de esta ley de composición interna, siguiendo el procedimiento presentado en el apartado 2.1.3. El elemento neutro es 1.

Para buscar los elementos simétricos, tenemos que averiguar dos elementos que combinados, según la ley de composición interna, reproduzcan el elemento neutro. Así, obtenemos:

$$2 * 4 = 1 \qquad 3 * 3 = 1 \qquad 4 * 2 = 1$$

esto supone decir que el simétrico de 2 es el número 4, y el simétrico de 4 es el número 2, etc. Resultado obtenido observando la tabla que nos da la ley de composición interna. Así se puede decir cuando una ley está dada por una tabla, para que todos los elementos del conjunto tengan simétrico es necesario que aparezca el elemento neutro en cada linea.

Ejercicios y ejemplos.

1. Definimos en el conjunto N de los números naturales la ley de composición interna siguiente:

$$a * b = 2a + b$$

¿Tiene las propiedades conmutativa y asociativa?

- Propiedad conmutativa. $a * b = b * a$.

$$\left.\begin{array}{l} a * b = 2a + b \\ b * a = 2b + a \end{array}\right\} \text{ luego } a * b \neq b * a$$

No goza de la propiedad conmutativa.

- Propiedad asociativa. $(a * b) * c = a * (b * c)$.

$$(a * b) * c = (2a + b) * c = 2(2a + b) + c = 4a + 2b + c$$
$$a * (b * c) = a * (2b + c) = 2a + 2b + c$$

luego: $(a * b) * c \neq a * (b * c)$.

No tiene la propiedad asociativa.

2. En el mismo conjunto de los números naturales, definimos como ley de composición interna la potenciación, que podemos expresar así:

$$a \perp b = a^b$$

¿De qué propiedades goza esta ley?

- Conmutativa. $a \perp b = b \perp a$.

Vamos a comprobarla.

$$\left.\begin{array}{l} a \perp b = a^b \\ b \perp a = b^a \end{array}\right\} \text{ luego } a \perp b \neq b \perp a, \text{ en general}$$

Si tomamos dos números cualesquiera el 3 y el 4, por ejemplo, resulta evidente que son distintos 3^4 y 4^3.

No goza de la propiedad conmutativa.

- Asociativa. $(a \perp b) \perp c = a \perp (b \perp c)$.

$$\left.\begin{array}{l} (a \perp b) \perp c = a^b \perp c = (a^b)^c = a^{bc} \\ a \perp (b \perp c) = a \perp b^c = (a)^{b^c} = a^{b^c} \end{array}\right\} \text{ luego } (a \perp b) \perp c \neq a \perp (b \perp c)$$

Tampoco verifica la propiedad asociativa.

- Elemento neutro. Si e es el elemento neutro, tiene que verificarse $a \perp e = a$ luego: $a^e = a$ para que esto ocurra es necesario que $e = 1$, esto es, $a^1 = a$, es claro que, $2^1 = 2$, $3^1 = 3$, $42^1 = 42$, etcétera.

- Elemento simétrico. Dado un elemento cualquiera a, si su simétrico es a', ha de verificarse $a \perp a' = 1$ luego $a^{a'} = 1$, para que se verifique esta igualdad basta que $a' = 0$, pero entonces tenemos una solución un tanto curiosa, puesto que cualquiera que sea a tendrá el mismo simétrico, en contradicción con la definición dada de elemento simétrico.

3. En el conjunto de los números enteros Z (*):

$$a \perp b = a + 2ab + b$$

¿Qué propiedades tiene?

- Conmutativa. $a \perp b = b \perp a$.

$$\left.\begin{array}{l} a \perp b = a + 2ab + b \\ b \perp a = b + 2ba + a \end{array}\right\} \text{ luego } a \perp b = b \perp a$$

Verifica la propiedad conmutativa.

(*) Entendemos, como conjunto de los números enteros, al formado por el 0, los números positivos y los números negativos: Z = ... –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, ... Es, por lo tanto, un conjunto de infinitos elementos

- Asociativa. $(a \perp b) \perp c = a \perp (b \perp c)$.

$(a \perp b) \perp c = (a + 2ab + b) \perp c = a + 2ab + b + 2(a + 2ab + b)c + c = a + 2ab + 4abc + 2ac + b + 2bc + c$

$a \perp (b \perp c) = a \perp (b + 2bc + c) = a + 2a(b + 2bc + c) + b + 2bc + c = a + 2ab + 4abc + 2ac + b + 2bc + c$

luego: $(a \perp b) \perp c = a \perp (b \perp c)$.

Goza de la propiedad asociativa.

- Elemento neutro. Llamamos e al elemento neutro, se tiene que verificar

$$a \perp e = e \perp a = a$$

Vamos a tomar una sólo $a \perp e$ porque esta ley de composición interna goza de la propiedad conmutativa:

$$a \perp e = a + 2ae + e = a$$

$$2ae + e = 0 \qquad e(2a + 1) = 0 \qquad e = 0$$

Tiene un único elemento neutro que es el 0.

- Elemento simétrico. Dado un elemento $a \in Z$ tenemos que buscar otro elemento $a' \in Z$ que llamaremos simétrico de a, veamos cómo le podemos calcular a partir de $a \perp a' = 0$.

$$a \perp a' = a + 2aa' + a' = 0$$

nos interesa averiguar a':

$$a'(2a + 1) = -a, \quad a' = \frac{-a}{2a + 1}$$

Hemos llegado a la siguiente conclusión: dado un elemento a, su simétrico es a' obtenido así $\frac{-a}{2a + 1}$ Nótese que, en general, no es un elemento de Z, si, por ejemplo, $a = 2$ su simétrico según este criterio es $\frac{-2}{2 \cdot 2 + 1} = \frac{-2}{5}$ que no es un número entero, sino un número racional (*)

Por lo tanto, en general, los elementos de este conjunto no tienen elemento simétrico para esta ley.

4. La siguiente tabla define una ley de composición interna en el conjunto $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

---

* Llamaremos número racional a los constituidos por una pareja de números llamados numerador y denominador. Al conjunto de todos los números racionales lo representaremos por Q.

T	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	2	2
5	0	5	4	3	2	1

¿Qué propiedades tiene esta ley?

Utilizando los procedimientos expuestos anteriormente, podemos concluir de que goza de las propiedades conmutativa y asociativa.

El elemento neutro es el número 1: 2 T 1 = 2 3 T 1 = 3 etc.

No tiene elemento simétrico.

3. SEMIGRUPOS

Ya estamos en condiciones de definir la primera estructura algebraica. Si en un conjunto A, no vacío, está definida una ley de composición interna $*$, diremos que el conjunto A tiene estructura de *semigrupo* respecto de la ley de composición interna $*$, si esta ley goza de la propiedad asociativa, más brevemente se suele decir que $(A, *)$ es un *semigrupo*.

Si $(A, *)$ es un semigrupo y la ley de composición interna $*$ posee además la propiedad conmutativa, el semigrupo se llama *conmutativo* o *semigrupo abeliano*.

Si además la ley de composición interna $*$ definida sobre A tiene elemento neutro diremos que $(A, *)$ es un *semigrupo con elemento neutro*, si además la ley de composición interna es conmutativa, tenemos un *semigrupo conmutativo con elemento neutro*.

Esquematizamos estas situaciones así:

A: Conjunto no vacío
*: ley de composición interna
*: es Asociativa
→ *semigrupo*
*: Es conmutativa
→ *semigrupo abeliano*
*: tiene elemento neutro
→ *semigrupo abeliano con elemento neutro*

A: conjunto no vacío
*: ley de composición interna
*: es Asociativa
→ *semigrupo*
*: tiene elemento neutro
→ *semigrupo con elemento neutro*

Pongamos algunos ejemplos:

Hemos tratado en algunas ocasiones del conjunto de los números naturales N. Sabíamos que la suma era una ley de composición interna que goza de las propiedades siguientes: asociativa, conmutativa y elemento neutro, luego (N, +) es un semigrupo conmutativo con elemento neutro.

Sea Z el conjunto de los números enteros, consideremos Z y la ley de composición interna suma, +, podemos asegurar que (Z, +) es un semigrupo abeliano con elemento neutro. En efecto, la suma de números enteros es conmutativa, asociativa y posee elemento neutro:

Conmutativa: $a + b = b + a$ siendo a y b elementos de Z.

Asociativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$ siendo a, b, c elementos de Z.

Elemento neutro: es el número 0 $a + 0 = a$ además el cero es un elemento de Z.

4. GRUPOS

Dado un conjunto A no vacío, en el que se ha definido una ley de composición interna $*$, que goza de las propiedades asociativa, elemento neutro y tal que todos los elementos de A poseen elemento simétrico, diremos que A posee estructura de grupo respecto $*$. De otra manera (A, $*$) es un *grupo*.

Un grupo (A, $*$) es conmutativo o abeliano si la ley de composición interna $*$ posee la propiedad conmutativa.

Esto es:

A: un conjunto no vacío
$*$: ley de composición interna
$*$: es asociativa
$*$: tiene elemento neutro
$*$: existe elemento simétrico

} *GRUPO*

$*$: es conmutativa

} *Grupo abeliano*

Recordando la estructura de semigrupo, podemos escribir:

(A, $*$) Semigrupo con elemento neutro
$*$: Existe elemento simétrico

} *GRUPO*

(A, $*$) Semigrupo abeliano con elemento neutro
$*$: Existe elemento simétrico

} *Grupo abeliano*

Conviene advertir que cuando hablamos de la existencia de elemento simétrico, referido a la estructura de grupo, queremos decir que todos los elementos del conjunto A tienen que tener elemento simétrico respecto a la ley de composición interna $*$.

Consideremos el conjunto de los números enteros con la ley de composición interna la suma. Podemos asegurar que (Z, +) es un grupo. En el párrafo anterior habíamos comprobado que (Z, +) tenía estructura de

semigrupo abeliano con elemento neutro, por lo tanto, basta con averiguar que todos los elementos de Z tienen elemento simétrico, cosa que así ocurre: el simétrico de 1 es −1, de 2 es −2, de 3 es −3, etc., siendo

$$1 + (-1) = 0, \quad 2 + (-2) = 0, \quad 3 + (-3) = 0, \quad \text{etc.}$$

0 es el elemento neutro.

4.1. Subgrupos.

Dado un grupo $(A, *)$, si B es un subconjunto, no vacío, de A, $B \subset A$, que tiene estructura de grupo respecto a la misma ley de composición interna $*$, que A, podemos decir que $(B, *)$ es un subgrupo de $(A, *)$.

Sea Z el conjunto de los números enteros:

$$Z = \{\ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

acabamos de ver que $(Z, +)$ es un grupo abeliano.

Consideremos el subconjunto de Z formado por todos los números pares:

$$B = \{\ldots -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$$

Es evidente que $(B, +)$ es un grupo abeliano, esto es, tiene estructura de grupo B respecto a la misma ley de composición interna +, luego $(B, +)$ es un subgrupo de $(Z, +)$.

Ejercicios y ejemplos.

1. En el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ definimos la ley de composición interna mediante la tabla siguiente.

T	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	3	4	5	6	1
3	3	4	5	6	1	2
4	4	5	6	1	2	3
5	5	6	1	2	3	4
6	6	1	2	3	4	5

¿(A, T) tiene estructura de grupo abeliano?

(A, T) tiene estructura de grupo abeliano, porque la ley de composición interna T es:

- Asociativa: La comprobamos para un caso particular:

$$(3\ T\ 4)\ T\ 5 = 3\ T\ (4\ T\ 5)$$

$$\left.\begin{array}{l}(3\ T\ 4)\ T\ 5 = 6\ T\ 5 = 4\\ 3\ T\ (4\ T\ 5) = 3\ T\ 2 = 4\end{array}\right\} \text{luego es asociativa}$$

- Conmutativa: Por estar dispuestos los elementos de la tabla simétricamente respecto de los de la diagonal principal de la misma.

- Existe elemento neutro, es el número uno.

- Existe elemento simétrico:

Elemento	Elemento simétrico
1	1
2	6
3	5
4	4
5	3
6	2

Aprovechemos la ocasión para indicar un criterio rápido con el fin de determinar la existencia de elemento simétrico para todos los elementos de un conjunto sobre el que se ha definido una ley de composición por medio de una tabla. Basta observar que el elemento neutro figure en todas las líneas de la tabla.

2. Dado el grupo (A, $*$) donde $*$ está dado por la siguiente tabla:

$*$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

Hallar un subgrupo de A.

Tenemos que buscar un subconjunto de A, que puede ser:

B = {1, 4} construimos su tabla de grupo según la ley de composición $*$:

$*$	1	4
1	1	4
4	4	1

esta tabla está contenida en la anterior y B es grupo respecto de $*$, por lo tanto, (B, $*$) es un subgrupo de (A, $*$).

NOTAS ACLARATORIAS Y COMPLEMENTARIAS

• Sobre un mismo conjunto se puede definir más de una ley de composición interna, como hemos podido observar en numerosos ejemplos, como consecuencia, un mismo conjunto puede tener distinta estructura algebraica según la ley de composición interna definida.

La propiedad distributiva trata de relacionar dos leyes definidas sobre un mismo conjunto y se puede enunciar así:

Si sobre un conjunto A se han definido dos leyes de composición interna, $*$ y $\perp$, diremos que $*$ es distributiva respecto a $\perp$, si se verifica:

$$a * (b \perp c) = (a * b) \perp (a * c)$$

siendo a, b, c elementos de A.

Análogamente se puede escribir:

$$(a \perp b) * c = (a * c) \perp (b * c)$$

• Hemos dejado para el final el considerar un caso especial, ya visto en el tema 1, pero le daremos un enfoque nuevo: Consideremos el conjunto R = {a, b, c} vamos a formar el conjunto de las partes de R.

$$P(R) = \{\{a, b, c\}\ \{a, b\}\ \{a, c\}\ \{b, c\}\ \{a\}\ \{b\}\ \{c\}\ \emptyset\}$$

Entre los elementos de este conjunto vamos a definir una ley de composición interna: la unión de conjuntos. Es una auténtica ley de composición interna, dados dos elementos de P (R) podemos asociarle otro elemento de P(R)

$\{a, b, c\} \cup \{a, b, c\} = \{a, b, c\}$
$\{a, b, c\} \cup \{a, b\} = \{a, b, c\}$
$\{a, b, c\} \cup \{b, c\} = \{a, b, c\}$
$\{a, b, \} \cup \{a, c\} = \{a, b, c\}$
$\{a, b\} \cup \{b, c\} = \{a, b, c\}$
$\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$
$\{a\} \cup \varnothing = \{a\}$
$\{a, c\} \cup \varnothing = \{a, c\}$, etc.

Algo análogo ocurre con la intersección de conjuntos, define una ley de composición interna en P(R).

$\{a, b, c\} \cap \{a, b, c\} = \{a, b, c\}$
$\{a, b, c\} \cap \{a, b\} = \{a, b\}$
$\{a\} \cap \{a, b, c\} = \{a\}$
$\{a, b\} \cap \{a, c\} = \{a\}$
$\{a, b, c\} \cap \{a, c\} = \{a, c\}$ etc.

• A las leyes de composición interna se las llama también operaciones, nombre mucho más familiar para el alumno; nosotros utilizaremos indistintamente ambas denominaciones.

CONCLUSIONES TEMA IV

LEY DE COMPOSICION INTERNA		Dado un conjunto A se llama ley de composición interna en A a una aplicación de A × A en A, es decir, a toda correspondencia que asocia a cada elemento de A × A otro elemento de A.	
PROPIEDADES	Una ley de composición interna $*$ definida sobre A puede ser	ASOCIATIVA	$(a * b) * c = a * (b * c)$
		CONMUTATIVA	$a * b = b * a$
		ELEMENTO NEUTRO	$e * a = a * e = a$ al elemento $e \in A$ se le llama elemento neutro
		ELEMENTO SIMETRICO	$a * a' = a' * a = e$ a' es el elemento simétrico de a, $a' \in A$ y e es el elemento neutro para la ley $*$.
ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS	Sea A un conjunto no vacío, sobre el que se ha definido una ley de composición interna $*$ $(A, *)$ tiene estructura de	SEMIGRUPO	Si $*$ es asociativa
		SEMIGRUPO CON ELEMENTO NEUTRO	Si $*$ es asociativa tiene elemento neutro
		SEMIGRUPO ABELIANO	Si $*$ es asociativa es conmutativa
		SEMIGRUPO ABELIANO CON ELEMENTO NEUTRO	Si $*$ es asociativa es conmutativa tiene elemento neutro
		GRUPO	Si $*$ es asociativa tiene elemento neutro existe elemento simétrico (1)
		GRUPO ABELIANO	Si $*$ es asociativa tiene elemento neutro existe elemento simétrico (1) es conmutativa

(1) Se entiende que todos los elementos del conjunto A tienen su correspondiente simétrico para la ley de composición interna.

EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. *Definimos la ley de composición interna en el conjunto* $A = \{0, 1, 2, 3\}$ *mediante la tabla:*

$\perp$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

¿Qué propiedades tiene?

2. *La operación de potenciación definida en N, ¿es distributiva respecto de la multiplicación? ¿Y respecto de la adición?*
3. *Definimos en Z la siguiente ley de composición interna:* $x \; T \; y = y$ *siendo x e y elementos de Z. ¿Es una ley de composición interna?*
4. *Definimos en el conjunto* $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *la ley de composición interna* $*$ *por medio de la siguiente tabla:*

$*$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

¿$(A, *)$ *tiene estructura de grupo?*

5. *Disponiendo únicamente de la tabla de una operación definida en un conjunto C, ¿se puede decidir con la simple inspección de ésta, si el conjunto C es o no un grupo?*

6. *Si a y b son elementos de un grupo G, ¿cuál debe ser el elemento $x \in G$ tal que $a * x = b$? La operación definida en G es la $*$.*

7. *Dado el conjunto finito $G = \{e, a, b, c\}$, definir en él una ley de composición interna $\perp$ de tal modo que $(G, \perp)$ sea un grupo conmutativo, cuyo elemento neutro es e.*

8. *En el conjunto $A = \{m, n, p, q\}$ se define una ley de composición interna $\perp$ mediante la tabla siguiente:*

$\perp$	m	n	p	q
m	m	n	p	q
n	n	m	q	p
p	p	q	m	n
q	q	p	n	m

   a) *Comprobar que $(A, \perp)$ es un grupo. ¿Cuál es el elemento neutro?*

   b) *Comprobar si el subconjunto $M = \{m, n\}$ de A es un subgrupo de $(A, \perp)$.*

   c) *Idem para $\{p, q\}$ y $\{m, q\}$.*

9. *Dado el conjunto $A = \{1, 2\}$, construir el conjunto de las partes de A, P (A). En este conjunto consideremos como ley de composición interna la unión de conjuntos. ¿Qué estructura adquiere P (A)?*

10. *A partir del conjunto $B = \{a, b\}$ construimos el conjunto P (B). Sobre este conjunto consideramos la intersección de conjuntos como ley de composición interna. ¿Qué estructura tiene?*

11. *Sobre el conjunto de los números enteros se define la ley de composición interna: $a * b = a + b - 1$. ¿Qué propiedades verifica?*

12. *Sobre el conjunto de los números enteros se define la ley de composición interna: $a * b = a + b - ab$. ¿Qué propiedades verifica?*

13. *Sea el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ con la ley de composición definida por la siguiente tabla:*

$*$	a	b	c	d
a	c	d	a	b
b	d	a	b	c
c	a	b	c	d
d	b	c	d	a

¿Qué estructura tiene (A, $*$)? ¿Cuáles son los posibles subgrupos de A de dos elementos (subgrupos de segundo orden)?

14. *Sobre el conjunto de los números racionales se define la ley de composición interna:*

$$a * b = \frac{a + b}{2}.$$

¿Qué propiedades tiene?

15. *En el conjunto de los números enteros se define la siguiente ley de composición interna: $a * b = a \cdot b^2$. ¿Qué propiedades tiene?*

16. *Consideramos el conjunto formado por todos los números enteros pares, como ley de composición interna la suma. ¿Con qué estructura queda dotado este conjunto?*

¿Y si con la misma ley de composición interna consideramos el conjunto de los números enteros impares?

17. *Si sobre el conjunto de los números enteros consideramos como ley de composición interna la resta, ¿tiene estructura de grupo?*

18. *En el conjunto de los enteros se define la ley de composición interna: $a * b = a$, ¿qué propiedades tiene?*

19. *Sobre el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ se define la ley de composición que opera con arreglo a la siguiente tabla:*

$*$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	3	3	2	4
4	4	2	3	4

¿Tiene estructura de grupo?

20. *Dado el conjunto formado por $A = \{a + b\sqrt{2}$, con a y b enteros$\}$ con la operación suma, ¿tiene estructura de grupo?*

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. Es conmutativa y asociativa. El elemento neutro es el 0 y posee elemento simétrico, porque en todas las líneas está el 0.

2. La potenciación es distributiva por la derecha respecto de la multiplicación: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$. Pero no es distributiva por la izquierda: $a^{b\,c} \neq a^b \cdot a^c$.

   No lo es respecto de la adición por ningún lado:

   $$(a + b)^n \neq a^n + b^n$$

   $$a^{b+c} \neq a^b + a^c$$

3. Una ley de composición interna es una aplicación de $Z \times Z$ en Z, tal cosa sucede en nuestro problema, a cada pareja $(x, y) \in Z \times Z$ le asociamos un $y \in Z$, todos los elementos de $Z \times Z$ tienen imagen en Z.

4. Tiene la propiedad asociativa, ya que:

   $$(2 * 3) * 4 = 2 * (3 * 4)$$

   $2 * 3 = 6$

   $3 * 4 = 5$

   luego $\begin{cases} 6 * 4 = 3 \\ 2 * 5 = 3 \end{cases}$

   Tiene la propiedad conmutativa, ya que es simétrica respecto de la diagonal.

   El elemento neutro es 1.

   El simétrico de 1 es 1, el de 2 es 4, el de 3 es 5, el de 4 es 2, el de 5 es 3, el de 6 es 6. Luego es un grupo.

5. Comprobamos si tiene la propiedad asociativa, si posee elemento neutro –debe tener una fila y una columna con los mismos elementos que los del conjunto y en el mismo orden– y si éste se halla en todas las líneas de la tabla —existencia de elemento simétrico—.

6. $x = a^{-1} * b$, pues $a * (a^{-1} * b) = (a * a^{-1}) * b = e * b = b$ es el elemento neutro para la operación $*$.

7. Una posible solución sería:

$\perp$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

Compruébese que cumple las propiedades que caracterizan un grupo.

8.

a) Tiene la propiedad asociativa $n \perp (p \perp q) = (n \perp p) \perp q$, ya que

$$n \perp (p \perp q) = n \perp n = m$$
$$(n \perp p) \perp q = q \perp q = m$$

Tiene elemento neutro y es m.

El simétrico de m es m, el de n es n, el de p es p, el de q es q, luego es un grupo.

b) y c)

$\perp$	m	n
m	m	n
n	n	m

$\perp$	p	q
p	m	n
q	n	m

$\perp$	m	q
m	m	q
q	q	m

Las tablas primera y tercera son subgrupos, la segunda no, ya que no es una ley de composición interna.

9. Calculemos P(A) = {∅, {1}, {2}, {1, 2}}. Hagamos la tabla de doble entrada con la operación unión. Resulta:

$\cup$	$\varnothing$	{1}	{2}	{1, 2}
$\varnothing$	$\varnothing$	{1}	{2}	{1, 2}
{1}	{1}	{1}	{1, 2}	{1, 2}
{2}	{2}	{1, 2}	{2}	{1, 2}
{1, 2}	{1, 2}	{1, 2}	{1, 2}	{1, 2}

a) Es asociativa, ya que

$$\{1\} \cup [\{1, 2\} \cup \{2\}] = [\{1\} \cup \{1, 2\}] \cup \{2\}$$

$$\{1\} \cup [\{1, 2\} \cup \{2\}] = \{1\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2\},$$

$$[\{1\} \cup \{1, 2\}] \cup \{2\} = \{1, 2\} \cup \{2\} = \{1, 2\}$$

b) Es conmutativa, ya que $\{1, 2\} \cup \{2\} = \{2\} \cup \{1, 2\}$

$$\{1, 2\} \cup \{2\} = \{1, 2\} \qquad \{2\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2\}$$

c) Tiene elemento neutro y es $\varnothing$.

d) No tiene elemento simétrico, ya que $\{1\}$, por ejemplo, no tiene simétrico, pues no hay ningún elemento que compuesto con él dé $\varnothing$ (que es el elemento neutro).

Por tanto, es un semigrupo, conmutativo y con elemento neutro.

10. Calculemos $P(B) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ y tracemos la tabla de doble entrada con la operación intersección, resulta:

$\cap$	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
$\{a\}$	$\varnothing$	$\{a\}$	$\varnothing$	$\{a\}$
$\{b\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{b\}$	$\{b\}$
$\{a, b\}$	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$

a) Es asociativa, ya que

$$\{a\} \cap [\{b\} \cap \{a, b\}] = [\{a\} \cap \{b\}] \cap \{a, b\}$$

$$\{a\} \cap [\{b\} \cap \{a, b\}] = \{a\} \cap \{b\} = \varnothing$$

$$[\{a\} \cap \{b\}] \cap \{a, b\} = \varnothing \cap \{a, b\} = \varnothing$$

b) Es conmutativa, ya que $\{a\} \cap \{a, b\} = \{a, b\} \cap \{a\}$

$$\{a\} \cap \{a, b\} = \{a\} \quad , \quad \{a, b\} \cap \{a\} = \{a\}$$

c) Tiene elemento neutro que es el $\{a, b\}$.

d) No tiene simétrico, ya que no hay ningún elemento que operado con $\{a\}$ resulte $\{a, b\}$ (elemento neutro).

Por tanto, tiene estructura de semigrupo, conmutativo y con elemento neutro.

11. *a)* Veamos si es asociativa

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

$$a * b = a + b - 1 \qquad b * c = b + c - 1$$

$$(a + b - 1) * c = a + b - 1 + c - 1 = a + b + c - 2$$

$$a * (b + c - 1) = a + b + c - 1 - 1 = a + b + c - 2$$

luego es asociativa.

b) Es conmutativa

$$a * b = b * a$$
$$a * b = a + b - 1$$
$$b * a = b + a - 1$$

luego es conmutativa.

c) Veamos si tiene elemento neutro. Le llamaremos e ; $a * e = a$ por definición de elemento neutro; $a + e - 1 = a$ operando resulta $e = 1$. Luego, existe elemento neutro y es el 1, que es un número entero.

d) Veamos si existe elemento simétrico de un elemento cualquiera al que llamaremos a, según la definición de elemento simétrico.

$$a * a' = 1$$
$$a + a' - 1 = 1$$

operando

$$a' = 2 - a$$

Por tanto, sí tiene simétrico y es un elemento que pertenece al conjunto de los números enteros.

12. *a*) Es asociativa

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$
$$a * b = a + b - ab \qquad b * c = b + c - bc$$
$$(a + b - ab) * c = a + b - ab + c - (a + b - ab) \cdot c =$$
$$= a + b - ab + c - bc + abc - ac$$
$$a * (b + c - bc) = a + (b + c - bc) - a(b + c - bc) =$$
$$= a + b + c - bc - ab - ac + abc$$

Es asociativa.

b) Es conmutativa

$$a * b = b * a$$
$$a * b = a + b - ab$$
$$b * a = b + a - ba$$

luego, sí es conmutativa.

c) Existe elemento neutro, que llamaremos e

$$a * e = a + e - ae = a$$

operando

$$a + e - ae = a \qquad e - ae = a - a = 0$$
$$e(1 - a) = 0 \qquad e = \frac{0}{1 - a} = 0$$

Luego el elemento neutro es el cero, que es un número entero.

d) Existe elemento simétrico, llamémosle $\bar{a}$

$$a * \bar{a} = 0$$
$$a + \bar{a} - a\bar{a} = 0$$

$$\bar{a}(1 - a) = -a \quad \bar{a} = -\frac{a}{1 - a} = 0$$

Ahora bien, observamos que el simétrico será un número fraccionario y, por tanto, no es entero, llegando a la conclusión de que no tiene simétrico por no ser éste un número entero.

13.

*	a	b	c	d
a	c	d	a	b
b	d	a	b	c
c	a	b	c	d
d	b	c	d	a

a) es asociativa

$$a * (b * c) = (a * b) * c$$
$$a * (b * c) = a * b = d$$
$$(a * b) * c = d * c = d$$

b) Es conmutativa, por ser simétrica respecto de la diagonal principal.

c) El elemento neutro es el c.

d) El simétrico de a es a, el de b es d, el de c es c, el de d es b.

Por tanto, es grupo conmutativo.

Calculemos ahora los posibles subgrupos de 2 elementos.

Recordemos que los subgrupos han de ser grupos, por tanto, todos han de contener al elemento neutro que en este caso es c. Por ello, los posibles subgrupos serán:

{a, c}, {b, c}, {d, c}

*	a	c
a	c	a
c	a	c

*	b	c
b	a	b
c	b	c

*	d	c
d	a	d
c	d	c

Por tanto, el único que es subgrupo es el primero, ya que los otros dos no son auténticas leyes de composición interna.

14. *a*) Es asociativa

$$a * (b * c) = (a * b) * c$$

$$b * c = \frac{b + c}{2}$$

$$a * b = \frac{a + b}{2}$$

$$a * \frac{b + c}{2} = \frac{a + \frac{b + c}{2}}{2} = \frac{2a + b + c}{4}$$

$$\frac{a + b}{2} * c = \frac{\frac{a + b}{2} + c}{2} = \frac{a + b + 2c}{4}$$

No es asociativa.

b) Es conmutativa

$$a * b = b * a \qquad a * b = \frac{a + b}{2} \qquad b * a = \frac{b + a}{2}$$

Sí es conmutativa.

c) Existe elemento neutro, llamémosle e

$$a * e = a \qquad a * e = \frac{a + e}{2}$$

$$\frac{a + e}{2} = a \qquad a + e = 2a \qquad e = a$$

Como el elemento neutro tiene que ser único y depende de a, la conclusión es que no tiene elemento neutro.

d) Simétrico. Al no tener neutro no puede tener simétrico.

15. *a*) Asociativa

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$
$$a * b = a \cdot b^2$$
$$b * c = b \cdot c^2$$
$$(a \cdot b^2) * c = a \cdot b^2 \cdot c^2$$
$$a * (b \cdot c^2) = a \cdot (b \cdot c^2)^2 = a \cdot b^2 \cdot c^4$$

No verifica la propiedad asociativa.

b) Conmutativa

$$a * b = b * a$$
$$a * b = a \cdot b^2$$
$$b * a = b \cdot a^2$$

No goza de esta propiedad.

c) Elemento neutro

$$e * a = e \cdot a^2 = a$$

$$e = \frac{a}{a^2} = \frac{1}{a}$$

Por no ser conmutativa tenemos que calcular, además, el elemento neutro por la derecha.

$$a * e = a \cdot e^2 = a \qquad e = 1$$

Como no coinciden no tiene elemento neutro. Además $\frac{1}{a}$ no es un número entero.

d) Elemento simétrico. Por no tener neutro no posee simétrico.

16. La suma de dos números pares es otro número par, por tanto, es una verdadera ley de composición interna.

Es asociativa y conmutativa, por serlo los números enteros.
Existe elemento neutro, que es el cero.

Y cada elemento tiene simétrico.

Por todo ello, se trata de un grupo conmutativo.

La suma de los números impares no es un número impar. Por tanto, la ley de composición no es interna y no tendrá ninguna estructura.

17. Para ver si verifica la propiedad asociativa, recurrimos a ejemplos numéricos:

$$3 - (2 - 4) = (3 - 2) - 4$$
$$2 - 4 = -2 \quad , \quad 3 - (2 - 4) = 3 + 2 = 5$$
$$3 - 2 = 1 \quad , \quad (3 - 2) - 4 = 1 - 4 = -3$$

Como no es asociativa no puede ser un grupo.

18. *a*) Es asociativa

$$(a * b) * c = a * (b * c) \qquad a * b = a$$
$$a * c = a \qquad a * b = a \qquad b * c = b$$

b) Es conmutativa

No lo es, ya que

$$a * b = b * a$$
$$a * b = a$$
$$b * a = b$$

c) Elemento neutro. Como no es conmutativa, habrá que probar si es el mismo por la derecha y por la izquierda.

Por la derecha: $a * e = a = a$

Por la izquierda: $e * a = e = a$

e depende de a, no es único, luego no existe elemento neutro.

d) No tiene elemento simétrico.

19. Asociativa

$$3 * (2 * 3) = (3 * 2) * 3$$
$$3 * 4 \qquad 3 * 3$$
$$4 \neq 2$$

No es asociativa. En consecuencia, no tiene estructura de grupo.

20. La suma es asociativa

$$[(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2})] + (e + f\sqrt{2}) = [(a + c) + (b + d)\sqrt{2}] + (e + f\sqrt{2}) =$$
$$= (a + c) + e + [(b + d) + f]\sqrt{2} = a + (c + e) + [b + (d + f)]\sqrt{2} =$$
$$= a + (c + e) + b\sqrt{2} + (d + f)\sqrt{2} = (a + b\sqrt{2}) + [(c + e) + (d + f)\sqrt{2}] =$$
$$= (a + b\sqrt{2}) + [c + e + d\sqrt{2} + f\sqrt{2}] = (a + b\sqrt{2}) + [(c + d\sqrt{2}) + (e + f\sqrt{2})].$$

En efecto, es asociativa.

Es conmutativa

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (c + d\sqrt{2}) + (a + b\sqrt{2})$$

$$a + c + (b + d)\sqrt{2} = c + a + (d + b)\sqrt{2}$$

Por tanto, es conmutativa.

Existe elemento neutro y es $(0 + 0\sqrt{2})$

$$(a + b\sqrt{2}) + (0 + 0\sqrt{2}) = a + b\sqrt{2}$$

Existe elemento simétrico: dado el elemento $(a + b\sqrt{2})$ su simétrico es $(-a - b\sqrt{2})$, puesto que:

$$(a + b\sqrt{2}) + (-a - b\sqrt{2}) = (a - a + (b - b)\sqrt{2}) = 0 + 0\sqrt{2}$$

Por tanto, es grupo conmutativo.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE
EDUCACION A DISTANCIA

MATEMATICAS BASICAS

UNIDAD DIDACTICA/2

Preparado por los profesores:
C. Herrera González
J. R. Marco Franco
J. Summers Gámez

TEMA V

ALGEBRA ELEMENTAL DE LAS PARTES DE UN CONJUNTO

ESQUEMA/RESUMEN

1. Conjunto de partes de un conjunto.
   1.1. Definición.
   1.2. Número de elementos.

2. Operaciones sobre el conjunto de las partes de un conjunto.
   2.1. Unión de conjuntos.
   2.2. Intersección de conjuntos.

3. Igualdad entre conjuntos.

4. Propiedades.
   4.1. Propiedades de la unión.
   4.2. Propiedades de la intersección.
   4.3. Propiedades comunes a la unión y a la intersección.

5. Conjunto complementario.

6. Algebra de las partes de un conjunto.
   6.1. Retículo.
   6.2. Algebra de Boole.
   6.3. Leyes de Morgan.

INSTRUCCIONES PARA EL ESTUDIO DEL TEMA

Iniciamos con este tema una parte de la Teoría de Conjuntos que se llama *Lógica*. Probablemente, para ser estrictos, estas ideas que vamos a exponer en este tema y los tres sucesivos debían haber iniciado este curso; el cambio lo hemos hecho pensando fundamentalmente en los alumnos que se inician por primera vez en el estudio de las llamadas Matemáticas Modernas. Esperamos no habernos equivocado.

En el presente tema repasamos algunas ideas expuestas en la primera Unidad Didáctica, tratando de presentar aspectos que entonces pasaron inadvertidos y enunciar nuevos conceptos no analizados entonces.

Es muy importante que el alumno se fije en esta última circunstancia, preocupándose de comprender las nuevas propiedades de la unión y de la intersección que ahora consideramos y el significado de una nueva estructura algebraica con que dotamos al conjunto de las partes de un conjunto con la unión y la intersección como leyes de composición interna.

Es conveniente prestar atención a las diversas demostraciones (fundamentalmente de las propiedades) que se realizan a lo largo de este tema, todas ellas han sido desarrolladas con sumo detalle para facilitar su estudio. Con los conocimientos adquiridos por el alumno hasta ahora debe seguirlas perfectamente.

1. CONJUNTO DE LAS PARTES DE UN CONJUNTO

En la primera Unidad Didáctica hemos hablado del *conjunto de las partes de un conjunto;* entonces no lo hicimos con la extensión adecuada pensando en que sería más interesante estudiarlo ahora que vamos a encontrar una utilidad posterior de inmediato. Este concepto, al igual que otros que aparecen en este tema, debe ser ya conocido.

1.1. Definición

Dado un conjunto *A*, se llama conjunto de las partes de *A* y se representa por P(A), al conjunto formado por todos los subconjuntos posibles de *A*. Por tanto, los elementos de P(A) son subconjuntos del conjunto *A*.

Veamos un ejemplo: Sea el conjunto A = {1, c, p}, el conjunto P(A) está formado por todos los subconjuntos de A de cero elementos, un elemento, dos elementos y tres elementos. Es decir,

$$P(A) = \{\phi, \{1\}, \{c\}, \{p\}, \{1, c\}, \{1, p\}, \{c, p\}, A\}$$

Consideramos ahora el conjunto B = {a, 1}, el conjunto de las partes de B será

$$P(B) = \{\phi, \{a\}, \{1\}, B\}$$

P(B) está formado, también, por todos los subconjuntos de cero elementos, un elemento y dos elementos.

1.2. Número de elementos

Existe una relación entre el número de elementos de un conjunto A y el número de elementos del conjunto P(A), que podemos enunciar así: Si el conjunto A tiene *n* elementos, el conjunto P(A) tiene 2^n elementos, es decir, 2 · 2... (n veces) · 2.

BIBLIOTECA PUBLICA PTO. STA. MARIA

Como consecuencia, esta regla tiene gran utilidad a la hora de formar el conjunto P(A), para tener la seguridad de que no nos hemos olvidado de introducir algún subconjunto.

Apliquemos esta regla a los dos ejemplos presentados en el apartado anterior. Recordemos que el conjunto A tiene 3 elementos; por lo tanto, P(A) tiene que tener $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ elementos.

El conjunto B tiene dos elementos; en consecuencia, el número de elementos de P(B) es $2^2 = 2 \cdot 2 = 4$ elementos.

2. OPERACIONES SOBRE EL CONJUNTO DE LAS PARTES DE UN CONJUNTO

La unión y la intersección de conjuntos son operaciones ya estudiadas, pero vamos a repasarlas antes de encontrar nuevas aplicaciones.

2.1. Unión de conjuntos

Dados dos conjuntos *A* y *B* llamamos unión de A y B al conjunto formado por todos los elementos que pertenezcan al menos a uno de los conjuntos, y lo representaremos por $A \cup B$.

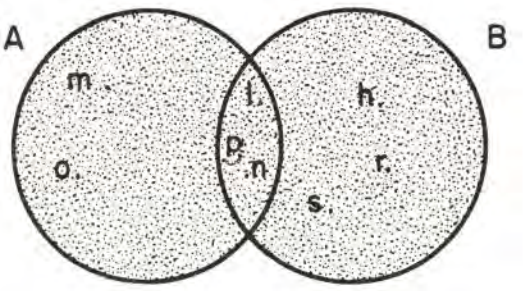
Hay que tener en cuenta que los elementos que pertenezcan a *A* y a *B* a la vez no se repiten, es decir, se consideran una sola vez.

Consideremos un ejemplo: Sean los conjuntos A = {l, m, n, o, p} y B = {l, h, r, s, p, n}, entonces la unión de los dos conjuntos será

$$A \cup B = \{l, m, n, o, p, h, r, s\}$$

vemos que $A \cup B$ está formado por todos los elementos de *A* y todos los de *B*, y hemos considerado una sola vez los que pertenecen a ambos conjuntos.

Si lo representamos mediante diagramas de Venn, será:



La zona rayada es la correspondiente a la unión de *A* y *B*, $A \cup B$.

Si tenemos un conjunto *A*, hallamos el conjunto P(A) y podemos hallar la unión entre los elementos de P(A), que son subconjuntos de *A*. Se verifica que al unir dos o más elementos de P(A), resulta otro elemento de P(A). Esto quiere decir que la operación unión es cerrada o interna en el conjunto P(A): es una ley de composición interna definida en *A*.

Consideremos el siguiente ejemplo: Sea A = {a, b, c}. Calculamos P(A):

$$P(A) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Si calculamos la unión de dos elementos cualesquiera de P(A), es decir, de dos subconjuntos cualesquiera de A, obtenemos otro subconjunto de *A*. Veamos algunos casos:

$$\{a\} \cup \{a, c\} = \{a, c\} \in P(A)$$

$$\{b, c\} \cup \{a, b\} = \{a, b, c\} \in P(A)$$

$$\phi \cup \{c\} = \{c\} \in P(A)$$

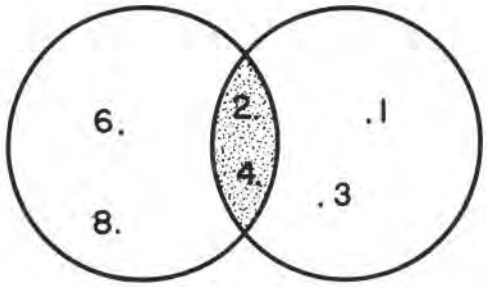
podemos decir, por tanto, que la unión es una operación interna o ley de composición interna en el conjunto de las partes de un conjunto.

2.2. Intersección de conjuntos

Dados dos conjuntos *A* y *B*, llamamos intersección de ambos conjuntos al conjunto formado únicamente por los elementos comunes a *A* y a *B*. La intersección de dos conjuntos *A* y *B* se representa por $A \cap B$.

Veamos un ejemplo: Si *A* es el conjunto {2, 4, 6, 8} y *B* es {1, 2, 3, 4}, resulta que los únicos elementos comunes son el 2 y el 4, luego $A \cap B = \{2, 4\}$.

Si lo representamos mediante diagramas de Venn, será



La parte rayada es la que corresponde a $A \cap B$.

Si tenemos un conjunto cualquiera *A* y averiguamos el conjunto de las partes de *A*, P(A), podemos hallar la intersección entre los elementos de P(A). Análogamente a lo que hemos visto en el apartado anterior, en el caso de la unión, podemos decir que la intersección de dos elementos cualesquiera de P(A) es otro elemento de P(A).

Consideremos el mismo ejemplo del apartado 2.1

$$A = \{a, b, c\}$$

$$P(A) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

la intersección de dos elementos cualesquiera de P(A) es otro elemento que pertenece a P(A). Lo hacemos para algunos casos:

$$\{a\} \cap \{b\} = \phi \in P(A)$$

$$\{c\} \cap \{b, c\} = \{c\} \in P(A)$$

$$\{a, b\} \cap \{a, b, c\} = \{a, b\} \in P(A)$$

Es decir, la intersección es una operación interna o una ley de composición interna en el conjunto de las partes de un conjunto.

Ejercicios y problemas

1. Dado el conjunto de tres elementos $A = \{\phi, 0, 1\}$ hallar el conjunto P(A).

   Estará formado por los subconjuntos de cero, uno, dos y tres elementos.

   ϕ subconjunto de cero elementos

   $\{\phi\}$, $\{0\}$, $\{1\}$ subconjuntos de un elemento.

   $\{\phi, 0\}$, $\{\phi, 1\}$, $\{0, 1\}$ subconjuntos de dos elementos.

   $\{\phi, 0, 1\}$ subconjunto de tres elementos

   Por lo tanto,

   $P(A) = \{\phi, \{\phi\}, \{0\}, \{1\}, \{\phi, 0\}, \{\phi, 1\}, \{0,1\}, \{\phi, 0, 1\}\}$

2. Si el conjunto P(A) tiene 128 elementos, ¿cuántos elementos tendrá A?

   $128 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7$; por lo tanto, A tendrá 7 elementos.

3. IGUALDAD ENTRE CONJUNTOS

Decimos que dos conjuntos *A* y *B* son iguales cuando tienen los mismos elementos. Es decir, cuando todo elemento de *A* pertenece a *B*, y todo elemento de *B* pertenece a *A*. Todavía podemos decirlo de otra manera, para todo $x \in A$ tiene que verificarse $x \in B$ y para todo $y \in B$ tiene que verificarse $y \in A$.

Un método muy utilizado para demostrar la igualdad de conjuntos es probar que todo elemento del primer conjunto pertenece al segundo y todo elemento del segundo pertenece al primero o, lo que es lo mismo, para demostrar que dos conjuntos A y B son iguales A = B, necesitamos demostrar la doble inclusión, es decir, que $A \subset B$ y $B \subset A$.

Por ejemplo, si queremos demostrar la igualdad entre los conjuntos $A \cup \phi$ y A, demostraremos que $A \cup \phi \subset A$ y que $A \subset A \cup \phi$.

Veamos que $A \cup \phi \subset A$: para todo $x \in A \cup \phi$ se verifica que $x \in A$, ya que x no puede pertenecer al conjunto ϕ por no tener éste ningún elemento; por lo tanto, $A \cup \phi \subset A$.

Veamos ahora que $A \subset A \cup \phi$; para todo $y \in A$ se verifica que $y \in A \cup \phi$; por lo tanto, $A \subset A \cup \phi$.

Y hemos demostrado la igualdad $A = A \cup \phi$ por medio de la doble inclusión.

4. PROPIEDADES

Vamos a estudiar algunas propiedades importantes de la unión e intersección, consideradas como leyes de composición interna u operaciones internas definidas en el conjunto de las partes de un conjunto.

4.1. Propiedades de la unión

Sea el conjunto *A*, a partir del mismo construimos el conjunto P(A), tratamos de estudiar a continuación las propiedades de la unión en el conjunto P(A).

1. *Idempotente:* para todo conjunto *B* que pertenezca a P(A) se verifica que $B \cup B = B$.

   Demostración: veamos que $B \cup B \subset B$ y que $B \subset B \cup B$, esto es evidente, ya que todo elemento $x \in B \cup B$ verifica que $x \in B$ y todo elemento $x \in B$ verifica que $x \in B \cup B$; por lo tanto, se cumple

   $$B \cup B = B \text{ para todo } B \in P(A)$$

2. *Conmutativa:* para todo par de conjuntos B y C que pertenezcan a P(A) se verifica $B \cup C = C \cup B$.

   Demostración:

   Sea $x \in B \cup C$ entonces $\begin{cases} x \in B \\ \text{o} \\ x \in C \end{cases}$ y en cualquiera de los dos casos se verifica que $x \in C \cup B$; por lo tanto,

   $$B \cup C \subset C \cup B$$

   veamos ahora la otra inclusión

   sea $x \in C \cup B$ entonces $\begin{cases} x \in C \\ \text{o} \\ x \in B \end{cases}$ luego $x \in B \cup C$

   luego $C \cup B \subset B \cup C$.

   Por lo tanto, se verifica que $B \cup C = C \cup B$.

3. *Asociativa:* Si *B, C* y *D* son tres elementos cualesquiera de P(A), o sea, tres subconjuntos de A, se verifica que

   $$(B \cup C) \cup D = B \cup (C \cup D)$$

   Demostración:

   Sea $x \in (B \cup C) \cup D$ entonces $\begin{cases} x \in B \cup C \\ \text{o} \\ x \in D \end{cases}$ si $x \in D$ se verifica que $x \in C \cup D$ y

además $x \in B \cup (C \cup D)$; si $x \in B \cup C$ entonces $\begin{cases} x \in B \\ \text{o} \\ x \in C \end{cases}$ en cualquiera de los dos casos implica que $x \in B \cup (C \cup D)$; por lo tanto, tenemos que $(B \cup C) \cup D \subset B \cup (C \cup D)$.

Veamos ahora la otra inclusión

si $x \in B \cup (C \cup D)$ es que $\begin{cases} x \in B \\ \text{o} \\ x \in C \cup D \end{cases}$

si $x \in B$, también pertenecerá a la unión de B con otros conjuntos; luego $x \in B \cup C$ y también $x \in (B \cup C) \cup D$

si $x \in C \cup D$ implica que $\begin{cases} x \in C \text{ luego } x \in B \cup C; \text{ por tanto, } x \in (B \cup C) \cup D; \\ \text{o} \\ x \in D \text{ luego } x \in (B \cup C) \cup D, \end{cases}$

es decir, en todos los casos $x \in (B \cup C) \cup D$; por tanto, se verifica la otra inclusión

$$B \cup (C \cup D) \subset (B \cup C) \cup D$$

En consecuencia, se verifica la igualdad

$$B \cup (C \cup D) = (B \cup C) \cup D$$

4.2. Propiedades de la intersección

1. *Idempotente:* para todo conjunto B que pertenezca a P(A) se verifica que $B \cap B = B$.

   Demostración:

   Sea x un elemento cualquiera que pertenezca a $B \cap B$, entonces se verifica que $x \in B$.

   Luego $B \cap B \subset B$.

   Si x es un elemento cualquiera de B, se verifica que $x \in B \cap B$; luego $B \subset B \cap B$.

   Por lo tanto, se verifica la igualdad $B \cap B = B$.

2. *Conmutativa:* para todo par de conjuntos B y C que pertenezcan a P(A), se verifica que $B \cap C = C \cap B$.

   Demostración:

   Tenemos que comprobar la doble inclusión. Sea un elemento $x \in B \cap C$, entonces $x \in B$ y $x \in C$; luego $x \in C \cap B$ y ya tenemos la inclusión $B \cap C \subset C \cap B$. Sea un elemento $x \in C \cap B$, esto implica que $x \in C$ y que $x \in B$, luego si pertenece a los dos pertenece a su intersección, $x \in B \cap C$; por tanto, $C \cap B \subset B \cap C$, es decir, se verifica la igualdad $B \cap C = C \cap B$.

3. *Asociativa:* Sean B, C y D tres elementos cualesquiera de P(A), se verifica que

$$(B \cap C) \cap D = B \cap (C \cap D)$$

Demostración:

Tomamos un elemento x que pertenezca a $(B \cap C) \cap D$ y vamos a ver que $x \in B \cap (C \cap D)$:

si $x \in (B \cap C) \cap D$ implica que $\begin{cases} x \in B \cap C \\ \quad y \\ x \in D \end{cases}$ como $x \in (B \cap C)$, entonces $x \in B$ y $\left.\begin{matrix} x \in C \\ x \in D \end{matrix}\right\}$ luego $x \in B$ y $x \in C \cap D$ entonces $x \in B \cap (C \cap D)$.

Ya tenemos la inclusión $(B \cap C) \cap D \subset B \cap (C \cap D)$.

Veamos la otra inclusión:

Sea $x \in B \cap (C \cap D)$ entonces $\begin{cases} x \in B \\ \quad y \\ x \in C \cap D \end{cases}$ luego $x \in C$ y $x \in D$.

Tenemos que $x \in B$, $x \in C$ y $x \in D$; luego $x \in B \cap C$ y $x \in D$, como x pertenece a estos dos conjuntos también pertenecerá a la intersección de ambos,

$$x \in (B \cap C) \cap D$$

y así hemos obtenido la otra inclusión

$$B \cap (C \cap D) \subset (B \cap C) \cap D$$

Como se verifican las dos inclusiones se cumple la igualdad

$$(B \cap C) \cap D = B \cap (C \cap D)$$

4.3. Propiedades comunes a la unión y a la intersección

1. *Simplificativa o de absorción:* Si B y C son dos elementos cualesquiera de P(A), se verifica que

a) $(B \cap C) \cup B = B$
y
b) $(B \cup C) \cap B = B$

Esta propiedad significa que si tenemos dos conjuntos y hallamos su intersección y el resultado lo unimos con uno de ellos, resulta este último conjunto. Y también que si hallamos en primer lugar la unión de los dos conjuntos y el resultado lo intersecamos con uno de ellos, resulta este último conjunto.

Demostración:

a) Veamos la inclusión $(B \cap C) \cup B \subset B$

sea $x \in (B \cap C) \cup B$ entonces $\begin{cases} x \in B \cap C \\ o \\ x \in B \text{ en este caso ya está demostrado} \end{cases}$

si $x \in B \cap C$ implica que $x \in B$ y $x \in C$; luego en ambos casos $x \in B$; por tanto

$$(B \cap C) \cup B \subset B$$

La otra inclusión es trivial, ya que si $x \in B$ también pertenecerá a la unión de B con otro conjunto, $x \in (B \cap C) \cup B$; luego

$$B \subset (B \cap C) \cup B$$

Por lo tanto, se cumple $(B \cap C) \cup B = B$.

b) Veamos la inclusión $(B \cup C) \cap B \subset B$

sea $x \in (B \cup C) \cap B$, esto implica $\begin{cases} x \in B \cup C \\ y \\ x \in B \end{cases}$

luego $x \in B$; por tanto, $(B \cup C) \cap B \subset B$.

Veamos ahora la inclusión $B \subset (B \cup C) \cap B$.

Sea $x \in B$, entonces también $x \in B \cup C$, como pertenece a estos dos conjuntos también pertenece a su intersección

$$x \in (B \cup C) \cap B$$

luego

$$B \subset (B \cup C) \cap B$$

Hemos visto que se verifican las dos inclusiones. Luego se cumple la igualdad

$$(B \cup C) \cap B = B$$

2. *Distributiva:* Si B, C y D son tres elementos cualesquiera de P(A), se verifica:

a) $B \cup (C \cap D) = (B \cup C) \cap (B \cup D)$

b) $B \cap (C \cup D) = (B \cap C) \cup (B \cap D)$

Demostración:

a) Veamos la inclusión $B \cup (C \cap D) \subset (B \cup C) \cap (B \cup D)$

si $x \in B \cup (C \cap D)$ implica que $\begin{cases} x \in B \\ o \\ x \in C \cap D \end{cases}$

en el caso en que $x \in B$, resulta que $x \in B \cup C$ y $x \in B \cup D$.

luego $x \in (B \cup C) \cap (B \cup D)$

en el otro caso $x \in C \cap D$, luego $\begin{cases} x \in C \\ y \\ x \in D \end{cases}$

entonces $\begin{cases} x \in B \cup C \\ y \\ x \in B \cup D \end{cases}$

por lo tanto,

$$x \in (B \cup C) \cap (B \cup D)$$

Como en los dos casos

$$x \in (B \cup C) \cap (B \cup D)$$

se verifica

$$B \cup (C \cap D) \subset (B \cup C) \cap (B \cup D)$$

Veamos ahora la otra inclusión

$$(B \cup C) \cap (B \cup D) \subset B \cup (C \cap D)$$

sea $x \in (B \cup C) \cap (B \cup D)$, entonces $\begin{cases} x \in B \cup C \\ y \\ x \in B \cup D \end{cases}$

esto significa que $\begin{cases} x \in B \text{ ó } x \in C \\ y \\ x \in B \text{ ó } x \in D \end{cases}$

en el caso que $x \in B$ ya tenemos que $x \in B \cup (C \cap D)$ y en el caso que $x \notin B$ tiene que pertenecer a C y a D, $x \in C$ y $x \in D$, entonces $x \in C \cap D$ y también a $B \cup (C \cap D)$, luego en los dos casos

$$x \in B \cup (C \cap D)$$

por lo tanto, se verifica

$$(B \cup C) \cap (B \cup D) \subset B \cup (C \cap D)$$

Como se verifican las dos inclusiones, se cumple la igualdad

$$B \cup (C \cap D) = (B \cup C) \cap (B \cup D)$$

b) Veamos la inclusión $B \cap (C \cup D) \subset (B \cap C) \cup (B \cap D)$; si $x \in B \cap (C \cup D)$, x tiene que pertenecer a ambos conjuntos $x \in B$ y $x \in C \cup D$, entonces tenemos que

$$\left.\begin{array}{l} x \in B \\ y \\ x \in C \text{ ó } x \in D \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{si } x \in C \quad x \in B \cap C \\ \\ \text{si } x \in D \quad x \in B \cap D \end{array}\Bigg\}$$

luego x pertenecerá al menos a uno de los conjuntos $B \cap C$ y $B \cap D$, luego

$$x \in (B \cap C) \cup (B \cap D)$$

Y ya tenemos la inclusión

$$B \cap (C \cup D) \subset (B \cap C) \cup (B \cap D)$$

Consideremos la otra inclusión

$$(B \cap C) \cup (B \cap D) \subset B \cap (C \cup D)$$

si $x \in (B \cap C) \cup (B \cap D)$, significa que $\begin{cases} x \in B \cap C \\ \text{ó} \\ x \in B \cap D \end{cases}$

en el caso $x \in B \cap C$ implica $x \in B$ y $x \in C$, entonces $x \in B$ y $x \in C \cup D$, luego $x \in B \cap (C \cup D)$;
en el caso $x \in B \cap D$ implica $x \in B$ y $x \in D$, entonces $x \in B$ y $x \in C \cup D$; luego $x \in B \cap (C \cup D)$.

Como en los dos casos $x \in B \cap (C \cup D)$, se verifica la inclusión

$$(B \cap C) \cup (B \cap D) \subset B \cap (C \cup D)$$

Al verificarse las dos inclusiones es cierta la igualdad

$$B \cap (C \cup D) = (B \cap C) \cup (B \cap D)$$

5. CONJUNTO COMPLEMENTARIO

Dados un conjunto E y un subconjunto S de E, se llama conjunto complementario de S en E al conjunto E − S. Es decir, al conjunto de elementos de E que no pertenecen a S.

La notación que se usa normalmente para representar este conjunto es S'_E o $C_E S$.

Veamos un ejemplo: Si E es el conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6} y S el subconjunto {3, 5}, el complementario de S en E será

$$S'_E = E - S = \{1, 2, 4, 6\}$$

Hay que tener en cuenta que para poder hablar de complementario de un conjunto en otro, es necesario que uno sea subconjunto del otro.

En el caso del conjunto de las partes de un conjunto P(A), cada elemento es un subconjunto del conjunto A; por tanto, podemos hablar de complementario de cada elemento de P(A) en el conjunto A. Es decir, si B es un elemento de P(A), B será subconjunto de A; por lo tanto, existe el conjunto complementario de B en A, B'_A, que es un elemento de P(A).

Además este conjunto complementario de cada elemento cumple las propiedades:

$$B \cup B'_A = A \quad \text{y} \quad B \cap B'_A = \phi$$

O sea, la unión de un subconjunto con su complementario resulta el conjunto total, y al realizar la intersección de un subconjunto con su complementario obtenemos el conjunto vacío.

Es fácil comprender estas dos propiedades, pues son consecuencia inmediata de la propia definición; por otra parte, en algunas ocasiones anteriores lo hemos puesto de manifiesto.

Consideramos un ejemplo: Sea el conjunto $A = \{1, 2\}$, calculamos el conjunto de las partes de A:

$$P(A) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

vamos a calcular el conjunto complementario de cada elemento de P(A) y comprobaremos las dos propiedades que acabamos de enunciar:

Si $B = \{1\}$, $B \in P(A)$, su complementario será:

$$B'_A = A - B = \{1, 2\} - \{1\} = \{2\}$$

Veamos que cumple las dos propiedades:

$$B \cup B'_A = \{1\} \cup \{2\} = \{1, 2\} = A$$

$$B \cap B'_A = \phi$$

Sea ahora $C = \{2\}$, $C \in P(A)$, su complementario es:

$$C'_A = A - C = \{1, 2\} - \{2\} = \{1\}$$

También cumple las propiedades

$$C \cup C'_A = \{2\} \cup \{1\} = \{1, 2\} = A$$

$$C \cap C'_A = \phi$$

Tomemos ahora ϕ, el conjunto vacío, $\phi \in P(A)$ su complementario es:

$$\phi'_A = A - \phi = A$$

las propiedades también se cumplen:

$$\phi \cup A = A$$

$$\phi \cap A = \phi$$

Por último, consideramos $A = \{1, 2\}$, el conjunto de partida, $A \in P(A)$. Su complementario es:

$$A'_A = A - A = \phi$$

De la misma manera, las dos propiedades de referencia también se verifican:

$$A \cup A'_A = \{1,2\} \cup \phi = A$$

$$A \cap A'_A = \phi$$

Ejercicios y problemas

1. Si consideramos el conjunto A = $\{\phi, 1, 3\}$ y el B = $\{1, 3\}$. ¿Podemos hallar el complementario de B en A? ¿Y el de A en B?

   El complementario de B en A sí se puede hallar, ya que B es subconjunto de A, y será el conjunto unitario $\{\phi\}$, ya que

   $$B'_A = A - B = \{\phi\}$$

   El complementario de A en B no existe, ya que A no es subconjunto de B.

2. Siendo el conjunto A = {a}, hallar el conjunto P(A) y el complementario de cada elemento.

   $$P(A) = \{\phi, \{a\}\}$$

   El complementario del ϕ es

   $$\phi'_A = A - \phi = A$$

   y el complementario del {a} es

   $$\{a\}'_A = A - \{a\} = \phi$$

6. ALGEBRA DE LAS PARTES DE UN CONJUNTO

Ya hemos visto en la primera Unidad Didáctica que cuando sobre un conjunto se define una ley de composición interna, podemos decir que el conjunto queda dotado de una estructura algebraica, el tipo de estructura algebraica depende de la ley y de las propiedades que verifica la misma. Vamos a preocuparnos, en este apartado, de la estructura algebraica que tiene el conjunto de las partes de un conjunto, cuando se consideran simultáneamente las dos operaciones de unión e intersección que acabamos de definir.

6.1. Retículo

Si tenemos un conjunto en el que hemos definido dos operaciones que son internas (leyes de composición interna) y verifican las propiedades: conmutativa, asociativa, idempotente y simplificativa; se dice que este conjunto con respecto a estas dos operaciones tiene estructura de *retículo.*

Acabamos de ver que el conjunto de partes de un conjunto P(A) con las operaciones $\cup$ e $\cap$ tiene las propiedades conmutativa, asociativa, idempotente y simplificativa; por lo tanto, *(P(A), $\cup$, $\cap$) es un retículo.*

Si las dos operaciones que se definen sobre el conjunto tienen la propiedad distributiva, el retículo se llama distributivo.

Y si además el retículo verifica la propiedad siguiente: cada elemento tiene un complementario; el retículo se llama *retículo complementario.*

El conjunto P(A) con la $\cup$ e $\cap$ también tenía estas dos propiedades; por lo tanto, *(P(A), $\cup$, $\cap$) es un retículo distributivo y complementario.*

Consideramos un ejemplo: Sea el conjunto A = {1, 2} con las operaciones internas definidas por las tablas

$\perp$	1	2
1	1	2
2	2	2

T	1	2
1	1	1
2	1	2

veamos que verifican las propiedades

Idempotente:

$$1 \perp 1 = 1 \qquad 1 \,T\, 1 = 1$$
$$2 \perp 2 = 2 \qquad 2 \,T\, 2 = 2$$

Conmutativa:

$$1 \perp 2 = 2 \perp 1 = 2 \qquad 1 \,T\, 2 = 2 \,T\, 1 = 1$$

Asociativa:

$$(1 \perp 2) \perp 1 = 1 \perp (2 \perp 1) \qquad (1 \,T\, 2)\, T\, 1 = 1 \,T\, (2 \,T\, 1)$$
$$\| \qquad\qquad \| \qquad\qquad \| \qquad\qquad \|$$
$$2 \perp 1 = 1 \perp 2 = 2 \qquad 1 \,T\, 1 = 1 \,T\, 1 = 1$$

Absorción:

$$(1 \perp 2)\, T\, 1 = 1 \qquad (1 \,T\, 2) \perp 1 = 1$$
$$\| \qquad\qquad \|$$
$$2 \,T\, 1 = 1 \qquad 1 \perp 1 = 1$$

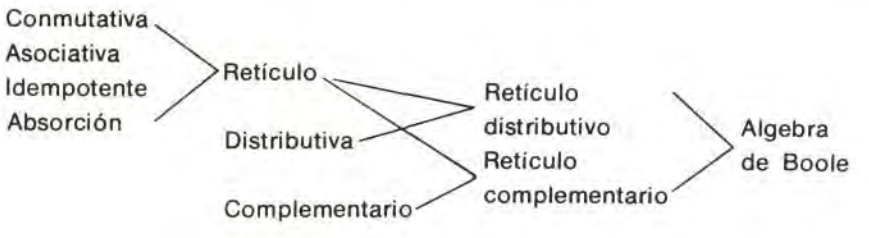
$$(2 \perp 1)\, T\, 2 = 2 \qquad (2 \,T\, 1) \perp 2 = 2$$
$$\| \qquad\qquad \|$$
$$2 \,T\, 2 = 2 \qquad 1 \perp 2 = 2$$

En consecuencia, (A, $\perp$, T) es un retículo.

6.2. Algebra de Boole

Se dice que un conjunto con dos operaciones internas es un álgebra de Boole o tiene estructura de álgebra de Boole cuando es un retículo distributivo y complementario. Por lo tanto, el conjunto de partes de un conjunto con las operaciones $\cup$ e $\cap$ es un álgebra de Boole.

En el esquema siguiente representamos las estructuras algebraicas que acabamos de estudiar:



6.3. Leyes de Morgan

Si B y C son dos elementos cualesquiera del conjunto P(A), se verifica:

a) $(B \cup C)' = B' \cap C'$

b) $(B \cap C)' = B' \cup C'$

A estas dos igualdades se las conoce con el nombre de leyes de Morgan. Vamos a demostrarlas:

a) Vamos a ver la doble inclusión

si $x \in (B \cup C)'$ entonces $x \notin B \cup C$, luego $\begin{cases} x \notin B \\ y \\ x \notin C \end{cases}$

por lo tanto $\begin{cases} x \in B' \\ y \\ x \in C' \end{cases}$

esto implica $x \in B' \cap C'$ y ya tenemos la inclusión $(B \cup C)' \subset B' \cap C'$.

si $x \in B' \cap C'$ entonces $\begin{cases} x \in B' \\ y \\ x \in C' \end{cases}$

luego $\begin{cases} x \notin B \\ y \\ x \notin C \end{cases}$

por lo tanto,

$x \notin B \cup C$ luego $x \in (B \cup C)'$ y tenemos la otra inclusión

$$B' \cap C' \subset (B \cup C)'$$

Por lo tanto, tenemos la igualdad

$$(B \cup C)' = B' \cap C'$$

b) Si $x \in (B \cap C)'$ implica $x \notin B \cap C$

luego $\begin{cases} x \notin B \\ o \\ x \notin C \end{cases}$

entonces $\begin{cases} x \in B' \\ o \\ x \in C' \end{cases}$

luego $x \in B' \cup C'$ y tenemos la inclusión

$$(B \cap C)' \subset B' \cup C'$$

si $x \in B' \cup C'$ es que $\begin{cases} x \in B' \\ o \\ x \in C' \end{cases}$

luego $\begin{cases} x \notin B \\ o \\ x \notin C \end{cases}$

entonces $x \notin B \cap C$.

Por lo tanto, $x \in (B \cap C)'$ y tenemos la inclusión

$$B' \cup C' \subset (B \cap C)'$$

Como consecuencia de las dos inclusiones se verifica la igualdad

$$(B \cap C)' = B' \cup C'$$

NOTAS ACLARATORIAS Y COMPLEMENTARIAS

- Algunos autores consideran necesarias las leyes de Morgan para ser álgebra de Boole, y otros dan algunas definiciones algo diferentes a la que nosotros hemos dado. Hemos elegido ésta por creer que es la más sencilla y la más usada.

- Hemos omitido la demostración de que si A tiene n elementos, P(A) tiene 2^n, porque para dicha demostración se emplean conceptos que se verán más adelante. No obstante, la demostraremos aquí para aquellos que tengan interés en conocerla.

Demostración:

Si A tiene n elementos, tenemos que formar: todos los subconjuntos de 1 elemento, que serán combinaciones de n elementos tomados de 1 en 1, o sea $\binom{n}{1}$; todos los subconjuntos de 2 elementos. que serán combinaciones de n elementos tomados de 2 en 2, o sea $\binom{n}{2}$, así sucesivamente hasta llegar a todos los subconjuntos de n elementos, que sólo hay uno y será $\binom{n}{n}$. También hay que añadir el conjunto vacío que es $1 = \binom{n}{0}$. Por tanto, todos los subconjuntos posibles son:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

y esta suma es el desarrollo del binomio de Newton de $(1 + 1)^n$, entonces resulta:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = (1 + 1)^n = 2^n$$

CONCLUSIONES TEMA V

<table>
<tr><td colspan="2">CONJUNTO DE LAS PARTES DE UN CONJUNTO</td><td colspan="2">Dado un conjunto A se llama conjunto de las partes de A, P(A) al conjunto formado por todos los subconjuntos posibles de A.
Si el conjunto A tiene n elementos, P(A) tiene 2^n elementos.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">OPERACIONES SOBRE EL CONJUNTO DE LAS PARTES DE UN CONJUNTO</td><td rowspan="2">UNION</td><td>DEFINICION</td><td>La unión de dos conjuntos se obtiene considerando todos los elementos que pertenezcan al menos a uno de los conjuntos. De la unión entre elementos de P(A) resulta otro elemento de P(A).</td></tr>
<tr><td>PROPIEDADES</td><td>Idempotente:
$B \in P(A) \quad B \cup B = B$
Conmutativa:
$B, C \in P(A) \quad B \cup C = C \cup B$
Asociativa:
$B, C, D \in P(A)$
$(B \cup C) \cup D = B \cup (C \cup D)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">INTERSECCION</td><td>DEFINICION</td><td>La intersección de dos conjuntos es el conjunto formado por los elementos comunes a A y B. De la intersección entre elementos de P(A) resulta otro elemento de P(A).</td></tr>
<tr><td>PROPIEDADES</td><td>Idempotente:
$B \in P(A) \quad B \cap B = B$
Conmutativa:
$B, C \in P(A) \quad B \cap C = C \cap B$
Asociativa:
$B, C, D \in P(A)$
$(B \cap C) \cap D = B \cap (C \cap D)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">PROPIEDADES COMUNES A LA $\cup$ e $\cap$</td><td colspan="2">Simplificativa:
$B, C \in P(A)$
$(B \cap C) \cup B = B$
$(B \cup C) \cap B = B$
Distributiva:
$B, C, D \in P(A)$
$B \cup (C \cap D) = (B \cup C) \cap (B \cup D)$
$B \cap (C \cup D) = (B \cap C) \cup (B \cap D)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">IGUALDAD ENTRE CONJUNTOS</td><td colspan="2">Dos conjuntos son iguales cuando tienen los mismos elementos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">CONJUNTO COMPLEMENTARIO</td><td colspan="2">Dado un conjunto E y un subconjunto S de E, se llama conjunto complementario de S en E al conjunto formado por elementos de E que no pertenecen a S.</td></tr>
</table>

RETICULO	Un conjunto tiene estructura de retículo cuando sobre él se han definido dos operaciones que verifican las propiedades: – conmutativa – asociativa – idempotente – simplificativa
ALGEBRA DE BOOLE	Es un conjunto que además de ser retículo goza de las propiedades: – distributiva – complementario $(P(A), \cup, \cap)$ es un álgebra de Boole.
LEYES DE MORGAN	Si $B, C \in P(A)$ se verifica: $(B \cup C)' = B' \cap C'$ $(B \cap C)' = B' \cup C'$

EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. Si A es el conjunto {1, b, 5}, hallar el conjunto P(A), y el complementario de cada elemento.

2. Si el conjunto A tiene 5 elementos, ¿cuántos elementos tendrá el conjunto P(A)?

3. Siendo P(A) el conjunto $\{\phi, \{b\}, \{1\}, \{0\}, \{b, 1\}, \{b, 0\}, \{1, 0\}, A\}$, hallar el conjunto A.

4. Formar el conjunto P(A) en cada uno de los siguientes casos:

   a) A = {□, △}
   b) A = {a}
   c) A = {□, △, a, e}

5. Si sabemos que el conjunto P(A) tiene 16 elementos, hallar cuántos elementos tendrá A.

6. Comprobar con diagramas de Venn la propiedad simplificativa de la unión e intersección de conjuntos.

7. Comprobar con diagramas de Venn la propiedad distributiva de la unión e intersección de conjuntos.

8. Si A y B son dos conjuntos y sabemos que

$$A \cap B = \{7, 8\},$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9\}$$

y $$A = \{2, 8, 7, 5\}$$

   Hallar el conjunto B.

9. Dados tres conjuntos A, B y C, ver si son verdaderas las expresiones siguientes:

   a) Si $A \cup B = A \cup C$ entonces $B = C$
   b) Si $A \cap B = A \cap C$ entonces $B = C$
   c) Si $A \cup B = \phi$ entonces $A = \phi$

10. Dados los conjuntos A = {a, c, r, s} y B = {2, a, r, 5}, hallar $(A \cup B) \cap A$ y $(A \cap B) \cup A$ y comprobar que son iguales.

11. Demostrar mediante la doble inclusión la igualdad de los conjuntos

$$A' - B' = B - A$$

12. Demostrar la igualdad entre los siguientes conjuntos

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

Esta propiedad ¿es la propiedad distributiva?

13. Demostrar la igualdad

$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

14. Dado el conjunto A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} y el subconjunto B = {2, 3, 5}, hallar el complementario del complementario de B. ¿Se puede hallar el complementario de A en B?

15. Ver si verifican la propiedad idempotente: la suma de números naturales, la diferencia de conjuntos, la intersección de conjuntos y el producto de números naturales.

16. Estudiar si el conjunto P(A) con las operaciones unión y diferencia de conjuntos tiene estructura de retículo o de álgebra de Boole.

17. El conjunto A = {1, 2} con las operaciones definidas con las tablas

$\perp$	1	2
1	1	1
2	1	1

T	1	2
1	2	2
2	2	2

¿Es un reticulo? ¿Qué propiedades de retículo cumplen y cuáles no?

18. Dados los conjuntos A = {1, 2, 3, 4}, B = {2, 4, 6, 8} y C = {1, 2}. Hallar los conjuntos $A \cup (B \cap C)$, $(A \cup B) \cap C$, $(A \cap B) \cup C$ y $A \cap (B \cup C)$.

19. Comprobar con diagramas de Venn las leyes de Morgan.

20. Dado el conjunto A = {a, b, c} y las operaciones dadas con las tablas siguientes:

$\bullet$	a	b	c
a	a	c	b
b	c	b	a
c	b	a	c

$*$	a	b	c
a	a	a	b
b	a	b	c
c	b	c	c

Ver si $(A, \cdot, *)$ es un retículo y un álgebra de Boole.

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. $P(A) = \{\phi, \{1\}, \{b\}, \{5\}, \{1, b\}, \{1, 5\}, \{b, 5\}, A\}$

$$\phi' = A,\ \{1\}' = \{b, 5\},\ \{b\}' = \{1, 5\},\ \{5\}' = \{1, b\}$$

$$\{1, b\}' = \{5\},\ \{1, 5\}' = \{b\},\ \{b, 5\}' = \{1\},\ A' = \phi$$

2. A 5 elementos

$$P(A) \text{ tendrá } 2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32 \text{ elementos}$$

3. $A = \{b, 1, 0\}$

4. a) $P(A) = \{\phi, \{\square\}, \{\Delta\}, \{\square, \Delta\}\}$

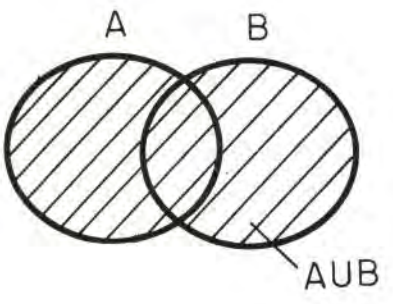
   b) $P(A) = \{\phi, \{a\}\}$

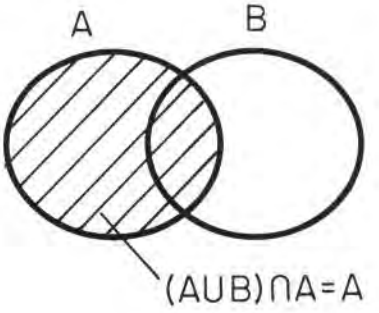
   c) $P(A) = \{\phi, \{\square\}, \{\Delta\}, \{a\}, \{e\}, \{\square, \Delta\}, \{\square, a\}, \{\square, e\}, \{\Delta, a\}, \{\Delta, e\}, \{a, e\}, \{\square, \Delta, a\}, \{\square, \Delta, e\}, \{\square, a, e\}, \{\Delta, a, e\}, A\}$

5. P(A); 16 elementos

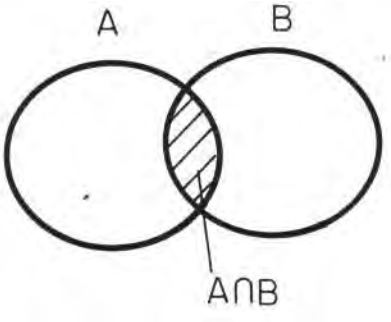
$$16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4; \text{ luego A tiene 4 elementos}$$

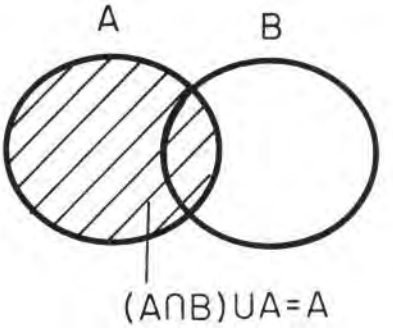
6. $(A \cup B) \cap A = A$





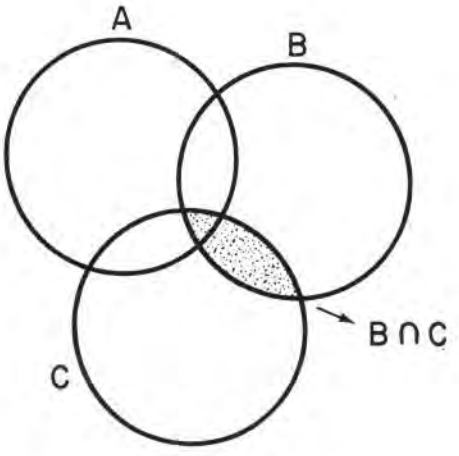
$(A \cap B) \cup A = A$

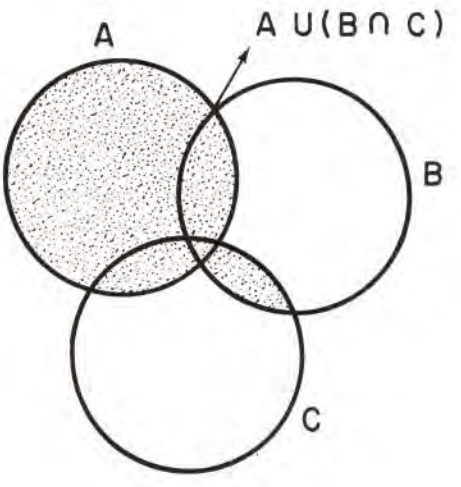




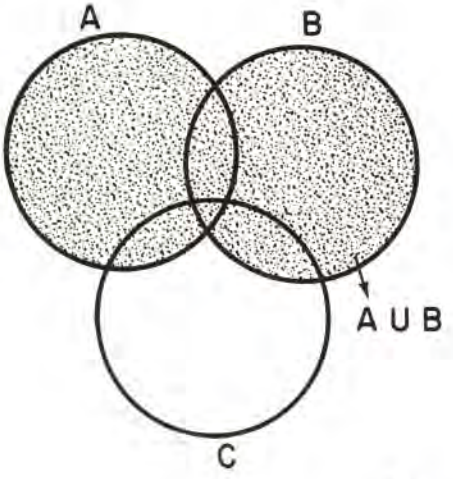
7. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

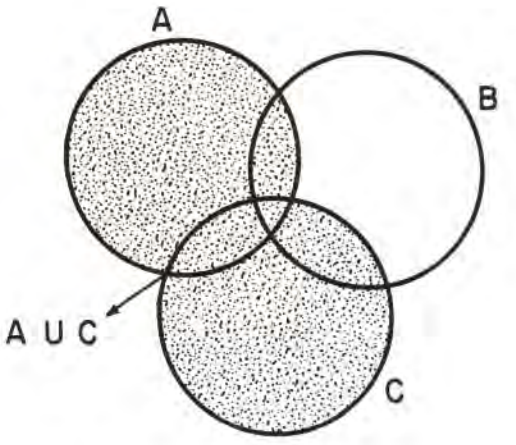
Representamos el primer miembro de la igualdad

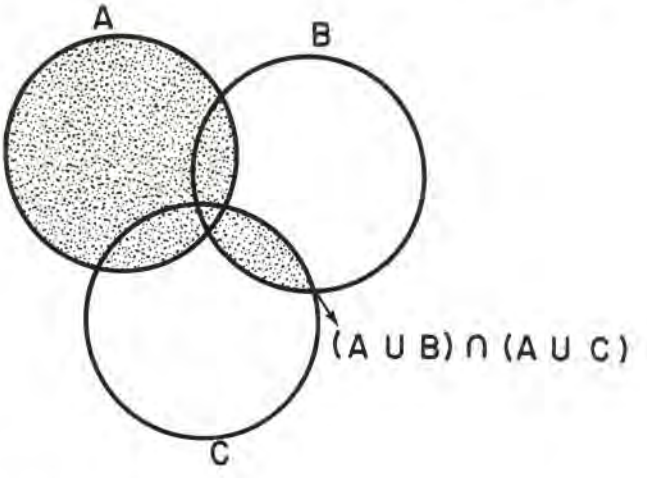




Representamos el segundo miembro de la igualdad



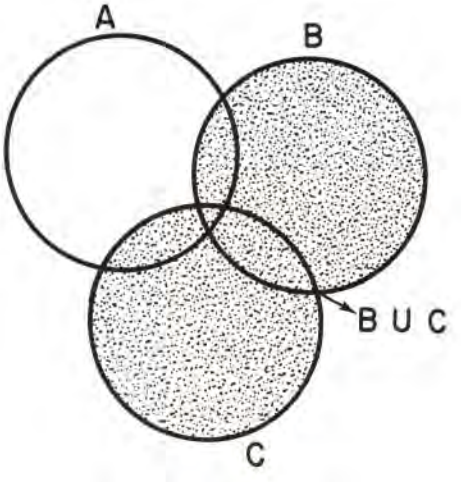


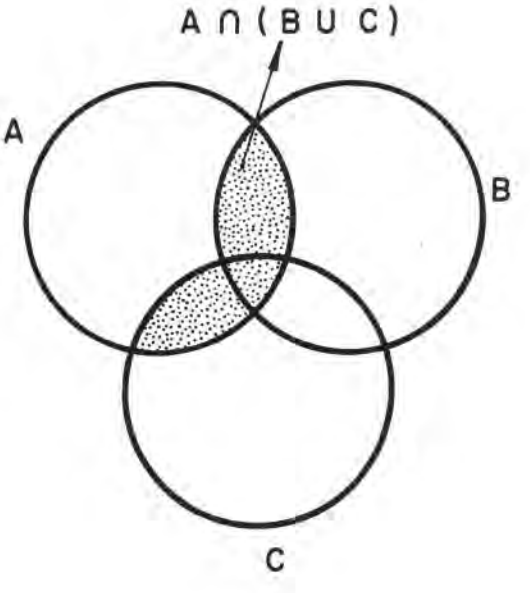


y vemos que los dos conjuntos coinciden

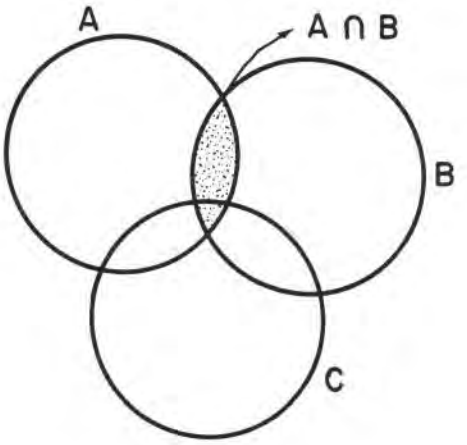
– $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

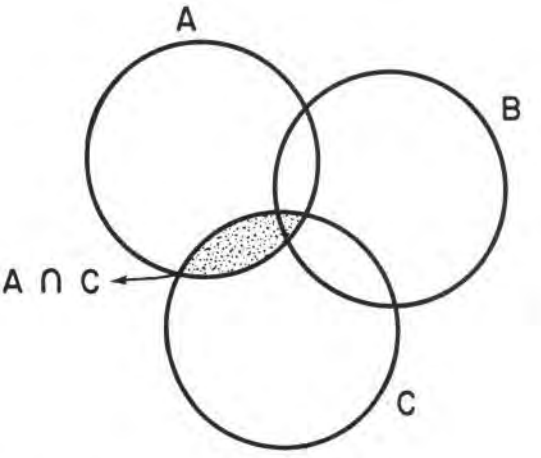
Representamos el primer miembro

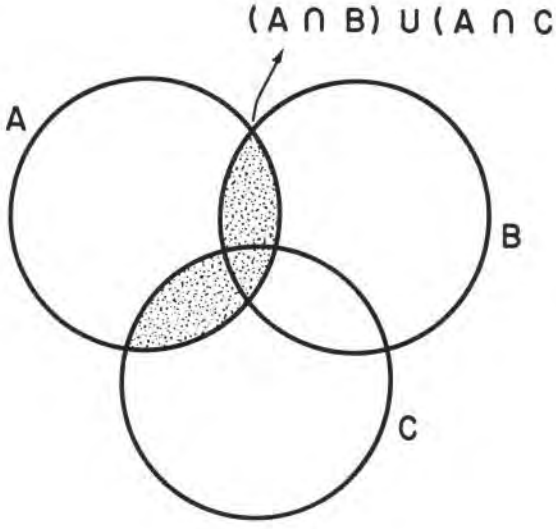




Representamos el segundo miembro







y vemos que los dos conjuntos coinciden.

8. B = {7, 8, 1, 3, 9}

9. a) No. Ejemplo:

   A = {1, 2, 3, 4},
   B = {2, 5, 7},
   C = {1, 2, 5, 7},
   $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\} = A \cup C$ y $B \neq C$

   b) No. Ejemplo:
   A = {1, 2, 3},
   B = {1, 5},
   C = {1, 6},
   $A \cap B = \{1\} = A \cap C$ y $B \neq C$

   c) Sí. $A = \phi$ y también $B = \phi$.

10. $(A \cup B) \cap A = \{a, c, r, s, 2, 5\} \cap \{a, c, r, s\} = \{a, c, r, s\} = A$
$(A \cap B) \cup A = \{a, r\} \cup \{a, c, r, s\} = \{a, c, r, s\} = A$

11. Si $x \in A' - B'$ implica $x \in A'$ y $x \notin B'$ entonces $x \notin A$ y $x \in B$, luego $x \in B - A$.

Si $x \in B - A$ implica $x \in B$ y $x \notin A$, entonces $x \notin B'$ y $x \in A'$, luego $x \in A' - B'$.

12. Si $x \in A - (B \cap C)$, $x \in A$ y $x \notin B \cap C$

luego $\begin{cases} x \in A \\ y \\ x \notin B \text{ ó } x \notin C \end{cases}$

entonces $\begin{cases} x \in A - B \\ o \\ x \in A - C \end{cases}$

luego $x \in (A - B) \cup (A - C)$

Si $x \in (A - B) \cup (A - C)$

implica $\begin{cases} x \in A - B \\ o \\ x \in A - C \end{cases}$

luego $\begin{cases} x \in A \text{ y } x \notin B \\ o \\ x \in A \text{ y } x \notin C \end{cases}$

luego $x \in A$ y $x \notin B \cap C$, entonces $x \in A - (B \cap C)$.

No es la propiedad distributiva, pues en el primer miembro aparece la $\cap$ y en el segundo la $\cup$.

13. Si $x \in (A - B) \cup (B - A)$ es que $\begin{cases} x \in A - B \\ o \\ x \in B - A \end{cases}$

entonces $\begin{cases} x \in A \text{ y } x \notin B \\ o \\ x \in B \text{ y } x \notin A \end{cases}$

entonces

$$x \in A \cup B \text{ y } x \notin A \cap B$$

luego

$$x \in (A \cup B) - (A \cap B)$$

Si $x \in (A \cup B) - (A \cap B)$ es que $\begin{cases} x \in A \cup B \\ y \\ x \notin A \cap B \end{cases}$

entonces $\begin{cases} x \in A \text{ ó } x \in B \\ y \\ x \notin A \cap B \end{cases}$

entonces

$$x \in A - B \text{ ó } x \in B - A$$

luego

$$x \in (A - B) \cup (B - A)$$

14. $B'_A = \{1, 4, 6\}$ $B''_A = \{2, 3, 5\} = B$

No se puede hablar de complementario de A en B, pues A no es subconjunto de B.

15. Suma de números naturales: NO

$$2 + 2 \neq 2$$

Diferencia de conjuntos: NO

$$A - A = \phi \neq A$$

Intersección de conjuntos: SI

$$A \cap A = A$$

Producto de números naturales: NO

$$3 \cdot 3 = 9 \neq 3$$

16. No es retículo y, por tanto, no es álgebra de Boole. La diferencia no tiene ninguna propiedad.

17. Idempotente:

$1 \perp 1 = 1$ $\quad$ $1 \top 1 = 2$

$2 \perp 2 = 1$ $\quad$ $2 \top 2 = 2$ $\quad$ NO

Conmutativa:

$1 \perp 2 = 2 \perp 1 = 1$ $\quad$ $1 \top 2 = 2 \top 1 = 2$ $\quad$ SI

Asociativa:

$(1 \perp 2) \perp 1 = 1 \perp 1 = 1$, $(1 \top 2) \top 1 = 2 \top 1 = 2$

$1 \perp (2 \perp 1) = 1 \perp 1 = 1$, $1 \top (2 \top 1) = 1 \top 2 = 2$ $\quad$ SI

Absorción:

$$(1 \perp 2)\ T\ 1 = 1\ T\ 1 = 2 \neq 1$$

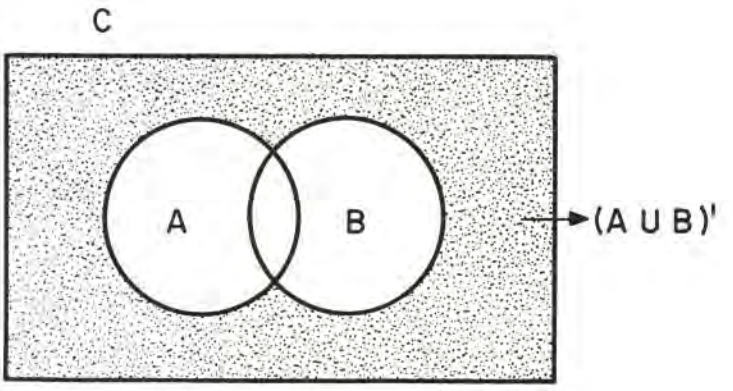
NO

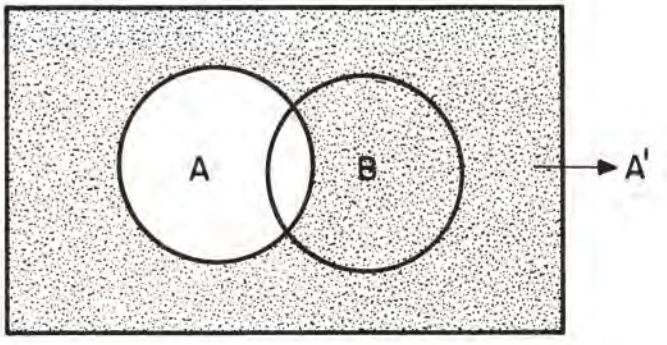
$$(1\ T\ 2) \perp 1 = 2 \perp 1 = 1$$

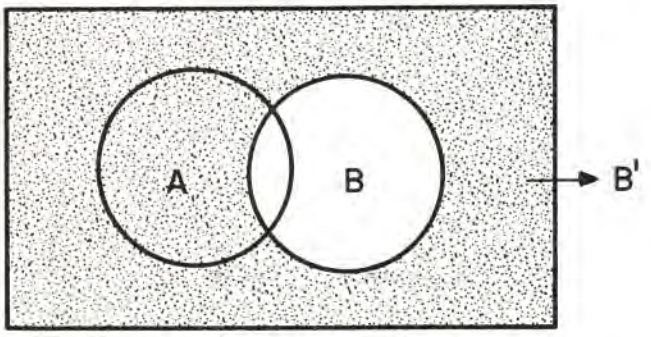
No es retículo.

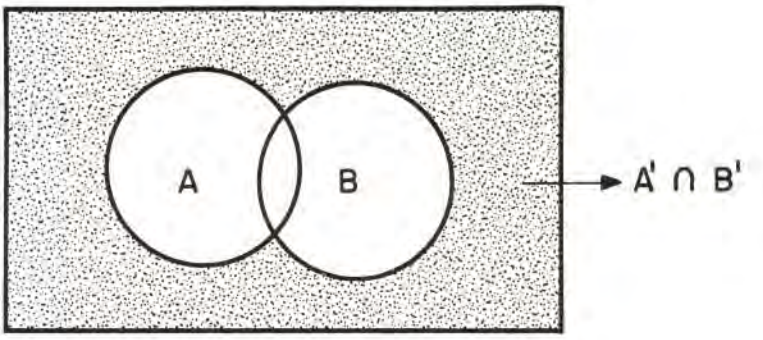
18. $A \cup (B \cap C) = A \cup \{2\} = \{1, 2, 3, 4\}$
$(A \cup B) \cap C = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\} \cap \{1, 2\} = \{1, 2\}$
$(A \cap B) \cup C = \{2, 4\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 4\}$
$A \cap (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{1, 2, 4, 6, 8\} = \{1, 2, 4\}$

19. $(A \cup B)' = A' \cap B'$

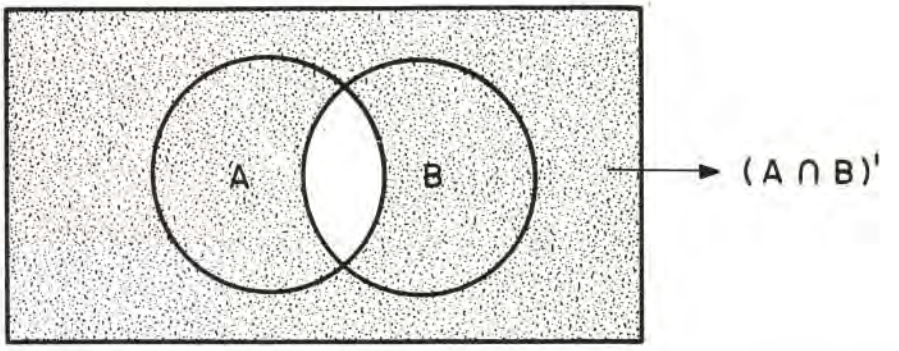


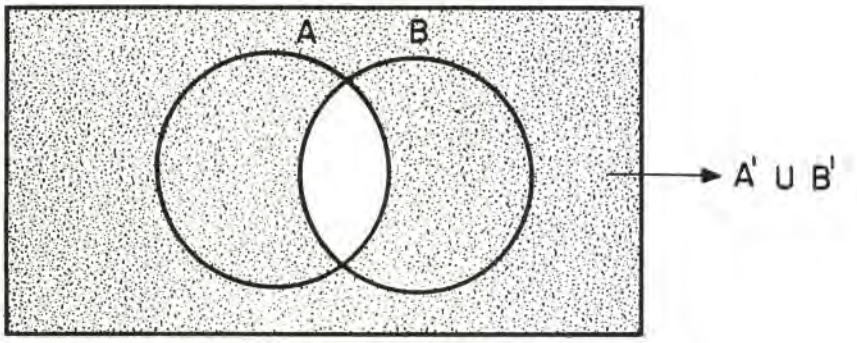






$(A \cap B)' = A' \cup B'$





20. Idempotente:

$a \cdot a = a$	$a * a = a$	
$b \cdot b = b$	$b * b = b$	Sí
$c \cdot c = c$	$c * c = c$	

Conmutativa: Si, pues las tablas son simétricas respecto a la diagonal principal.

Simplificativa:

$$(a \cdot b) * a = c * a = b \neq a$$

luego no es simplificativa

Por tanto, no es retículo, ni álgebra de Boole

TEMA VI

LOGICA ELEMENTAL Y FORMAL

ESQUEMA/RESUMEN

1. Proposiciones.
   - 1.1. Definición.
   - 1.2. Valor lógico de una proposición.
   - 1.3. Tipos de proposiciones

2. Operaciones con proposiciones.
   - 2.1. Disyunción.
   - 2.2. Conjunción.

3. Negación de una proposición.

4. Implicación lógica.

5. Equivalencia lógica.

INSTRUCCIONES PARA EL ESTUDIO DEL TEMA

Iniciamos el estudio de la lógica matemática; solamente presentaremos unas breves nociones fundamentadas en la Teoría de Conjuntos, que el alumno ya conoce.

Hemos procurado que el planteamiento sea muy elemental y laborioso; por eso puede parecer en algunas ocasiones reiterativo. Aconsejamos que en el estudio de este tema se vaya muy despacio, tratando de relacionar todo lo aquí expuesto con lo estudiado en las primeras lecciones de la Unidad Didáctica anterior.

Es muy importante que el alumno aprenda a manejar con soltura las proposiciones para entender los temas siguientes; por eso, insistimos que preste mucha atención a la parte práctica del presente tema.

1. PROPOSICION

1.1. Definición

Se llama *proposición* a todo conjunto de palabras que «tenga sentido lógico» y del que se pueda averiguar si es verdadero o es falso.

De esta primera definición conviene fijarse en dos aspectos: primero, que el conjunto de palabras que constituyen una proposición tiene que tener sentido; así, por ejemplo, la expresión *«cosa es con»* no tiene sentido; por tanto, no es una proposición. Segundo, del conjunto de palabras que define la proposición podamos afirmar si es verdadero o falso. Por ejemplo, de la pregunta *«¿qué hora es?»* no se puede afirmar si es verdadero o falso, luego, aunque preguntar *«¿qué hora es?»* tenga sentido lógico, tampoco es una proposición.

Por el contrario, serán proposiciones: *«son las cuatro y media»*, *«la tierra es cuadrada»*, *«el mar es amarillo»*, *«la ciudad de Valencia es pequeña»*.

Por tanto, no son proposiciones aquellas expresiones que no tengan sentido lógico o aquellas de las que, a pesar de tener sentido, no se puede afirmar si son verdaderas o falsas. En general, las interrogaciones y las exclamaciones no son proposiciones.

Resumiendo, diremos que para que un conjunto de palabras sea una proposición es necesario que se verifiquen dos condiciones:

1.ª Tener sentido lógico.

2.ª Que se pueda averiguar si es verdadero o falso.

En adelante representaremos las proposiciones mediante las letras p, q, r, s, ..., que es la nomenclatura habitualmente utilizada.

Ejercicios y ejemplos

1. La expresión «*come pescado*» no es una proposición, pues es un mandato y no se puede averiguar si es verdadera o falsa.

2. Si decimos «*¡Ojalá llueva mañana!*», tampoco es una proposición, por no poder afirmar si es verdadero o falso.

3. «*En el polo Norte hace mucho calor*» sí es una proposición, pues tiene sentido y podemos afirmar que es falsa.

4. Al afirmar «*el hombre tiene dos brazos*» sí es una proposición por tener sentido y saber que es verdadera.

5. La expresión «*Corre el la cierre*» no tiene sentido; por lo tanto, no es proposición.

6. De las siguientes expresiones o conjuntos de palabras, decir cuáles son proposiciones y cuáles no lo son:

   p: «*Ven a mi casa*».

   q: «*Estamos bebiendo cerveza*».

   r: «*Ayer fue martes*».

   s: «*¿Quieres venir al cine?*».

   t: «*Mesa está con*».

   u: «*El sol es verde*».

   v: «*El perro es una planta*».

   x: «*¡Cuidado con el tren!*».

   Las expresiones: q, r, u y v son proposiciones, pues tienen sentido y se puede averiguar si son verdaderas o falsas. Las demás no son proposiciones, pues la «t» no tiene sentido y de las p, s y x no se puede averiguar si son verdaderas o falsas.

1.2. Valor lógico

Hemos visto que toda proposición tiene que ser verdadera o falsa. Para reflejar esta situación conviene que adoptemos un símbolo; a todas las proposiciones que sean verdaderas les asociaremos el símbolo *V* y diremos que *V* es su valor lógico.

Análogamente a todas las proposiciones falsas les asociaremos el símbolo *F* y diremos que *F* es su valor lógico.

Así, si *P* es una proposición cierta, diremos que su valor lógico es V y lo representaremos por V(P) = V; y si es falsa, diremos que su valor lógico es *F* y lo representaremos V(P) = F.

Por ejemplo, si *P* es la proposición: *«El jueves es un día de la semana»*, diremos que V(P) = V; y si P es: *«El agua del mar no está salada»*, diremos que V(P) = F.

Ejercicios y ejemplos

1. Hallar el valor lógico de las siguientes proposiciones:

   p: «El Miño es un río».

   q: «El siete es un número par».

   r: «La naranja es un animal».

   s: «Santander es una ciudad española».

   t: «El cemento se come».

   u: «Los ceniceros no existen».

   Unicamente son verdaderas las proposiciones p y s; por lo tanto será:

   $$V(p) = V \qquad V(s) = V$$
   $$V(q) = F \qquad V(t) = F$$
   $$V(r) = F \qquad V(u) = F$$

   Por supuesto, que una proposición no puede ser verdadera y falsa a la vez, será o bien verdadera o bien falsa.

1.3. Tipos de proposiciones

Las proposiciones pueden ser de dos tipos: *proposiciones simples* y *proposiciones compuestas*. Todas las proposciones que hemos visto hasta ahora son simples, es decir, las proposiciones simples son aquellas cuyo enunciado es mínimo. Las proposiciones compuestas son las que están formadas por dos o más proposiciones simples.

Con unos ejemplos lo veremos más claramente. La proposición *«Ayer fue martes y antes de ayer fue lunes»* es una proposición compuesta formada por las dos proposiciones simples: *«Ayer fue martes»*, *«Antes de ayer fue lunes»*.

También será una proposición compuesta la siguiente: *«Si Juan estudia, entonces sabe hacer los problemas»*, ya que está formada por las proposiciones: *«Juan estudia»*, *«Juan sabe hacer los problemas»*, que son proposiciones simples.

Análogamente será compuesta la proposición: *«Hace frío o hace calor»*.

Las proposiciones simples no se pueden descomponer en otras más sencillas. Por ejemplo, serán proposiciones simples: *«El agua de los océanos está salada»*, *«Este libro es verde»*, *«El año bisiesto tiene trescientos sesenta y seis días»*, *«Las sillas no tienen patas»*, etc.

Ejercicios y ejemplos

1. De las siguientes proposiciones, decir cuáles son simples, cuáles son compuestas y estas últimas de cuántas simples están formadas:

   p: «Hace frío y nieva»
   q: «Algunos peces viven en el mar»
   r: «José canta y toca el violín, es un gran músico»
   s: «Ayer comimos pan»
   t: «Siempre hay nubes o está el cielo claro»
   u: «Yo soy un hombre joven»

   Las proposiciones simples son la q, la s y la u, pues no se pueden descomponer en otras más sencillas. Las restantes son compuestas y están formadas por: La «p» por dos proposiciones simples, que son: *«Hace frío»*, *«nieva»*.

   La «r» por tres proposiciones simples: *«José canta»*, *«José toca el violín»*, *«José es un gran músico»*.

   La «t» por dos proposiciones simples: *«Simpre hay nubes»*, *«Está el cielo claro»*.

2. Formar una proposición compuesta que conste de cinco proposiciones simples.

   La proposición *«Ayer estuve en casa de mi hermano, en casa del médico, en la fábrica, en unos almacenes y volví a mi casa»*, es compuesta, está formada por cinco proposiciones simples, que son: *«Ayer estuve en casa de mi hermano»*, *«Ayer estuve en casa del médico»*, *«Ayer estuve en la fábrica»*, *«Ayer estuve en unos almacenes»*, *«Ayer volví a mi casa»*.

2. OPERACIONES CON PROPOSICIONES

Por medio de las operaciones, partiendo de unas proposiciones iniciales, obtendremos otras nuevas. Veamos seguidamente algunas operaciones con proposiciones.

2.1. Disyunción de proposiciones

Dadas dos proposiciones p y q, se llama proposición disyunción de *p* y *q* a una nueva proposición, que está caracterizada por ser verdadera cuando lo sea p ó q ó ambas a la vez. A la disyunción de p y q se la representa por *p v q*.

Para aclarar esta definición construimos la siguiente tabla de utilidad para todos los valores posibles de *p* y *q*.

p	q	p v q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Esta tabla expresa que si *p* y *q* son verdaderas entonces *p v q* es verdadera, si *p* es verdadera y *q* falsa entonces *p v q* es verdadera; igualmente si *p* es falsa y *q* verdadera, entonces *p v q* es verdadera, y únicamente *p* disyunción *q*, *p v q*, será falsa cuando lo sean *p* y *q* a la vez.

Veamos con algunos ejemplos cómo se forma la proposición disyunción de dos proposiciones *p* y *q*. Si *p* es la proposición *«el dos es un número»* y *q* es *«el hombre tiene dos cabezas»*, la disyunción de ambas será la proposición: *«el dos es un número o el hombre tiene dos cabezas»*. Se ve claramente que la proposición *p v q* es una proposición compuesta formada por las proposiciones simples *p* y *q*. Como la proposición *p* es verdadera y la *q* es falsa, resulta que la proposición *p v q* es verdadera, por serlo al menos una de las dos, o sea:

$$V(p) = V \quad V(q) = F$$

luego

$$V(p \vee q) = V$$

Veamos otro ejemplo: Si *p* es la proposición: *«El gato es una persona»* y *q* es *«Zaragoza está en Italia»*, la proposición *p* disyunción *q* será: *«El gato es una persona o Zaragoza está en Italia»*. En este caso las proposiciones *p* y *q* son falsas; por tanto, la proposición disyunción también será falsa

$$V(p) = F \quad V(q) = F$$

luego

$$V(p \vee q) = F$$

De la misma forma que hemos definido la disyunción de dos proposiciones, se define la disyunción de tres o más proposiciones. Para que la disyunción de tres o más proposiciones sea falsa tienen que ser falsas todas las proposiciones a la vez. Si hay una o más de una proposición verdadera, la disyunción de todas ellas será verdadera.

Pongamos un ejemplo de disyunción de tres proposiciones. Sea *p* la proposición *«El día tiene veinte horas»*, *q* *«La semana tiene siete días»* y *r* *«El termómetro mide la velocidad»*. Entonces la proposición disyunción *p v q v r* será: *«El día tiene veinte horas o la semana tiene siete días o el termómetro mide la velocidad»*. Y el valor lógico de *p v q v r* será verdadero, ya que la proposición *q* es verdadera

$$V(p) = F \quad V(q) = V \quad V(r) = F$$

entonces

$$V(p \vee q \vee r) = V$$

La operación disyunción entre proposiciones tiene cierta analogía con la operación unión entre conjuntos, ya que la disyunción de proposiciones será verdadera siempre que sea verdadera al menos una de las proposiciones, y en la unión de conjuntos, un elemento pertenece a la unión siempre que pertenezca al menos a uno de los conjuntos.

Ejercicios y ejemplos

1. Dadas las proposiciones *p* y *q*, hallar la proposición *p v q* y su valor lógico en cada uno de los siguientes casos:

a) p: «La ropa sirve para vestirse»
q: «El cielo es amarillo»

b) p: «Los libros se comen»
q: «Las rosas son animales»

c) p: «En los desiertos hay mucha vegetación»
q: «El sol da calor»

d) p: «Dos y dos son cuatro»
q: «Los ojos sirven para ver»

Caso a): La proposición *p v q* será: *«La ropa sirve para vestirse o el cielo es amarillo»*

como

$$V(p) = V \quad y \quad V(q) = F$$

entonces será

$$V(p \vee q) = V$$

Caso b): la disyunción *p v q* es: *«Los libros se comen o las rosas son animales»*

$$V(p) = F \quad y \quad V(q) = F$$

por lo tanto,

$$V(p \vee q) = F$$

Caso c): La proposición *p v q* será: *«En los desiertos hay mucha vegetación o el sol da calor»*

$$V(p) = F \quad y \quad V(q) = V$$

luego

$$V(p \vee q) = V$$

Caso d): *p v q* es *«Dos y dos son cuatro o los ojos sirven para ver»*

El valor lógico es

$$V(p) = V \quad V(q) = V$$

luego

$$V(p \vee q) = V$$

2. Dadas tres proposiciones *p*, *q* y *r* formar una tabla en que aparezcan todos los posibles valores de p, q, r y de p v q v r

p	q	r	p v q v r
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	V
F	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	V	V
F	F	F	F

La tabla expresa que *p v q v r* siempre es verdadera excepto en el caso en que las tres proposiciones *p*, *q* y *r* son falsas, que es falsa.

2.2. Conjunción de proposiciones

Si tenemos dos proposiciones *p* y *q*, llamaremos proposición conjunción de *p* y *q* a una nueva proposición, que está caracterizada por ser cierta únicamente cuando lo sean p y q a la vez, y se le representa por $p \wedge q$.

Igual que en el caso de la disyunción construimos la siguiente tabla en la que se consideran todos los casos posibles:

p	q	p ∧ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Esta tabla expresa que únicamente cuando *p* y *q* son verdaderas, $p \wedge q$ es verdadera y que en todos los demás casos en que una de ellas o las dos son falsas resulta que $p \wedge q$ es falsa.

Veamos ahora con algunos ejemplos cómo se forma la conjunción de proposiciones. Si *p* es la proposición «*Abril tiene treinta días*» y *q* «*El año tiene cuatro estaciones*», la proposición conjunción de *p* y *q* será $p \wedge q$: «*Abril tiene treinta días y el año cuatro estaciones*». La proposición $p \wedge q$ es una proposición compuesta formada por las dos proposiciones simples *p* y *q*. En este caso resulta que *p* es verdadera y *q* es verdadera; por lo tanto, $p \wedge q$ también es verdadera

$$V(p) = V \quad V(q) = V$$

luego

$$V(p \wedge q) = V$$

Veamos otro ejemplo: Si *p* es «*Extremadura tiene dos provincias*» y *q* es «El vino se saca del olivo», la proposición conjunción $p \wedge q$ es: «*Extremadura tiene dos provincias y el vino se saca del olivo*». Como *p* es una proposición verdadera y *q* es una proposición falsa, resulta que $p \wedge q$ es una proposición falsa

$$V(p) = V \quad V(q) = F$$

BIBLIOTECA PUBLICA PTO. STA. MARIA

luego

$$V(p \wedge q) = F$$

También se puede hallar la conjunción de tres o más proposiciones de la misma manera que la hemos hallado para dos. La conjunción de tres o más proposiciones será verdadera solamente cuando lo sean todas a la vez. En cualquier otro caso será falsa.

Pongamos un ejemplo de conjunción de tres proposiciones. Sea *p*: *«El pescado es un alimento»; q: «Los pájaros tienen alas»*, y *r: «Las plantas no son seres vivos»*.

La proposición conjunción $p \wedge q \wedge r$ será *«El pescado es un alimento y los pájaros tienen alas y las plantas no son seres vivos»*.

Como *p* y *q* son verdaderas y *r* es falsa, resulta que $p \wedge q \wedge r$ es falsa

$$V(p) = V \quad V(q) = V \quad V(r) = F$$

luego

$$V(p \wedge q \wedge r) = F$$

La operación conjunción entre proposiciones es análoga a la intersección entre conjuntos, pues la conjunción de proposiciones únicamente es cierta cuando lo son cada una de las proposiciones, y en la intersección de conjuntos, un elemento pertenece a dicha intersección solamente si pertenece a cada uno de los conjuntos.

Ejercicios y ejemplos

1. Dadas las proposiciones siguientes, hallar la proposición conjunción y su valor lógico en cada uno de los casos:

   a) p: «Los coches circulan por las carreteras»
      q: «Los barcos navegan por el mar»

   b) p: «El agua es incolora»
      q: «Ninguna casa tiene ventanas»

   c) p: «Los niños cuando nacen saben andar»
      q: «La lechuga es un vegetal»
      r: «El invierno va después del otoño»

   d) p: «El agua se come»
      q: «El pan se bebe»

   a): La proposición $p \wedge q$ es *«Los coches circulan por las carreteras y los barcos navegan por el mar»*.

$$V(p) = V \quad V(q) = V$$

luego

$$V(p \wedge q) = V$$

b): $p \wedge q$ es «*El agua es incolora y ninguna casa tiene ventanas*»

Su valor es falso, pues:

$$V(p) = V \quad V(q) = F$$

luego

$$V(p \wedge q) = F$$

c): La conjunción de las tres proposiciones es $p \wedge q \wedge r$: «*Los niños cuando nacen saben andar y la lechuga es un vegetal y el invierno va después del otoño*».

Para ver el valor lógico, observemos el valor de cada proposición:

$$V(p) = F \quad V(q) = V \quad y \quad V(r) = V$$

luego

$$V(p \wedge q \wedge r) = F$$

por ser falsa una de ellas.

d): $p \wedge q$ es «*El agua se come y el pan se bebe*».

Como ambas son falsas, $p \wedge q$ es falsa

$$V(p) = F \quad V(q) = F$$

luego

$$V(p \wedge q) = F$$

2. Dadas tres proposiciones p, q y r, si p es verdadera, q falsa y r verdadera, ¿cómo serán $p \wedge q$, $p \wedge r$ y $q \wedge r$?

$$V(p) = V \quad V(q) = F$$

luego

$$V(p \wedge q) = F$$

$$V(p) = V \quad V(r) = V$$

luego

$$V(p \wedge r) = V$$

$$V(q) = F \qquad V(r) = V$$

luego

$$V(q \wedge r) = F$$

3. NEGACION DE UNA PROPOSICION

Si tenemos una proposición p, llamaremos proposición negación de p y la representaremos por $\bar{p}$ a una nueva proposición que será verdadera cuando p sea falsa y será falsa cuando p sea verdadera.

Esta definición la expresamos con la siguiente tabla:

p	$\bar{p}$
V	F
F	V

Veamos algunos ejemplos. Si *p* es la proposición *«Hoy es lunes»*, la proposición negación $\bar{p}$ es *«Hoy no es lunes»*. Es evidente que si *p* es verdadera, $\bar{p}$ será falsa, y si *p* es falsa, entonces $\bar{p}$ es verdadera.

Si consideramos la proposición *p: «El jamón se saca del cerdo»*, la proposición negación será $\bar{p}$: *«El jamón no se saca del cerdo»*.

Como el valor lógico de *p* es V, el de $\bar{p}$ es falso

$$V(p) = V$$

luego

$$V(\bar{p}) = F$$

Está bien claro que una proposición *p* y su negación $\bar{p}$ nunca pueden tener el mismo valor lógico, es decir, nunca pueden ser ambas verdaderas o ambas falsas.

Si decimos la proposición *p*: *«Algunos hombres son blancos»*, la proposición $\bar{p}$ será: *«Ningún hombre es blanco»*. Pues es la negación de *p*, o sea, la proposición contraria. El valor lógico de *p* es verdadero y el de $\bar{p}$ es falso.

Una propiedad de la negación de una proposición es que: la negación de la negación de una proposición es ella misma, es decir, $\bar{\bar{p}} = p$.

Por ejemplo, si *p* es *«Mañana es martes»*, $\bar{p}$ será *«Mañana no es martes»*, y la negación de esta proposición $\bar{\bar{p}}$ es *«Mañana es martes»*, o sea, vuelve a ser otra vez la proposición inicial *p*.

Si tenemos una proposición *p*, se verifica que $p \vee \bar{p}$ es siempre verdadera, ya que una de las dos *p* o $\bar{p}$ es siempre verdadera. Por el contrario, $p \wedge \bar{p}$ siempre es falsa, ya que una de las dos *p* o $\bar{p}$ es siempre falsa.

La negación de una proposición es análoga al complementario de un conjunto, ya que si una proposición es cierta, su negación es falsa y viceversa. Y si un elemento pertenece a un conjunto no pertenece a su complementario y también al revés.

Ejercicios y ejemplos

Hallar la negación de las siguientes proposiciones:

p: «Todos los hombres son morenos»
q: «Algún día iré a tu casa»
r: «Ayer llovió aquí»
s: «Yo tengo muchos cuadros»

La negación de estas proposiciones es:

$\bar{p}$: «Algunos hombres no son morenos»
$\bar{q}$: «Ningún día iré a tu casa»
$\bar{r}$: «Ayer no llovió aquí»
$\bar{s}$: «Yo no tengo muchos cuadros»

4. IMPLICACION LOGICA

Dadas dos proposiciones *p* y *q* diremos que la proposición *p* implica la proposición *q* y se representa por $p \Rightarrow q$, cuando ambas son verdaderas, ambas son falsas o bien *p* es falsa y *q* es verdadera. O sea, que *p* no implica *q*, únicamente en el caso en que *p* sea verdadera y *q* falsa.

En una tabla resumiremos esta definición

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Esta tabla expresa que si *p* y *q* son verdaderas, $p \Rightarrow q$ es verdadera; que si p es verdadera y q es falsa, $p \Rightarrow q$ es falsa, o sea, que p no implica q; que si p es falsa y q verdadera entonces p implica q, y que si p y q son falsas, entonces p implica q.

Si p no implica q, se dice que la proposición $p \Rightarrow q$ es falsa y también se representa por $p \not\Rightarrow q$.

Veamos algunos ejemplos: Si *p* es *«Roma es la capital de Italia»* y *q* *«El maíz es un cereal»*, $p \Rightarrow q$ será la proposición: *«Roma es la capital de Italia, luego el maíz es un cereal»*.

Como *p* es verdadera y *q* es verdadera, *p* implica *q*, o sea, $p \Rightarrow q$ es verdadera:

$$V(p) = V \qquad V(q) = V$$

luego

$$V(p \Rightarrow q) = V$$

En el caso en que p sea la proposición: «*Los árboles tienen raíces*» y q la proposición: «*El año tiene once meses*». La proposición $p \Rightarrow q$ es «*Los árboles tienen raíces luego el año tiene once meses*».

Como p es verdadera y q es falsa, $p \Rightarrow q$ es falsa; por tanto, p no implica q, $p \not\Rightarrow q$.

$$V(p) = V \qquad V(q) = F$$

luego

$$V(p \Rightarrow q) = F$$

También podemos decir que la proposición p implica la proposición q cuando se verifica que la proposición $\bar{p} \vee q$ es verdadera, o sea,

$$V(\bar{p} \vee q) = V$$

Veamos que en esta condición están incluidos los tres casos en que p implica q y no está incluido el caso en que p no implica q.

1. Si p es verdadera y q verdadera, sabemos que p implica q.

   Si p es verdadera, $\bar{p}$ será falsa y entonces $\bar{p} \vee q$ es verdadera.

2. Si p es falsa y q verdadera, p implica q.

   Como p es falsa, $\bar{p}$ será verdadera, luego $\bar{p} \vee q$ es verdadera.

3. Si p es falsa y q falsa, p implica q.

   Como p es falsa, $\bar{p}$ es verdadera, por tanto, $\bar{p} \vee q$ es verdadera.

4. Si p es cierta y q falsa, sabemos que p no implica q.

   Como p es cierta, $\bar{p}$ es falsa y q también es falsa, luego no se verifica que $\bar{p} \vee q$ sea verdadera, ya que es falsa.

Por lo tanto, siempre que p implica q se verifica que $\bar{p} \vee q$ es una proposición verdadera y siempre que se verifique que $\bar{p} \vee q$ es verdadera, entonces p implica q. Esto quiere decir que las dos definiciones de implicación son equivalentes.

La implicación tiene cierta analogía con la inclusión de conjuntos, ya que si $p \Rightarrow q$ y *p es verdadera* q tiene que ser verdadera y si p es falsa q puede ser cierta o falsa. Entre dos conjuntos, si $A \subset B$ un elemento que pertenezca a A tiene que pertenecer a B y un elemento que no pertenezca a A puede pertenecer o no pertenecer a B.

Ejercicios y ejemplos

1. Dadas las siguientes proposiciones, ver en qué casos *p* implica *q*:

   a) p: «El agua es un líquido»
      q: «En el mar viven las aves»

   b) p: «Marte no es un planeta»
      q: «El plátano es una fruta»

   c) p: «Ninguna planta tiene flores»
      q: «El teléfono no existe»

   d) p: «El oro es un metal»
      q: «El lápiz sirve para escribir»

   a) *p* es cierta y *q* es falsa, luego *p* no implica *q*

$$V(p) = V \quad V(q) = F$$

   luego

$$V(p \Rightarrow q) = F$$

   b) $V(p) = F \quad V(q) = V$; luego

$$V(p \Rightarrow q) = V$$

   p implica q

   c) $V(p) = F \quad V(q) = F$; luego

$$V(p \Rightarrow q) = V$$

   p implica q

   d) Las dos proposiciones son ciertas; luego *p* implica *q*

$$V(p) = V \quad V(q) = V$$

   luego

$$V(p \Rightarrow q) = V$$

2. Con los mismos ejemplos del ejercicio anterior comprobar en qué casos se verifica que $q \Rightarrow p$:

   a) *q* es falsa y *p* cierta, luego *q* implica *p*

$$V(q) = F \quad V(p) = V$$

   luego

$$V(q \Rightarrow p) = V$$

b) *q es cierta y p* es falsa, entonces *q* no implica *p*

$$V(q) = V \quad V(p) = F$$

luego

$$V(q \Rightarrow p) = F$$

c) Las dos proposiciones son falsas, luego *q* implica *p*

$$V(q) = F \quad V(p) = F$$

luego

$$V(q \Rightarrow p) = V$$

d) Las dos proposiciones son ciertas; por tanto, *q* implica *p*

$$V(q) = V \quad V(p) = V$$

luego

$$V(q \Rightarrow p) = V$$

3. Dadas tres proposiciones p, q y r, siendo p verdadera, r falsa y sabiendo que $p \Rightarrow q$ es verdadera, ¿puede verificarse que *q* implique *r*?, ¿y que *r* implique *q*?

Si *p* es verdadera y se verifica que $p \Rightarrow q$, entonces *q* también es verdadera. Como *r* es falsa, no se puede verificar que *q* implique *r*, o sea, $q \not\Rightarrow r$.

Como *r* es falsa y *q* verdadera, sí se verifica que *r* implica *q*:

$$V(r \Rightarrow q) = V$$

4. Dadas dos proposiciones *p* y *q*, sabiendo que *p* implica *q*, comprobar si se verifica en algún caso que $\bar{p}$ implique $\bar{q}$ y que $\bar{q}$ implique $\bar{p}$.

Si *p* implica *q*, puede haber tres casos:

a) *p* y *q* verdaderas

b) *p* y *q* falsas

c) *p* falsa y *q* verdadera

Veamos cada uno de los tres casos:

a) Si *p* y *q* son verdaderas, entonces $\bar{p}$ y $\bar{q}$ son falsas; por tanto, se verifica que $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$ y que $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$.

b) Si *p* y *q* son falsas. Entonces $\bar{p}$ y $\bar{q}$ son verdaderas; luego se verifica que $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$ y que $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$.

c) Si *p* es falsa y *q* verdadera, resulta que $\bar{p}$ es verdadera y $\bar{q}$ falsa; por tanto $\bar{p} \not\Rightarrow \bar{q}$ y $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$. Luego siempre que se verifica $p \Rightarrow q$ se verifica que $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$. Sin embargo, $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$ solamente se verifica en dos casos.

5. EQUIVALENCIA LOGICA

Si tenemos dos proposiciones *p* y *q* diremos que *p* y *q* son equivalentes, y lo expresaremos por $p \Leftrightarrow q$, cuando ambas tengan el mismo valor lógico. Es decir, cuando las dos son verdaderas o las dos son falsas.

Formamos la tabla correspondiente:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Esta tabla indica que cuando *p* y *q* son verdaderas o son falsas, entonces *p* y *q* son equivalentes, y cuando una de ellas es verdadera y otra falsa, la equivalencia $p \Leftrightarrow q$ es falsa, o sea, no son equivalentes. Cuando dos proposiciones p y q no son equivalentes se expresa $V(p \Leftrightarrow q) = F$ o también $p \not\Leftrightarrow q$.

La equivalencia lógica también se llama doble implicación, ya que *p* es equivalente a *q*, es lo mismo que decir que *p* implica *q*, $p \Rightarrow q$, y que *q* implica *p*, $q \Rightarrow p$.

El símbolo $\Leftrightarrow$ se suele leer *«equivale a»*, *«si y sólo si»* o *«cuando y sólo cuando»*.

Asi $p \Leftrightarrow q$ se leerá: *p equivale a q, p si y sólo si q* o *p cuando y sólo cuando q.*

Consideremos algunos ejemplos. Si *p* es la proposición *«El jueves es un día de la semana»* y *q* *«El sol da luz»*. La proposición $p \Leftrightarrow q$ será *«El jueves es un día de la semana si y sólo si el sol da luz»*.

Como las dos proposiciones son ciertas, son equivalentes, es decir:

$$V(p) = V \qquad V(q) = V$$

luego

$$V(p \Leftrightarrow q) = V$$

Si consideramos *p «El pescado no es un alimento»* y *q «El hombre tiene tres brazos»*, como las dos proposiciones son falsas, son equivalentes y diremos que $p \Leftrightarrow q$ es *«El pescado no es un alimento si y solamente si el hombre tiene tres brazos»*.

$$V(p) = F \qquad V(p) = F$$

luego

$$V(p \Leftrightarrow q) = V$$

La equivalencia lógica de proposiciones es análoga a la igualdad entre conjuntos, ya que dos proposiciones son equivalentes si tienen el mismo valor lógico y dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos.

Ejercicios y ejemplos

1. Dadas las proposiciones p y q ver si son equivalentes en cada uno de los siguientes casos:

   a) p: «En el zoológico hay animales»
      q: «El periódico no es para leerlo»

   b) p: «El oso no es un animal»
      q: «La nieve es azul»

   c) p: «El gorrión es un pájaro»
      q: «Los aviones vuelan»

   d) p: «La vaca es un marisco»
      q: «El perro ladra»

   a) *p* es cierta, pero *q* es falsa; luego no son equivalentes:

$$V(p) = V \quad V(q) = F$$

   luego

$$V(p \Leftrightarrow q) = F$$

   b) *p* y *q* son falsas, por tanto son equivalentes:

$$V(p) = F \quad V(q) = F$$

   luego

$$V(p \Leftrightarrow q) = V$$

   c) *p* y *q* son verdaderas, luego p y q son equivalentes:

$$V(p) = V \quad V(q) = V$$

   luego

$$V(p \Leftrightarrow q) = V$$

   d) *p* es falsa y *q* es verdadera, como tienen distinto valor lógico, no son equivalentes:

$$V(p) = F \quad V(q) = V$$

   luego

$$p \not\Leftrightarrow q$$

2. Si tenemos tres proposiciones p, q y r; p falsa y r verdadera, y resulta que p y q son equivalentes, ¿puede ser que q y r sean equivalentes?

   No porque si p es falsa y $p \Leftrightarrow q$, entonces q es falsa; como r es verdadera, q y r no son equivalentes.

3. Dadas dos proposiciones cualesquiera p y q que sean equivalentes, ¿se verifica que $\bar{p} \Leftrightarrow \bar{q}$?, ¿y que $p \Leftrightarrow \bar{q}$?

   Si p y q son equivalentes tienen el mismo valor lógico, las dos serán verdaderas o las dos falsas, entonces las proposiciones negaciones $\bar{p}$ y $\bar{q}$ tendrán el valor contrario, es decir, serán las dos falsas o las dos verdaderas; por tanto, si se verifica: $\bar{p} \Leftrightarrow \bar{q}$.

   Si p y q son verdaderas, $\bar{q}$ será falsa y si p y q son falsas entonces q será verdadera. Por tanto, p y q nunca tienen el mismo valor lógico y nunca serán equivalentes: $p \not\Leftrightarrow \bar{q}$.

CONCLUSIONES TEMA VI

PROPOSICION	Todo conjunto de palabras que tiene sentido lógico y del que se pueda averiguar si es verdadero o falso.	
VALOR LOGICO	Toda proposición tiene que ser verdadera o falsa. A todas las proposiciones que sean verdaderas les damos el valor lógico V y a las que son falsas el valor lógico F.	
TIPOS DE PROPOSICIONES	SIMPLES	Son aquellas cuyo enunciado es mínimo.
	COMPUESTAS	Están formadas por dos o más proposiciones simples.
DISYUNCION DE PROPOSICIONES	Dadas dos proposiciones *p* y *q* se llama proposición disyunción de p y q, $p \vee q$, a una nueva proposición que está caracterizada por ser verdadera cuando lo sea p o q o ambas a la vez.	
CONJUNCION DE PROPOSICIONES	Dadas dos proposiciones p y q, llamaremos proposición conjunción de p y q, $p \wedge q$, a una nueva proposición caracterizada por ser cierta únicamente cuando lo sean p y q a la vez.	
NEGACION DE UNA PROPOSICION	Proposición negación de p, $\bar{p}$ es una nueva proposición que será verdadera cuando p sea falsa y será falsa cuando p sea verdadera.	
IMPLICACION LOGICA	Dadas dos proposiciones p y q diremos que la proposición p implica la proposición q ($p \Rightarrow q$) cuando ambas son verdaderas, ambas son falsas o bien *p* es falsa y *q* es verdadera.	
EQUIVALENCIA LOGICA	Si tenemos dos proposiciones p y q diremos que p y q son equivalentes, y lo expresamos por $p \Leftrightarrow q$, cuando ambas tengan el mismo valor lógico.	

EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. De los siguientes conjuntos de palabras, decir cuáles son proposiciones y cuáles no lo son:

   p: «¿Qué día es mañana?»

   q: «El camión sirve para transportar objetos»

   r: «Las ruedas son redondas»

   s: «Por tu casa en»

   t: «Vete de aquí»

2. Decir por qué no son proposiciones los siguientes conjuntos de palabras:

   a) ¿Quién es usted?

   b) Compra libros de inglés.

   c) Allí el ya tiene.

   d) ¡Cuánto me gustaría que lloviese!

3. Hallar el valor lógico de las siguientes proposiciones:

   p: «Siempre está lloviendo en Europa».

   q: «Francia está en Europa».

   r: «La gaviota no es un ave».

s: «Los ríos llevan agua».

t: «Las muelas no sirven para nada».

u: «En ningún barco hay marineros».

4. Dadas las siguientes proposiciones, decir cuáles son simples y cuáles son compuestas:

p: «Está lloviendo y nevando».

q: «La bandera española está formada por los colores amarillo y rojo».

r: «Los rascacielos son altos, grandes y bonitos».

s: «Los libros sirven para aprender y divertir».

t: «El lago es muy grande».

5. Las proposiciones del ejercicio anterior que sean compuestas, dividirlas en proposiciones simples.

6. Hallar la disyunción de las proposiciones p y q en cada uno de los casos y su valor lógico:

a) p: «Sevilla es una ciudad».
q: «Las moscas son insectos».

b) p: «Las abejas hacen la miel».
q: «El pastor trabaja la tierra».

c) p: «En las librerías venden coches».
q: «En las pescaderías venden zapatos».

7. Si tenemos tres proposiciones p, q y r y sabemos que la disyunción de las tres es una proposición verdadera, es decir, $V(p \vee q \vee r) = V$, y que *p* y *q* son falsas, ¿cómo tendrá que ser *r*?

8. Hallar la conjunción de las proposiciones siguientes y su valor lógico:

a) p: «Las sillas sirven para sentarse».
q: «El vaso sirve para comer».

b) p: «Ningún bolígrafo escribe».
q: «Las plantas no crecen».

c) p: «De la aceituna se saca aceite».
q: «De la uva se saca vino».

9. Dadas tres proposiciones p, q y r, sabemos que la conjunción de las tres es una proposición falsa, siendo q y r verdaderas, ¿cómo será p?

10. Si p y q son dos proposiciones y se verifica que: $p \vee q$ es verdadera y $p \wedge q$ es falsa, ¿qué se puede decir de p y de q?

11. Si tenemos dos proposiciones p y q, ¿puede ocurrir en algún caso que $p \wedge q$ sea verdadera y $p \vee q$ falsa?

12. Hallar la proposición negación de las siguientes proposiciones:

    p: «Todos los hombres son negros».

    q: «Siempre llueve en esta ciudad».

    r: «Ningún animal duerme».

13. Dadas las siguientes proposiciones, ver si p implica q.

    a) p: «El hombre es un ser racional».
       q: «En las guerras no muere nadie».

    b) p: «La hepatitis es una enfermedad».
       q: «El vino tiene alcohol».

    c) p: «La rodilla está en el brazo».
       q: «El codo está en el brazo».

14. Con los ejemplos del ejercicio anterior, decir en qué casos $q \Rightarrow p$.

15. De las proposiciones del ejercicio número 13 decir cuáles son equivalentes.

16. Si tenemos dos proposiciones p y q y sabemos que $p \Rightarrow q$ y que q es falsa, ¿cómo será p?, ¿y si fuese q verdadera?

17. Si tenemos tres proposiciones p, q y r y sabemos que $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow r$ y que p es falsa y r verdadera, ¿cómo será q?

18. Dadas las proposiciones: p *«Enero no es el primer mes del año»* y q *«En Valencia hay naranjos»*. Hallar las proposiciones:

$$\bar{q},\ p \vee q,\ p \Leftrightarrow q,\ \bar{p},\ \bar{p} \Rightarrow q,\ p \wedge \bar{q}$$

    y su valor lógico.

19. De las siguientes proposiciones ver cuáles son equivalentes:

    a) p: «En el río hay peces».
       q: «El agua de mar es salada».

    b) p: «Las estufas no calientan».
       q: «En los armarios no hay objetos».

    c) p: «Los cactus son plantas».
       q: «El hielo está caliente».

d) p: «Las nueces no se comen».
q: «Los Pirineos son unos montes».

20. Dadas tres proposiciones *p*, *q* y *r*, si suponemos que $p \Leftrightarrow q$ y $q \Leftrightarrow r$ y si *p* es verdadera, ¿puede ser r falsa?

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. Son proposiciones la *q* y la *r*. No lo son *p*, *s* y *t*.

2. a) Porque es una interrogación y no se puede saber si es verdadero o falso.

   b) Porque es un mandato y no es ni verdadero ni falso.

   c) Porque no tiene sentido lógico.

   d) Porque es una exclamación y no se puede averiguar si es verdadero o falso.

3.

$$\left.\begin{array}{ll} V(p) = F & V(s) = V \\ V(q) = V & V(t) = F \\ V(r) = F & V(u) = F \end{array}\right\}$$

4. p: Es compuesta.

   q: Es simple.

   r: Es compuesta.

   s: Es compuesta.

   t: Es simple.

5. La proposición p consta de dos simples p_1: *«Está lloviendo»*, p_2: *«Está nevando»*.

   La *r* está formada por 3 simples:

   r_1: «Los rascacielos son altos».

   r_2: «Los rascacielos son grandes».

   r_3: «Los rascacielos son bonitos».

   La s está formada por 2 simples:

   s_1: «Los libros sirven para aprender».

   s_2: «Los libros sirven para divertir».

6. a) $p \vee q$: «Sevilla es una ciudad o las moscas son insectos».

$$V(p) = V \quad V(q) = V$$

   luego

$$V(p \vee q) = V$$

   b) $p \vee q$: «Las abejas hacen la miel o el pastor trabaja la tierra».

$$V(p) = V \quad V(q) = F$$

   luego

$$V(p \vee q) = V$$

   c) $p \vee q$: «En las librerías venden coches o en las pescaderías venden zapatos».

$$V(p) = F \quad V(q) = F$$

   luego

$$V(p \vee q) = F$$

7. Verdadera, pues si fuese falsa las tres serían falsas y también lo sería $p \vee q \vee r$.

8. a) $p \wedge q$: «Las sillas sirven para sentarse y el vaso para comer».

$$V(p) = V \quad V(q) = F \quad V(p \wedge q) = F$$

   b) $p \wedge q$: «Ningún bolígrafo escribe y las plantas no crecen».

$$V(p) = F \quad V(q) = F \quad V(p \wedge q) = F$$

   c) $p \wedge q$: «De la aceituna se saca aceite y de la uva vino».

$$V(p) = V \quad V(q) = V \quad V(p \wedge q) = V$$

9. p será falsa, pues si fuese verdadera, al serlo las otras dos también, la conjunción también sería verdadera.

10. Que o bien p es verdadera y q falsa o p es falsa y q verdadera.

11. No porque de: $p \vee q$ falsa se deduce que ambas son falsas y de $p \wedge q$ verdadera se deduce que ambas son verdaderas. Por tanto, tendrían que ser verdaderas y falsas a la vez, cosa que es imposible.

12. $\bar{p}$: «No todos los hombres son negros».

    $\bar{q}$: «No siempre llueve en esta ciudad».

    $\bar{r}$: «Algunos animales duermen».

13. a) $V(p) = V \quad v(q) = F$

    luego

    $$p \not\Rightarrow q$$

    b) $V(p) = V \quad V(q) = V$

    luego

    $$p \Rightarrow q$$

    c) $V(p) = F \quad V(q) = V$

    luego

    $$p \Rightarrow q$$

14. a) $V(q) = F \quad V(p) = V$

    luego

    $$q \Rightarrow p$$

    b) $V(q) = V \quad V(p) = V$

    luego

    $$q \Rightarrow p$$

    c) $V(q) = V \quad V(p) = F$

    luego

    $$q \not\Rightarrow p$$

15. Unicamente las del caso b), pues las dos tienen el mismo valor lógico, $p \Rightarrow q$ y $q \Rightarrow p$.

16. Será falsa, pues si fuese verdadera $p \not\Rightarrow q$. Si q fuese verdadera, p podría ser verdadera o falsa.

17. q puede ser verdadera o falsa.

18. $\bar{q}$: «En Valencia no hay naranjos».

    $p \vee q$: «Enero no es el primer mes del año o en Valencia hay naranjos».

    $p \Leftrightarrow q$: «Enero no es el primer mes del año si y sólo si en Valencia hay naranjos».

    $\bar{p}$: «Enero es el primer mes del año».

    $\bar{p} \Rightarrow q$: «Enero es el primer mes del año; luego en Valencia hay naranjos».

    $p \wedge \bar{q}$: «Enero no es el primer mes del año y en Valencia no hay naranjos».

$$V(p) = F \quad V(q) = V$$

$$V(\bar{q}) = F \quad V(p \vee q) = V \quad V(p \Leftrightarrow q) = F$$

$$V(\bar{p}) = V \quad V(\bar{p} \Rightarrow q) = V$$

$$V(p \wedge \bar{q}) = F$$

19. a) $p \Leftrightarrow q \quad V(p) = V \quad V(q) = V$

    b) $p \Leftrightarrow q \quad V(p) = F \quad V(q) = F$

    c) $p \not\Leftrightarrow q \quad V(p) = V \quad V(q) = F$

    d) $p \not\Leftrightarrow q \quad V(p) = F \quad V(q) = V$

20. No. Si p es verdadera, q será verdadera y, por tanto, r es verdadera.

TEMA VII

ALGEBRA DE BOOLE DE LAS PROPOSICIONES

ESQUEMA/RESUMEN

1. Tautología
2. Contradicción
3. Indeterminación
4. Proposiciones lógicamente equivalentes
5. Algebra de Boole de las proposiciones
   - 5.1. Retículo
   - 5.2. Retículo complementario
   - 5.3. Retículo distributivo
6. Leyes de Morgan

INSTRUCCIONES PARA EL ESTUDIO DEL TEMA

Al iniciar esta parte del curso dedicada a la Lógica Matemática, nos preocupa recordar el conjunto de las partes de un conjunto. Todos los alumnos recordarán que llegamos a establecer una nueva estructura algebraica sobre este conjunto: Algebra de Boole. Pues bien, queremos ahora trasladar los estudios que entonces hicimos a otro conjunto, con el que hemos trabajado en los últimos temas, es decir, al conjunto de las proposiciones. En efecto, el conjunto de todas las proposiciones, con la conjunción y la disyunción como operaciones, tiene estructura de álgebra de Boole.

Esta es la principal finalidad del presente tema, pero antes trataremos de preparar el camino, por decirlo de alguna manera, hablando de algunos tipos de proposiciones especiales, como pueden ser la tautología, contradicción, indeterminación y proposiciones lógicamente equivalentes.

Queremos llamar la atención del estudiante en las llamadas tablas de verdad; en definitiva, no suponen nada nuevo, pero que tal vez en este tema las hacemos con más frecuencia, pues entendemos suponen una gran ayuda en las demostraciones que realizamos.

1. TAUTOLOGIA

Se llama *tautología* o *proposición tautológica* a toda proposición que siempre es verdadera, independientemente del valor lógico de las proposiciones simples que la constituyen.

Por ejemplo, la proposición $p \vee \bar{p}$ es una tautología, pues siempre es verdadera independientemente del valor lógico de p y de $\bar{p}$. Si hacemos la *tabla de verdad:*

p	$\bar{p}$	$p \vee \bar{p}$
V	F	V
F	V	V

comprobamos que en la columna de $p \vee \bar{p}$, sólo aparece el símbolo V, es decir, siempre es verdadera. En consecuencia, para comprobar si una proposición es una tautología, formamos la tabla de verdad, y si en la columna de dicha proposición aparece únicamente el símbolo V, podemos asegurar que es una tautología. En caso contrario no lo es.

A las proposiciones tautológicas o tautologías las representaremos por la letra T. Acabamos de ver que $p \vee \bar{p}$ es una tautología, por tanto, podemos escribir: $p \vee \bar{p} \Leftrightarrow T$.

Es evidente que si p es una proposición cualquiera, $p \vee T$ es una tautología, es decir, $p \vee T \Leftrightarrow T$. Análogamente, podemos escribir $p \wedge T \Leftrightarrow p$. En las dos tablas de verdad siguientes demostramos estas dos proposiciones:

p	T	p ∨ T
V	V	V
F	V	V

p	T	p ∧ T
V	V	V
F	V	F

Sea ahora, la proposición $p \Rightarrow (p \vee q)$. Construimos su tabla de verdad:

p	q	p ∨ q	p ⇒ (p ∨ q)
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	V

en la cuarta columna solamente aparece el símbolo V, por tanto, $p \Rightarrow (p \vee q)$ es una tautología.

2. CONTRADICCION

Se llama *contradicción* o *proposición contradictoria,* a toda proposición que siempre es falsa, independientemente del valor lógico de las proposiciones simples que la componen.

Así la proposición $p \wedge \bar{p}$ es una contradicción, ya que siempre es falsa, independientemente del valor lógico de p y de $\bar{p}$. Lo comprobamos construyendo la tabla de verdad:

p	$\bar{p}$	$p \wedge \bar{p}$
V	F	F
F	V	F

es fácil de ver que en la columna de $p \wedge \bar{p}$ solamente aparece el símbolo F, es decir, siempre es falsa. Luego $p \wedge \bar{p}$ es una contradicción.

Para demostrar que una proposición es una contradicción basta con construir la tabla de verdad correspondiente, si en la columna relativa a esta proposición solamente aparece el símbolo F, podemos asegurar, sin miedo a equivocarnos, que es una proposición contradictoria o una contradicción.

A las proposiciones contradictorias o contradicciones las representaremos por la letra C, por tanto, podemos escribir $p \wedge \bar{p} \Leftrightarrow C$.

Si p es una proposición cualquiera, se verifica que:

$$p \vee C \Leftrightarrow p \quad y \quad p \wedge C \Leftrightarrow C$$

para comprobarlo construimos las correspondientes tablas de verdad:

p	C	p ∨ C
V	F	V
F	F	F

p	C	p ∧ C
V.	F	F
F	F	F

y veremos que en la primera tabla las columnas primera y tercera son iguales, luego, $p \vee C \Leftrightarrow p$, y en la segunda tabla las columnas segunda y tercera son iguales, por tanto, $p \wedge C \Leftrightarrow C$.

Sea ahora la proposición $p \Leftrightarrow \bar{p}$, vamos a demostrar que es una contradicción. Como siempre formamos la tabla de verdad:

p	$\bar{p}$	$p \Leftrightarrow \bar{p}$
V	F	F
F	V	F

y observamos que en todos los casos es falsa, luego es una contradicción.

Si C es una contradicción, será falsa siempre, por tanto $\bar{C}$ será siempre verdadera o sea será una tautología. Análogamente si T es una tautología, siempre es verdadera, por tanto, $\bar{T}$ será siempre falsa, o sea, una contradicción.

$$\bar{C} \Leftrightarrow T \qquad \bar{T} \Leftrightarrow C$$

En la tabla siguiente:

T	C	$\bar{C}$'	$\bar{T}$
V	F	V	F

se expresa claramente lo que acabamos de enunciar.

3. INDETERMINACION

Se llama *indeterminación* o *proposición indeterminada* a toda proposición que en unos casos es verdadera y en otros falsa, dependiendo del valor lógico de las proposiciones simples que la componen.

En las tablas de verdad de las indeterminaciones aparecen, en consecuencia, los símbolos V y F, pues en unos casos son verdaderas y en otros falsas.

Consideremos un ejemplo: vamos a demostrar que la proposición $\bar{p} \wedge \bar{q}$ es una indeterminación:

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p} \wedge \bar{q}$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

aparecen los símbolos V y F, luego es una indeterminación.

Sea ahora, la proposición $p \vee q$, vamos a demostrar que es una indeterminación:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

en esta tabla aparecen V y F, por tanto, es una indeterminación.

Todas las proposiciones que no son tautologías ni contradicciones, son indeterminaciones.

Ejercicios y ejemplos

1. Comprobar que la proposición $(p \Rightarrow q) \vee p$ es una tautología.

   Formamos la tabla de verdad correspondiente:

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \vee p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	V
F	F	V	V

   y vemos que únicamente aparece el símbolo V, luego es una tautología.

2. Comprobar que la proposición $(p \wedge \bar{q}) \wedge \overline{(p \vee q)}$ es una contradicción. Construimos la tabla:

p	q	$\bar{q}$	$p \vee q$	$\overline{p \vee q}$	$p \wedge \bar{q}$	$(p \wedge \bar{q}) \wedge \overline{(p \vee q)}$
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	V	F	V	F
F	V	F	V	F	F	F
F	F	V	F	V	F	F

y observamos que en la columna de $(p \wedge \bar{q}) \wedge (\overline{p \vee q})$ únicamente aparece el valor F, por tanto es una contradicción.

3. Vamos a comprobar que la proposición $p \Rightarrow q \wedge r$ es una indeterminación. Formamos la tabla de verdad:

p	q	r	$q \wedge r$	$p \Rightarrow q \wedge r$
V	V	V	V	V
V	V	F	F	F
V	F	V	F	F
F	V	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V
F	F	F	F	V

En la columna de la proposición $p \Rightarrow q \wedge r$ aparecen los símbolos V y F, por tanto, es una indeterminación.

4. Averiguar si son tautologías o contradicciones las proposiciones siguientes:

a) $p \wedge q \Rightarrow p$.

b) $p \vee \bar{p} \Leftrightarrow q \wedge \bar{q}$.

Formamos las tablas correspondientes:

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \Rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

por tanto, $p \wedge q \Rightarrow p$ es una tautología.

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \vee \bar{p}$	$q \wedge \bar{q}$	$p \vee \bar{p} \Leftrightarrow q \wedge \bar{q}$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	F	F

por tanto, $p \vee \bar{p} \Leftrightarrow q \wedge \bar{q}$ es una contradicción.

4. PROPOSICIONES LOGICAMENTE EQUIVALENTES

Decimos que dos proposiciones son *lógicamente equivalentes* cuando tienen la misma tabla de verdad.

Por lo tanto, para demostrar que dos proposiciones son lógicamente equivalentes, formaremos las tablas de verdad de ambas y comprobaremos si son iguales o no. En el primer caso ambas proposiciones son equivalentes y en el segundo caso no lo son. Procedimiento que no difiere en nada del utilizado en otras ocasiones en el presente tema.

De una manera simple podemos decir que la equivalencia de proposiciones verifica la propiedad transitiva, es decir,

$$p \Leftrightarrow q \quad y \quad q \Leftrightarrow r, \text{ entonces } p \Leftrightarrow r$$

Dicho de otra forma, si una proposición es equivalente a otra y ésta es equivalente a una tercera, la primera es equivalente a la última.

Ejercicios y ejemplos

1. Demostrar que las proposiciones siguientes son lógicamente equivalentes:

$$\overline{(\bar{p} \Rightarrow q)} \quad y \quad \overline{(p \vee q)}$$

Formamos la tabla de verdad:

p	q	$\bar{p}$	$\bar{p} \Rightarrow q$	$\overline{(\bar{p} \Rightarrow q)}$	$p \vee q$	$\overline{(p \vee q)}$
V	V	F	V	F	V	F
V	F	F	V	F	V	F
F	V	V	V	F	V	F
F	F	V	F	V	F	V

y vemos que las columnas de ambas proposiciones coinciden, por tanto, tienen la misma tabla de verdad y son lógicamente equivalentes.

2. Comprobar si son lógicamente equivalentes las proposiciones:

$$(p \Rightarrow q) \wedge r \quad y \quad (q \Rightarrow r) \wedge p$$

Como en el caso anterior, construimos la tabla de verdad:

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge r$	$q \Rightarrow r$	$(q \Rightarrow r) \wedge p$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	F	V	V
F	V	V	V	V	V	F
V	F	F	F	F	V	V
F	V	F	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V	F
F	F	F	V	F	V	F

Observamos que las columnas correspondientes a las proposiciones $(p \Rightarrow q) \wedge r$ y $(q \Rightarrow r) \wedge p$ son distintas, por tanto, no son lógicamente equivalentes.

5. ALGEBRA DE BOOLE DE LAS PROPOSICIONES

Consideramos el conjunto P de todas las proposiciones y las operaciones disyunción y conjunción de proposiciones que hemos definido con anterioridad, como recordará el alumnő. Trataremos en los apartados siguientes de estudiar la estructura que tiene este conjunto P en relación con estas operaciones.

5.1. Retículo

Vamos a comprobar que $(P, \vee, \wedge)$ tiene estructura de retículo. Para demostrar las propiedades en esta ocasión utilizaremos las tablas de verdad:

— *Conmutativa:* Para todo par de proposiciones p y q se verifica:

$$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p \quad y \quad p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$$

Demostración:

p	q	p ∨ q	q ∨ p	p ∧ q	q ∧ p
V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	F	F
F	V	V	V	F	F
F	F	F	F	F	F

Las columnas tercera y cuarta coinciden, y la quinta y sexta también; luego, la disyunción y la conjunción de proposiciones son conmutativas.

– *Asociativa:* Si p, q y r son tres proposiciones cualesquiera, se verifica:

$$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r) \quad y \quad (p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$$

Demostración:

p	q	r	p ∨ q	(p ∨ q) ∨ r	q ∨ r	p ∨ (q ∨ r)	p ∧ q	(p ∧ q) ∧ r	q ∧ r	p ∧ (q ∧ r)
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V	F	F	F
V	F	V	V	V	V	V	F	F	F	F
F	V	V	V	V	V	V	F	F	V	F
V	F	F	V	V	F	V	F	F	F	F
F	V	F	V	V	V	V	F	F	F	F
F	F	V	F	V	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F

Vemos que las columnas quinta y séptima coinciden y también la novena y la última. Luego las dos operaciones que consideramos son asociativas.

— *Idempotente:* Si p es una proposición cualquiera, se verifica:

$$p \vee p \Leftrightarrow p \quad y \quad p \wedge p \Leftrightarrow p$$

Demostración:

p	p ∨ p	p ∧ p
V	V	V
F	F	F

tabla que demuestra la propiedad idempotente de ambas operaciones.

— *Simplificativa o de absorción:* Si p y q son dos proposiciones cualesquiera, se verifica:

$$(p \vee q) \wedge p \Leftrightarrow p \quad y \quad (p \wedge q) \vee p \Leftrightarrow p$$

Demostración:

p	q	p ∨ q	(p ∨ q) ∧ p	p ∧ q	(p ∧ q) ∨ p
V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	F	V
F	V	V	F	F	F
F	F	F	F	F	F

Vemos que las columnas primera, cuarta y sexta coinciden, por tanto se verifica la propiedad simplificativa.

Al verificar estas cuatro propiedades, podemos afirmar que (P, ∧, ∨) tiene estructura de retículo, de acuerdo con lo estudiado en un tema anterior. Siguiendo lo allí expuesto nos preocupa ahora ver si el conjunto P de todas las proposiciones con la disyunción y la conjunción, como operaciones, constituye un álgebra de Boole.

5.2. Retículo complementario

Dada una proposición *p* habíamos definido la proposición negación de *p*, $\bar{p}$, como una proposición que es falsa cuando *p* es verdadera, y es verdadera cuando *p* es falsa. Por tanto, para cualquier proposición *p* existe la proposición $\bar{p}$ que verifica:

$p \vee \bar{p}$ es una tautología, y
$p \wedge \bar{p}$ es una contradicción

Esto equivale a decir que el conjunto P con las operaciones disyunción, conjunción y la negación de proposiciones es un retículo complementario.

5.3. Retículo distributivo

Como ya sabemos, es necesario que verifique la propiedad distributiva.

Si *p*, *q* y *r* son tres proposiciones cualesquiera, se verifica que:

$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

y

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

Demostración:

p	q	r	$q \mid \wedge r$	$p \vee (q \mid \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Las columnas quinta y octava coinciden, luego se verifica:

$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Análogamente construimos la otra tabla

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V
F	V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

y comprobamos que coinciden las columnas quinta y octava, luego se verifica:

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \mid \wedge q) \vee (p \mid \wedge r)$$

Por lo tanto, el conjunto de las proposiciones con las operaciones disyunción y conjunción es un retículo distributivo.

Al ser retículo complementario y distributivo afirmamos que *(P, ∨, ∧) tiene estructura de álgebra de Boole.*

6. LEYES DE MORGAN

En el álgebra de Boole de las proposiciones se verifica que:

$$\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q} \quad \text{y} \quad \overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q}$$

siendo *p* y *q* dos proposiciones cualesquiera.

Estas dos expresiones son las leyes de Morgan. Veamos a continuación que realmente se cumplen, construyendo las dos tablas correspondientes:

p	q	$p \vee q$	$\overline{p \vee q}$	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p} \wedge \bar{q}$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

Vemos que las columnas cuarta y séptima son iguales, luego se verifica:

$$\overline{(p \vee q)} \Leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q}$$

Construimos la otra tabla:

p	q	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p} \vee \bar{q}$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

comprobamos que las columnas cuarta y séptima coinciden, luego se verifica:

$$\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q}$$

y quedan demostradas las leyes de Morgan.

NOTAS ACLARATORIAS Y COMPLEMENTARIAS

Es interesante observar la analogía tan estrecha que existe entre el álgebra de las partes de un conjunto y el álgebra de las proposiciones. Hemos utilizado el mismo modelo matemático para dos situaciones distintas como son los conjuntos y las proposiciones.

Con un esquema expresamos dicha analogía:

Algebra de Partes de un conjunto *Conjunto*	**Algebra de Proposiciones** *Proposición*
Conjunto universal	Tautología
Conjunto vacío	Contradicciones
Inclusión $A \subset B$	Implicación $p \Rightarrow q$
Igualdad $A = B$	Equivalencia $p \Leftrightarrow q$
Unión $A \cup B$	Disyunción $p \vee q$
Intersección $A \cap B$	Conjunción $p \wedge q$
Complementario A'	Negación $\bar{p}$

CONCLUSIONES TEMA VII

TAUTOLOGIA	Es toda proposición que siempre es verdadera independientemente del valor lógico de las proposiciones simples que la constituyen.
CONTRADICCION	Es toda proposición que siempre es falsa independientemente del valor lógico de las proposiciones simples que la componen.
INDETERMINACION	Es toda proposición que en unos casos es verdadera y en otros falsa, dependiendo del valor lógico de las proposiciones simples que la componen.
PROPOSICIONES LOGICAMENTE EQUIVALENTES	Dos proposiciones son lógicamente equivalentes cuando tienen la misma tabla de verdad.
ALGEBRA DE BOOLE	(P, $\vee$, $\wedge$) es el conjunto de todas las proposiciones con las operaciones de disyunción y conjunción. (P, $\vee$, $\wedge$) tiene estructura de álgebra de Boole, porque: 1. (P, $\vee$, $\wedge$) es un retículo: verifica las propiedades: — Conmutativa. — Asociativa. — Idempotente. — Simplificativa o de absorción. 2. (P, $\vee$, $\wedge$) es un retículo complementario: porque existe la negación de cada proposición. 3. (P, $\vee$, $\wedge$) es un retículo distributivo: verifica la propiedad distributiva.
LEYES DE MORGAN	En el álgebra de Boole de las proposiciones se verifica que: $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q}$ y $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q}$ siendo p y q dos proposiciones cualesquiera.

EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. Demostrar que la proposición $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$ es una tautología.
2. Demostrar si la proposición $\overline{p \Rightarrow p}$ es una contradicción o no lo es.
3. Averiguar si la proposición $(p \wedge q) \wedge (\overline{p \vee q})$ es tautología o contradicción.
4. Comprobar que la proposición $(\overline{\bar{p} \wedge \bar{q}})$ es una indeterminación.
5. Demostrar que las proposiciones $p \vee q$ y $(\overline{\bar{p} \wedge \bar{q}})$ son lógicamente equivalentes.
6. Si sabemos que $p \vee q$ es una tautología y que p es una contradicción, ¿qué podemos decir de q?
7. Si sabemos que $p \wedge q$ es una contradicción y q es una tautología, ¿qué podemos decir que p?
8. Sabiendo que $(p \wedge q) \vee r$ es contradicción y que p es una tautología, ¿qué podemos afirmar de las otras dos proposiciones q y r?
9. Hallar la negación de las siguientes proposiciones: p: «Hoy es jueves o viernes»; r: «Algunos hombres son altos»; q: «Yo nací en primavera o en verano».
10. Demostrar que son lógicamente equivalentes las proposiciones $p \Leftrightarrow \bar{q}$ y $q \Leftrightarrow \bar{p}$.
11. Si p y q son dos proposiciones equivalentes, demostrar que $(p \wedge r) \Leftrightarrow (q \wedge r)$ es una tautología.
12. Demostrar que si $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$ entonces $p \Rightarrow r$.
13. Utilizando las propiedades del álgebra de Boole demostrar que las proposiciones $(p \vee q) \wedge \bar{p}$ y $\bar{p} \wedge q$ son equivalentes.

14. Demostrar que las proposiciones $p \vee (p \wedge q)$ y p son equivalentes, utilizando las propiedades del álgebra de proposiciones.

15. Aplicando las leyes de Morgan, demostrar que son equivalentes las proposiciones $\overline{[(p \wedge q) \vee p]}$ y $(\bar{p} \vee \bar{q}) \wedge \bar{p}$.

16. Dada la tabla de verdad de las proposiciones p, q, r, s, y t, ¿qué relación entre ellas podemos deducir?

p	q	r	s	t
V	V	V	F	F
F	V	F	V	F

17. Demostrar que las proposiciones siguientes son equivalentes aplicando las leyes de Morgan y otras propiedades: $\overline{[p \wedge (q \vee \bar{p})]}$ y $\overline{(p \wedge q)}$.

18. Demostrar que las proposiciones $(p \wedge q) \vee \bar{p}$ y $\bar{p} \vee q$ son equivalentes, aplicando varias propiedades.

19. Dada la siguiente tabla de verdad:

p	q	r	s	t	u
V	V	V	V	V	F
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	F

¿qué relación existe entre las proposiciones?

20. Si p es una indeterminación, q una contradicción y r una indeterminación, ¿puede ser $p \vee q \vee r$ una tautología?, ¿y $p \wedge q \wedge r$ una indeterminación?

SOLUCION A LOS EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1.

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \wedge (p \Rightarrow q)$	$[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

luego es una tautología.

2.

p	p	$p \Rightarrow p$	$\overline{p \Rightarrow p}$
V	V	V	F
F	F	V	F

es, por tanto, una contradicción.

3.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\overline{p \vee q}$	$(p \wedge q) \wedge \overline{p \vee q}$
V	V	V	V	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	F	F
F	F	F	F	V	F

luego es una contradicción.

4.

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p} \wedge \bar{q}$	$\overline{\bar{p} \wedge \bar{q}}$
V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	F

aparecen los valores V y F, luego es indeterminación.

5.

p	q	$p \vee q$	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p} \wedge \bar{q}$	$\overline{\bar{p} \wedge \bar{q}}$
V	V	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V
F	V	V	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V	F

ambas columnas coinciden, luego son lógicamente equivalentes.

6. q es una tautología

p	q	$p \vee q$
F	V	V
F	V	V

7. p es una contradicción

p	q	$p \wedge q$
F	V	F
F	V	F

8. Si $(p \wedge q) \vee r$ es contradicción, entonces $p \wedge q$ y r son contradicciones, como p es tautología, q será contradicción. Luego $q \Leftrightarrow C$ y $r \Leftrightarrow C$.

9. $\bar{p}$ «Hoy no es ni jueves ni viernes».
   $\bar{q}$ «Yo nací en otoño o en invierno».
   $\bar{r}$ «Ningún hombre es alto».

10.

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \Leftrightarrow \bar{q}$	$q \Leftrightarrow \bar{p}$
V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	F	F

coinciden ambas columnas, luego son equivalentes.

11.

p	q	r	$p \wedge r$	$q \wedge r$	$(p \wedge r) \Leftrightarrow (q \wedge r)$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V
F	F	V	F	F	V
F	F	F	F	F	V

sólo aparece el símbolo V, luego es una tautología.

12. Es lo mismo que demostrar que $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ es una tautología. Veámoslo:

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	$p \Rightarrow r$	$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

luego, es una tautología.

13. $(p \vee q) \wedge \bar{p} \Leftrightarrow \bar{p} \wedge (p \vee q)$ por la propiedad conmutativa.
$\bar{p} \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow (\bar{p} \wedge p) \vee (\bar{p} \wedge q)$ por la propiedad distributiva.
$\bar{p} \wedge p \Leftrightarrow C$, luego $(\bar{p} \wedge p) \vee (\bar{p} \wedge q) \Leftrightarrow C \vee (\bar{p} \wedge q)$.
$C \vee (\bar{p} \wedge q) \Leftrightarrow \bar{p} \wedge q$ por una propiedad de las contradicciones.
Por tanto, $(p \vee q) \wedge \bar{p}$ es equivalente a $\bar{p} \wedge q$.

14. $p \Leftrightarrow p \wedge T$, sustituimos este valor en $p \vee (p \wedge q)$ y resulta:

$$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow (p \wedge T) \vee (p \wedge q),$$

aplicamos la propiedad distributiva:

$$(p \wedge T) \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p \wedge (T \vee q),$$

como $T \vee q \Leftrightarrow T$, resulta

$$p \wedge (T \vee q) \Leftrightarrow p \wedge T \Leftrightarrow p,$$

por lo tanto, $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$.

15. $\overline{[(p \wedge q) \vee p]} \Leftrightarrow \overline{(p \wedge q)} \wedge \bar{p} \Leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q}) \wedge \bar{p}$.

16. $p \Leftrightarrow r$; $\bar{p} \Leftrightarrow s$; $\bar{r} \Leftrightarrow s$; $q \Leftrightarrow T$; $t \Leftrightarrow C$.

17. $\overline{[p \wedge (q \vee \bar{p})]} \overset{\text{Morgan}}{\Longleftrightarrow} \bar{p} \vee \overline{(q \vee \bar{p})} \overset{\text{Morgan}}{\Longleftrightarrow} \bar{p} \vee (\bar{q} \wedge \bar{\bar{p}}) \Leftrightarrow \bar{p} \vee (\bar{q} \wedge p) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q}) \wedge (\bar{p} \vee p) \Leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q}) \wedge T \Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q} \overset{\text{Morgan}}{\Longleftrightarrow} \overline{(p \wedge q)}$

18. $(p \wedge q) \vee \bar{p} \Leftrightarrow \bar{p} \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow (\bar{p} \vee p) \wedge (\bar{p} \vee q) \Leftrightarrow T \wedge (\bar{p} \vee q) \Leftrightarrow \bar{p} \vee q$

19. $r \Leftrightarrow p \wedge q$; $s \Leftrightarrow p \vee q$; $t \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$; $u \Leftrightarrow C$

20. $p \vee q \vee r$ puede ser tautología, por ejemplo si $\bar{p} \Leftrightarrow r$, resulta:

$$p \vee q \vee \bar{p} \Leftrightarrow p \vee \bar{p} \Leftrightarrow T \; ;$$
$$p \wedge q \wedge r \Leftrightarrow C$$

no puede ser indeterminación, es una contradicción.

BIBLIOTECA PUBLICA PTO. STA. MARIA

TEMA VIII

CIRCUITOS LOGICOS

ESQUEMA/RESUMEN

1. Sistemas de Numeración.
2. Sistema Binario.
   - 2.1. Paso del sistema decimal al binario.
   - 2.2. Paso del sistema binario al decimal.
   - 2.3. Suma en el sistema binario.
   - 2.4. Producto en el sistema binario.
3. Circuitos lógicos.
4. Combinaciones de circuitos.
   - 4.1. Asociación en paralelo.
   - 4.2. Asociación en serie.
   - 4.3. Circuito contrario.
5. Circuitos equivalentes.
6. Algebra de Boole de los circuitos.
7. Leyes de Morgan.

INSTRUCCIONES PARA EL ESTUDIO DE ESTE TEMA

Terminamos la segunda Unidad Didáctica dedicada a introducir a nuestros alumnos en el estudio de la lógica, exponiendo la teoría fundamental sobre los circuitos lógicos.

Antes de tratar el tema propiamente dicho, hacemos un planteamiento elemental sobre los sistemas de numeración, pues con posterioridad insistiremos en el estudio de los sistemas de numeración. En esta ocasión solamente tratamos el llamado sistema binario.

Pensamos que los conceptos vertidos en el presente tema no supondrán dificultad para los alumnos, si han comprendido perfectamente lo estudiado con anterioridad. Es importante tener claro la analogía entre la asociación en paralelo de circuitos y la disyunción de proposiciones, la asociación en serie y la conjunción de proposiciones, el interruptor contrario y la negación de proposiciones y la equivalencia de proposiciones con la equivalencia de circuitos lógicos. Llegamos, para terminar, a establecer el álgebra de Boole de los circuitos lógicos, de la misma manera que lo hicimos en el conjunto de las partes de un conjunto y en el conjunto de las proposiciones.

1. SISTEMAS DE NUMERACION

Se llama sistema de numeración a un conjunto de reglas que nos permiten representar todos los números naturales, mediante algunos símbolos o palabras.

Existen muchos sistemas de numeración, tales como el sistema romano y el binario, siendo el más conocido de todos ellos el sistema decimal.

En el sistema decimal representamos todos los números mediante diez símbolos que son 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

En el sistema binario lo hacemos solamente con dos símbolos: 0 y 1.

En el sistema de numeración romano se utilizan siete símbolos, que son las letras: I, V, X, L, C, D y M. El valor que tiene cada letra es: I vale uno, la V cinco, la X diez, la L cincuenta, la C cien, la D quinientos y la M mil.

No nos detenemos más en estas ideas sobre sistemas de numeración, pues se tratarán con más detalle en la siguiente Unidad Didáctica. Ahora hablaremos únicamente del sistema binario de numeración.

2. SISTEMA BINARIO

Llamamos sistema binario de numeración al que tiene por base el número dos. Por tanto, solamente emplea dos símbolos que son el 0 y el 1. Con estos dos símbolos podemos representar todos los números naturales.

En el sistema decimal formamos grupos de diez en diez, y en el binario estos grupos los haremos de dos en dos. Por ejemplo, el número 5 lo agrupamos de dos en dos, y quedan dos grupos de dos

unidades y una unidad suelta. O sea, tendremos una unidad de primer orden y dos de segundo orden. Estas dos unidades de segundo orden las volvemos a agrupar y obtenemos una unidad de tercer orden y no sobra ninguna. Por tanto, cero de segundo orden. Así el número 5 quedará representado en el sistema binario por $1\,0\,1_{(2}$ (*). El número $10\,1_{(2}$ significa que tiene una unidad de primer orden, cero de segundo orden y una de tercer orden.

Cualquier número se puede descomponer de forma única (lo justificaremos en la próxima Unidad Didáctica) teniendo presente la base en que está escrito. El número anterior $1\,0\,1_{(2}$ se puede escribir:

$$1\,0\,1_{(2} = 1.\,2^2 + 0.\,2^1 + 1.\,2^0$$

Otro ejemplo: vamos a representar el número ocho en el sistema de base dos. Agrupando en grupos de dos, obtenemos cuatro grupos de dos y no sobra ninguno. Los cuatro grupos los agrupamos de dos en dos, obteniendo dos grupos y no sobra ninguno, y estos dos los agrupamos en un grupo y no sobra ninguno. Por tanto, queda:

$$8 = 1\,0\,0\,0_{(2}$$

es decir, cero unidades de primer orden, cero de segundo, cero de tercero y una unidad de cuarto orden.

Para números muy grandes realizar este proceso sería muy laborioso. Por ello se utilizan unas reglas, que exponemos a continuación, para pasar un número escrito en el sistema decimal al sistema binario y viceversa.

2.1. PASO DEL SISTEMA DECIMAL AL BINARIO

Para pasar un número escrito en el sistema decimal al sistema binario, se divide el número por dos, el cociente de la división se vuelve a dividir por dos, y así tantas veces como sea necesario hasta llegar a un cociente que sea menor que el dos y no se pueda seguir dividiendo. El nuevo número en el sistema binario estará formado por el primer resto en el lugar de las unidades de primer orden, el segundo resto en las unidades de segundo orden, el tercer resto en las unidades de tercer orden y así sucesivamente y, finalmente, el último cociente que será menor que dos.

Con un ejemplo lo comprenderemos mejor. Si queremos escribir el número 26 en base dos, dividiremos 26 por dos:

$$\begin{array}{r|l} 26 & 2 \\ 06 & 13 \\ 0 & \end{array}$$

el primer resto es un cero, éste ocupará el lugar de las unidades de primer orden. Dividimos el cociente obtenido por dos:

$$\begin{array}{r|l} 13 & 2 \\ 1 & 6 \end{array}$$

el segundo resto es un uno, que será el que ocupe el lugar de las unidades de segundo orden. Seguimos dividiendo el nuevo cociente por dos:

$$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 0 & 3 \end{array}$$

el tercer resto es cero, que ocupará el lugar de las unidades de tercer orden.

(*) El número que aparece como subíndice se utiliza para indicar la base del sistema en que está escrito el número, se suele prescindir de este subíndice cuando el número está escrito en base decimal.

Como el cociente es todavía mayor que dos lo dividimos y queda:

$$\begin{array}{r|l} 3 & 2 \\ \hline 1 & 1 \end{array}$$

el cuarto resto es uno y ocupará el lugar de las unidades de cuarto orden.

Como el cociente es menor que dos, ya no se puede dividir, y este cociente ocupará el lugar de las unidades de quinto orden.

Por tanto, el número 26 escrito en base dos es:

$$1\,1\,0\,1\,0_{(2} = 26$$

Pongamos otro ejemplo. Vamos a pasar el número 14 al sistema binario. Iremos dividiendo hasta que aparezca un cociente menor que dos.

$$\begin{array}{r|l} 14 & 2 \\ \hline 0 & 7 \quad 2 \\ \hline & 1 \quad 3 \quad 2 \\ \hline & \quad 1 \quad 1 \end{array}$$

luego, $14 = 1\,1\,1\,0_{(2}$.

2.2. Paso del sistema binario al decimal

Para pasar un número del sistema binario al decimal, se descompone de forma análoga a como se hace en el sistema decimal y se suma. Habíamos hallado que el número 5 en base dos era $101_{(2}$, si descomponemos este número y sumamos, veremos que se obtiene el 5.

$$1\,0\,1_{(2} = 1.\,2^2 + 0.\,2^1 + 1.\,2^0 = 4 + 0 + 1 = 5$$

Es, por tanto, la manera de pasar el número $1\,0\,1_{(2}$ al sistema decimal.

Veamos otro ejemplo. Pasar el número $1\,0\,0\,1\,1\,0_{(2}$ al sistema decimal. Según lo visto, tenemos:

$$1\,0\,0\,1\,1\,0_{(2} = 1.\,2^5 + 0.\,2^4 + 0.\,2^3 + 1.\,2^2 + 1.\,2^1 + 0.\,2^0 = 32 + 0 + 0 + 4 + 2 + 0 = 38.$$

2.3. Suma en el sistema binario

En el sistema binario solamente se utilizan los símbolos 0 y 1; vamos a formar la correspondiente tabla con estos dos símbolos.

+	0	1
0	0	1
1	1	10

El número cero y el número uno se representan igual en el sistema de base dos que en el decimal, pero al sumar 1 + 1 en el sistema decimal se obtiene 2 y al pasar este número a base dos resulta igual a $1\,0_{(2}$.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 2 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \qquad\qquad 2 = 1\,0_{(2}$$

Luego para sumar dos números en el sistema binario se suman como en el sistema decimal y si el número obtenido es dos o mayor que dos se pasa al sistema binario.

Veamos un ejemplo: sumar en base dos los números 1 1 0 1 y 1 0 1 1.

$$\begin{array}{r} 1\,1\,0\,1 \\ 1\,0\,1\,1 \\ \hline 1\,1\,0\,0\,0_{(2} \end{array}$$

ya que $1 + 1 = 2 = 1\,0_{(2}$, luego nos llevamos una, que sumada al uno de la siguiente columna resulta $2 = 10'_{(2}$, nos llevamos una y se la sumamos en la otra columna $1 + 1 + 0 = 2 = 10_{(2}$, volveremos a llevarnos una y se la sumamos en $1 + 1 + 1 = 3 = 11_{(2}$.

El número resultante es $1\,1\,0\,0\,0_{(2}$.

Otro ejemplo: Tratamos de sumar los números 1 1 1 0 1 1 y 1 0 0 1 1 1, que están expresados en el sistema binario:

$$\begin{array}{r} 1\,1\,1\,0\,1\,1 \\ 1\,0\,0\,1\,1\,1 \\ \hline 1\,1\,0\,0\,0\,1\,0'_{(2} \end{array}$$

Podemos comprobar que esta operación está bien realizada, pasando ambos números a base diez, los sumamos y una vez pasado el resultado a base dos, debe coincidir:

$$1\,1\,1\,0\,1\,1_{(2} = 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = 32 + 16 + 8 + 2 + 1 = 59$$

$$1\,0\,0\,1\,1\,1_{(2} = 2^5 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 32 + 4 + 2 + 1 = 39$$

$$59 + 39 = 98$$

Ahora pasamos 98 al sistema binario:

$$\begin{array}{rrrrrrr} 98 & 2 & & & & & \\ 18 & 49 & 2 & & & & \\ 0 & 09 & 24 & 2 & & & \\ & 1 & 04 & 12 & 2 & & \\ & & 0 & 0 & 6 & 2 & \\ & & & & 0 & 3 & 2 \\ & & & & & 1 & 1 \end{array}$$

y resulta $1\,1\,0\,0\,0\,1\,0_{(2}$ que es el número que habíamos obtenido.

2.4. Producto en el sistema binario

Multiplicamos dos números expresados en el sistema binario de igual manera que en el sistema decimal. Lo mismo que hemos hecho en el caso de la suma, construimos la siguiente tabla:

·	0	1
0	0	0
1	0	1

con su ayuda multiplicar dos números cualesquiera no tiene dificultad. Veamos algunos ejemplos. Vamos a multiplicar los números: $1\,1\,1\,0\,1_{(2}$ y $1\,0\,1_{(2}$.

$$\begin{array}{r} 1\,1\,1\,0\,1 \\ \times 1\,0\,1 \\ \hline 1\,1\,1\,0\,1 \\ 1\,1\,1\,0\,1 \\ \hline 1\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1_{(2} \end{array}$$

Podemos comprobar el resultado con el mismo método que hemos utilizado en la suma: pasar los dos números al sistema decimal, multiplicarlos y volver a pasar el resultado al sistema binario.

$$1\,1\,1\,0\,1_{(2} = 1.\,2^4 + 1.\,2^3 + 1.\,2^2 + 0.\,2^1 + 1.\,2^0 = 16 + 8 + 4 + 1 = 29$$

$$1\,0\,1_{(2} = 1.\,2^2 + 0.\,2^1 + 1.\,2^0 = 4 + 1 = 5$$

$$29 \times 5 = 145$$

y ahora pasamos el número 145 a base dos:

$$\begin{array}{lllllllll} 145 & \underline{|\,2} & & & & & & & \\ 05 & 72 & \underline{|\,2} & & & & & & \\ 1 & 12 & 36 & \underline{|\,2} & & & & & \\ & 0 & 16 & 18 & \underline{|\,2} & & & & \\ & & 0 & 0 & 9 & \underline{|\,2} & & & \\ & & & & 1 & 4 & \underline{|\,2} & & \\ & & & & & 0 & 2 & \underline{|\,2} & \\ & & & & & & 0 & 1 & \end{array}$$

luego, $145 = 1\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1_{(2}$ que es el número que habíamos obtenido.

Otro ejemplo: multiplicar los números $11011_{(2}$ y $10011_{(2}$ que están expresados en el sistema binario:

$$\begin{array}{r} 1\,1\,0\,1\,1 \\ \times 1\,0\,0\,1\,1 \\ \hline 1\,1\,0\,1\,1 \\ 1\,1\,0\,1\,1 \\ 1\,1\,0\,1\,1 \\ \hline 1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1_{(2} \end{array}$$

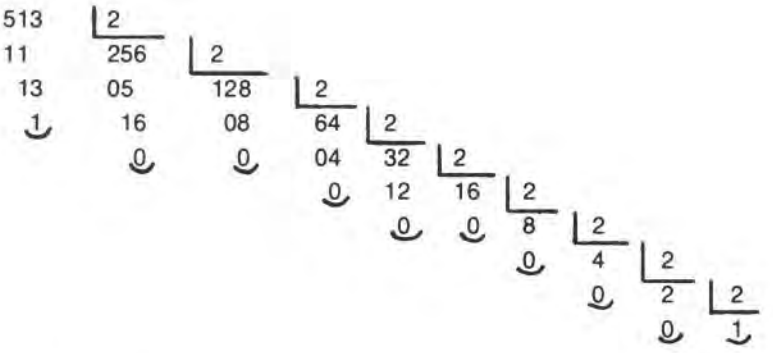
Veamos la comprobación:

$$1\,1\,0\,1\,1_{(2} = 2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = 16 + 8 + 2 + 1 = 27$$

$$1\,0\,0\,1\,1_{(2} = 2^4 + 2^1 + 2^0 = 16 + 2 + 1 = 19$$

$$27 \times 19 = 513$$

y pasando este número al sistema binario:

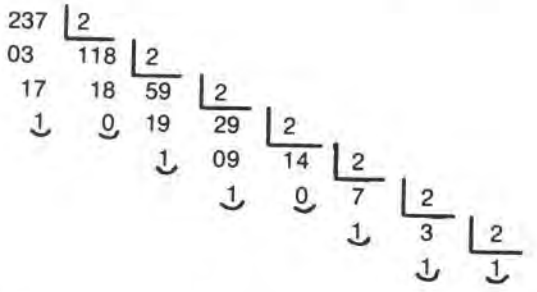


resulta $5\,1\,3 = 1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1_{(2}$

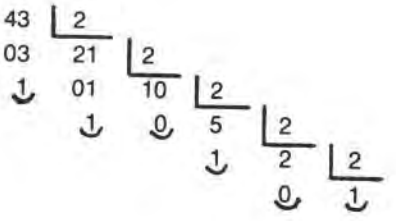
Ejercicios y ejemplos

1. Pasar los siguientes números del sistema decimal al sistema binario: 237, 43, 26, 108.

   Dividimos por dos hasta que aparezca un cociente menor que dos:



$237 = 1\,1\,1\,0\,1\,1\,0\,1_{(2}$



$43 = 1\,0\,1\,0\,1\,1_{(2}$

$$
\begin{array}{r|l}
26 & 2 \\
06 & 13 \quad 2 \\
0 & 1 \quad 6 \quad 2 \\
& 0 \quad 3 \quad 2 \\
& 1 \quad 1
\end{array}
$$

$26 = 11010_{(2}$

$$
\begin{array}{r|l}
108 & 2 \\
08 & 54 \quad 2 \\
0 & 14 \quad 27 \quad 2 \\
& 0 \quad 07 \quad 13 \quad 2 \\
& 1 \quad 1 \quad 6 \quad 2 \\
& 0 \quad 3 \quad 2 \\
& 1 \quad 1
\end{array}
$$

$108 = 1101100_{(2}$

2. Pasar los siguientes números del sistema binario al sistema decimal:

$$1100; \quad 111; \quad 100111$$

Realizando su descomposición obtenemos:

$$1100_{(2} = 1.2^3 + 1.2^2 + 0.2^1 + 0.2^0 = 8 + 4 = 12$$

$$111_{(2} = 1.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0 = 4 + 2 + 1 = 7$$

$$100111_{(2} = 2^5 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 32 + 4 + 2 + 1 = 39$$

3. Sumar en el sistema binario:

a) 1101101 y 1001101.

b) 1010 y 10011.

a)
$$
\begin{array}{r}
1101101 \\
+1001101 \\
\hline
10111010_{(2}
\end{array}
$$

b)
$$
\begin{array}{r}
1010 \\
+10011 \\
\hline
11101_{(2}
\end{array}
$$

4. Multiplicar en el sistema binario:

a) 110101 por 11.

b) 100101 por 111.

a)
$$\begin{array}{r} 1\,1\,0\,1\,0\,1 \\ \times\,1\,1 \\ \hline 1\,1\,0\,1\,0\,1 \\ 1\,1\,0\,1\,0\,1 \\ \hline 1\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1_{(2} \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 1\,0\,0\,1\,0\,1 \\ \times\,1\,1\,1 \\ \hline 1\,0\,0\,1\,0\,1 \\ 1\,0\,0\,1\,0\,1 \\ 1\,0\,0\,1\,0\,1 \\ \hline 1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1 \end{array}$$

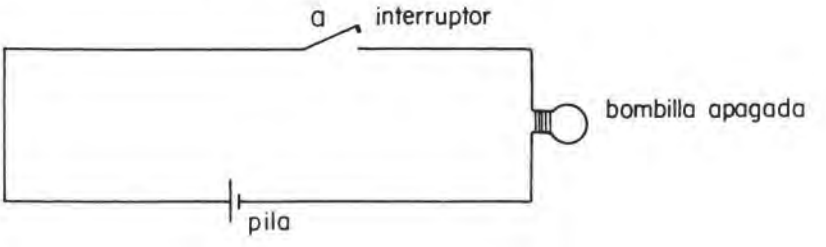
3. CIRCUITOS LOGICOS

En el sistema binario solamente se utilizan dos símbolos, el 0 y el 1. Si elegimos un elemento físico que solamente admita dos estados, por ejemplo un interruptor, un transistor, etc., podemos representar un estado por el símbolo 0, y el otro por el símbolo 1.

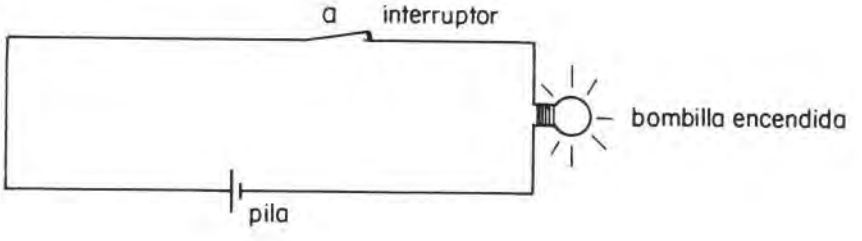
Nosotros consideramos como elemento físico los interruptores de un circuito eléctrico, que admiten dos posiciones: cerrados o abiertos. Cuando un interruptor está abierto, no pasa la corriente, entonces le asignaremos el símbolo 0, y, cuando está cerrado, sí pasa la corriente, asociando, entonces, el símbolo 1. En esencia éste es el fundamento de los computadores electrónicos.

Si un circuito tiene varios interruptores, los designaremos con las letras minúsculas a, b, c, ...

El circuito más simple consta de una pila o generador, un hilo y un interruptor. La bombilla sirve para comprobar si pasa la corriente o no.

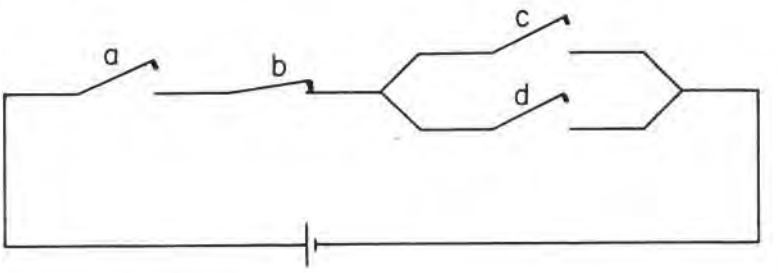


En este ejemplo de interruptor, «a» está abierto, por lo tanto, no pasa la corriente y la bombilla no se enciende. Al interruptor «a» le asignamos el símbolo 0.



En este otro ejemplo el interruptor «a» está cerrado, entonces sí pasa la corriente y la bombilla se enciende. Al interruptor «a» le asignaremos el símbolo 1.

El esquema siguiente muestra un circuito con varios interruptores:



los interruptores *a*, *c* y *d* están abiertos y el *b* está cerrado.

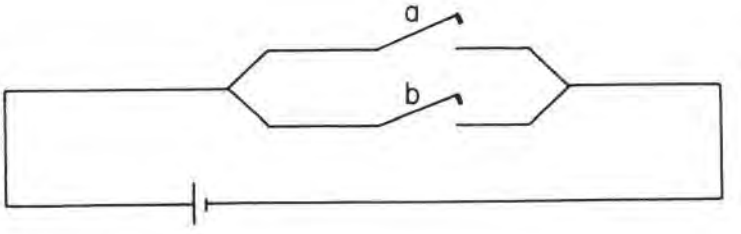
4. COMBINACIONES DE CIRCUITOS

Veamos dos formas de combinar o asociar los interruptores de un circuito: asociación en paralelo y asociación en serie.

4.1. Asociación en paralelo

Si tenemos dos interruptores *a* y *b* en un circuito, llamamos asociación en paralelo de *a* y *b* y lo representamos por a + b; a un nuevo interruptor que estará cerrado cuando esté cerrado *a* o *b*, o ambos a la vez.

La representación gráfica es:



este circuito tiene dos interruptores *a* y *b* colocados en paralelo, esto es análogo a decir que tiene un sólo interruptor al que llamamos *a* + *b*. Como *a* y *b* están abiertos, *a* + *b* también está abierto.

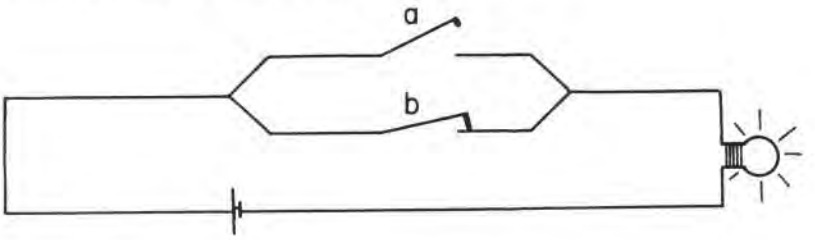
Podemos expresar el funcionamiento de un circuito en paralelo mediante una tabla. Si *a* y *b* son dos interruptores colocados en paralelo, tenemos la tabla siguiente:

a	b	a + b
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

que expresa: si *a* y *b* están cerrados o uno de ellos abierto y el otro cerrado, entonces a + b está cerrado y si *a* y *b* están abiertos, entonces a + b está abierto. En los tres primeros casos pasaría la corriente y si tuviésemos una bombilla se encendería. En el cuarto caso no pasa la corriente y la bombilla no se enciende, en consecuencia.

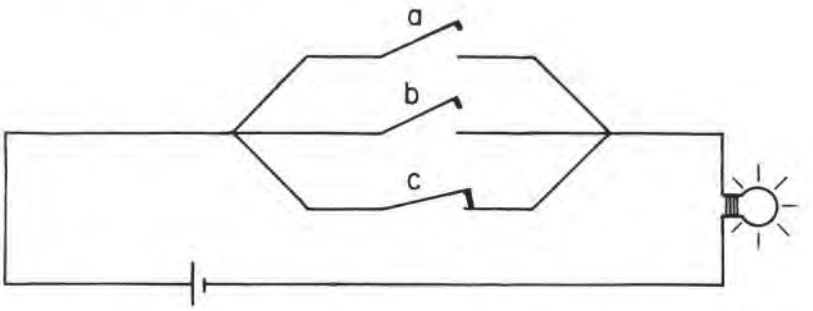
Podemos observar que esta tabla es análoga a la tabla de disyunción de proposiciones.

Veamos unos ejemplos: Consideramos el circuito:



en este caso a = 0 y b = 1, luego a + b = 1, por tanto, pasa la corriente y se enciende la bombilla.

Si consideramos el circuito siguiente:

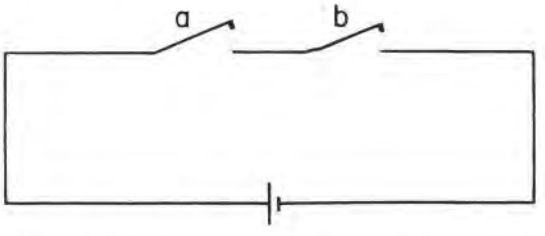


tiene tres interruptores, *a* y *b* están abiertos, y *c* está cerrado. a = 0, b = 0, c = 1, luego el circuito a + b + c = 1, pasa la corriente y se enciende la bombilla.

4.2. Asociación en serie

Si tenemos dos interruptores *a* y *b*, llamaremos asociación en serie de *a* y *b*, y lo representaremos por $a \cdot b$, a un nuevo interruptor que estará cerrado únicamente cuando lo están *a* y *b* simultáneamente.

La representación gráfica es la siguiente:



este circuito tiene dos interruptores *a* y *b* colocados en serie, o también podemos decir que tiene un solo interruptor al que llamaremos $a \cdot b$.

Como *a* y *b* están abiertos, el interruptor $a \cdot b$ está abierto.

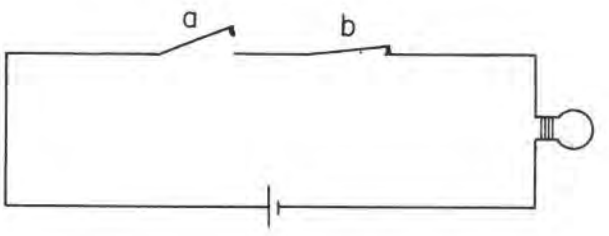
Vamos a expresar el funcionamiento de un circuito en serie con la tabla siguiente:

a	b	a · b
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

siendo *a* y *b* dos interruptores nos indica que: si los dos interruptores están cerrados, a · b también está cerrado, y si uno de los dos o los dos están abiertos, entonces a · b está abierto. En el primer caso pasa la corriente y en los tres últimos casos no pasa.

Si nos fijamos en la tabla observamos que es análoga a la de conjunción de proposiciones.

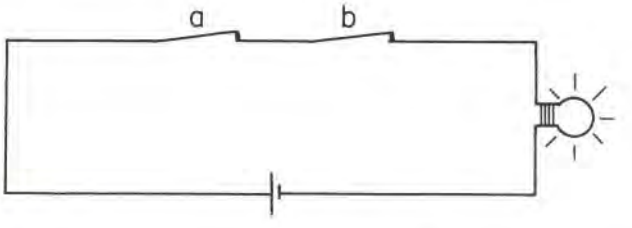
Veamos algunos ejemplos: en el circuito



tenemos dos interruptores *a* y *b* en serie, *a* está abierto y *b* cerrado, luego a · b estará abierto y no pasa la corriente, la bombilla no se enciende.

$$a = 0 \quad b = 1 \quad a \cdot b = 0$$

Consideremos el circuito:

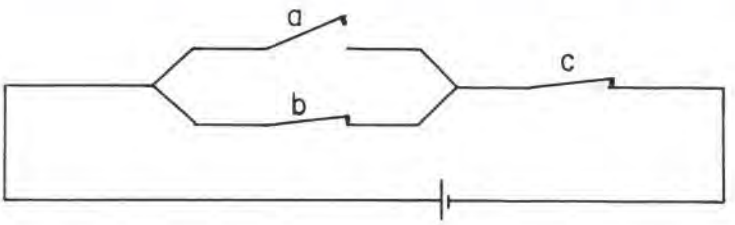


los dos interruptores están cerrados, luego a · b está cerrado, pasa la corriente y se enciende la bombilla.

Igual que hemos definido la asociación de dos interruptores en paralelo y en serie, se define la asociación de tres o más interruptores.

Si hay varios interruptores colocados en paralelo, con que haya uno cerrado es suficiente para que pase la corriente, sin embargo, si están colocados en serie, únicamente pasará la corriente cuando están todos los interruptores cerrados.

También se pueden colocar los interruptores unos en paralelo y otros en serie dentro del mismo circuito. Por ejemplo:



a y *b* están en paralelo, y *a* + *b* y *c* están en serie. Se representarán por (a + b) · c.

$$a = 0 \quad b = 1 \quad y \quad c = 0$$

luego

$$a + b = 1 \quad y \quad c = 0$$

entonces (a + b) · c = 0, es decir, el interruptor (a + b) · c está abierto y no pasa la corriente.

Es fácil de comprender que, muchas veces, es más conveniente colocar los interruptores en paralelo que en serie, ya que si falla un interruptor que esté colocado en paralelo puede pasar la corriente por los otros y se encenderán las bombillas, sin embargo, si los interruptores están colocados en serie, al fallar un interruptor no pasa la corriente y las bombillas no se encienden.

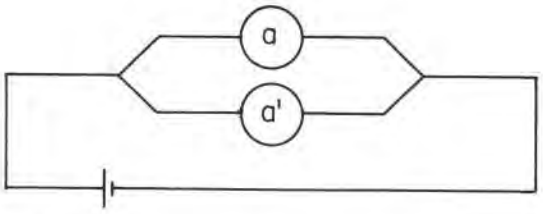
4.3. Interruptor contrario

Dado un interruptor *a*, llamaremos interruptor contrario a *a*, y lo representaremos por *a'*, a un interruptor que estará cerrado cuando *a* esté abierto, y estará abierto cuando *a* esté cerrado.

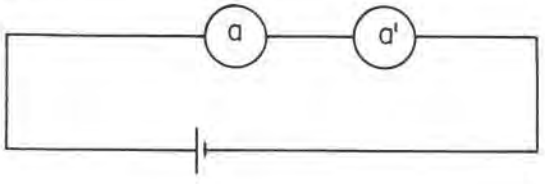
Expresamos esta definición con la tabla:

a	a'
1	0
0	1

Podemos observar que esta tabla es igual a la tabla de la negación de una proposición. Siempre se verifica que a + a' = 1 y a · a' = 0, es decir, por el circuito:



siempre pasa la corriente y por el:

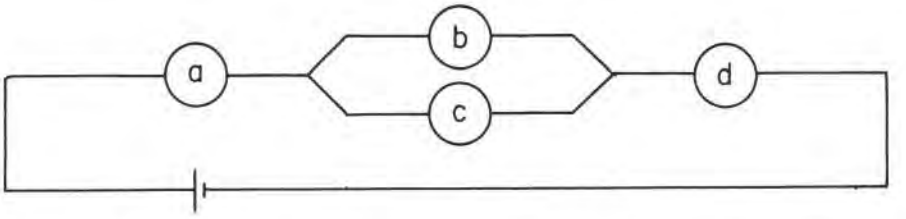


no pasa nunca. También se verifica que (a')' = a, ya que:

a	a'	(a')'
1	0	1
0	1	0

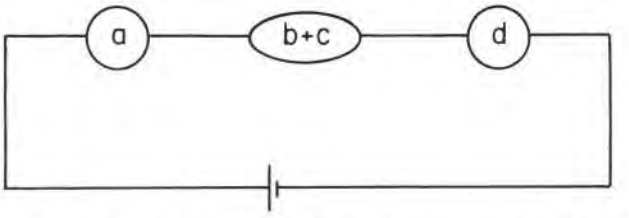
Ejercicios y ejemplos

1. Decir cómo están colocados los interruptores del siguiente circuito:



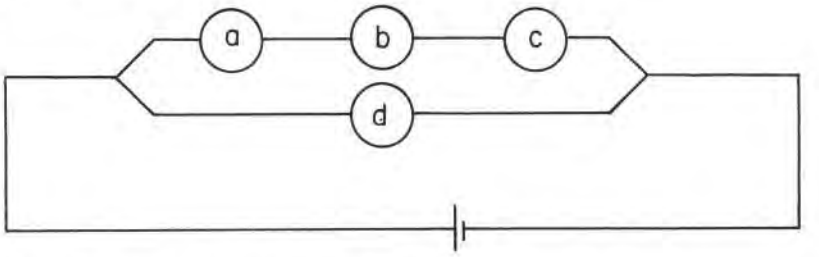
b y *c* están en paralelo, y *a*, *d* y *b* + *c* están en serie, por tanto, la expresión será: a · (b + c) · d.

Este circuito lo podemos representar también como:

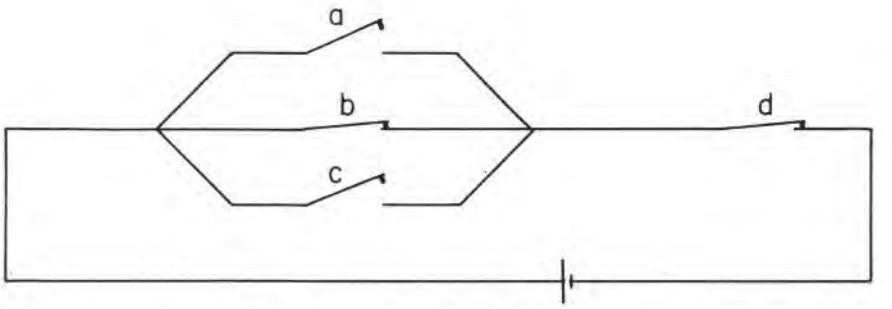


2. Construir un circuito que tenga tres interruptores en serie y uno en paralelo con estos tres.

El circuito será de la forma:

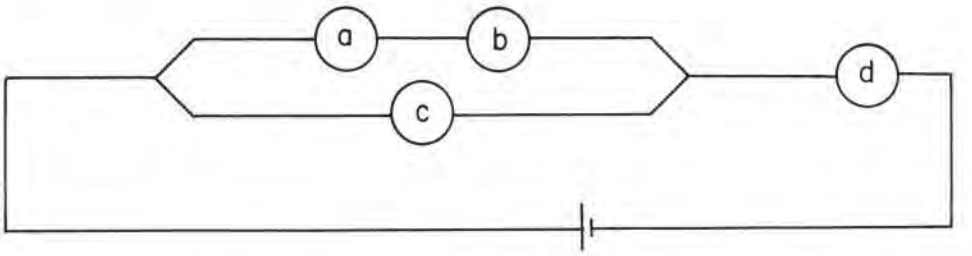


3. Estudiar si en el circuito siguiente pasa la corriente o no.



a = 0 b = 1 c = 0 entonces a + b + c = 1; d = 1, luego (a + b + c) · d = 1, por tanto pasa la corriente.

4. Escribir la expresión que representa el circuito:



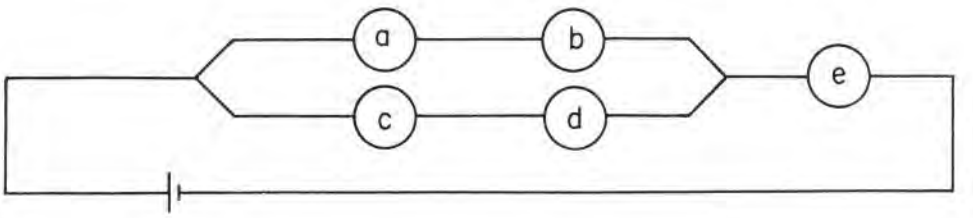
los interruptores *a* y *b* están en serie, el $a \cdot b$ y *c* están en paralelo y el resultante de éstos está en serie con el *d*. Por tanto será:

$$[(a \cdot b) + c] \cdot d$$

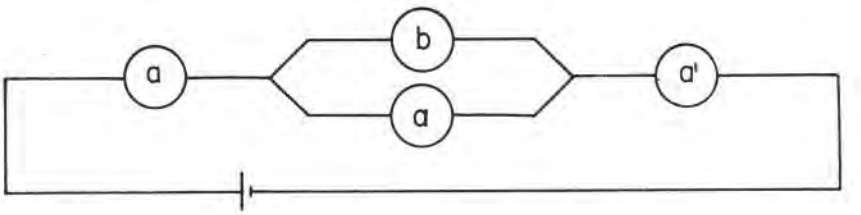
5. Representar gráficamente el circuito que viene expresado por:

$$[(a \cdot b) + (c \cdot d)] \cdot e$$

Los interruptores *a* y *b* están en serie, y los *c* y *d* también; además $a \cdot b$ y $c \cdot d$ están en paralelo, y el resultante de éstos está en serie con el e. Por tanto, será:



6. Decir si por el circuito siguiente pasa la corriente o no.



Por el gráfico no sabemos qué interruptores están abiertos y qué interruptores están cerrados. Tendremos, entonces, que considerar todos los casos posibles.

Si *a* está abierto, como está colocado en serie con los interruptores $b + a$ y a', al estar a' cerrado no pasa la corriente independientemente de que los otros estén abiertos o cerrados.

Si *a* está cerrado, a' estará abierto y como está colocado en serie con los otros dos, no pasa la corriente. No pasa, pues, la corriente en ningún caso.

También podemos expresarlo mediante la tabla siguiente:

a	b	b + a	a′	a · (b + a)	a · (b + a) · a′
1	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	0	0

Como todos son ceros, siempre estará abierto.

5. Circuitos equivalentes

Se dice que dos circuitos son equivalentes cuando las tablas de respuesta de ambos coinciden.

La equivalencia de circuitos lógicos es análoga a la equivalencia de proposiciones.

El circuito del ejemplo n.° 6 es equivalente al circuito $a \cdot a'$, ya que éste también estará siempre abierto y su tabla de verdad coincide con la del circuito $a \cdot (b + a) \cdot a'$.

a	a′	a · a′
1	0	0
0	1	0

Otro ejemplo: Vamos a comprobar que los circuitos $(a \cdot b) + a$ y $(a + b) \cdot a$ son equivalentes. Para ello formamos las tablas correspondientes para las distintas posiciones de apertura o cierre.

a	b	a · b	(a · b) + a
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	0
0	0	0	0

a	b	a + b	(a + b) · a
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	0
0	0	0	0

Vemos que las tablas de dichos circuitos coinciden, luego son equivalentes.

Estas tablas se forman de igual manera que las tablas de verdad de las proposiciones.

La equivalencia de circuitos se representa con el símbolo =, así en el último ejemplo será: $(a \cdot b) + a = (a + b) \cdot a$.

También podemos decir que dos circuitos son equivalentes cuando para las mismas posiciones de sus interruptores elementales sus condiciones de apertura o cierre son las mismas.

Para demostrar la igualdad o equivalencia de circuitos se utilizan las tablas de respuesta, si éstas coinciden en todos los casos, los circuitos son equivalentes, y si en algún caso no coinciden no son equivalentes.

Por ejemplo, vamos a demostrar que los circuitos $(a + b) \cdot a' \cdot b$ y $(a + b) \cdot a' \cdot b'$ no son equivalentes. Formamos la tabla:

a	b	a′	b′	a + b	(a + b) · a′	(a + b) · a′ · b	(a + b) · a′ · b′
1	1	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1	0
0	0	1	1	0	0	0	0

Como en el tercer caso no coinciden, ya que $(a + b) \cdot a' \cdot b = 1$ y $(a + b) \cdot a' \cdot b' = 0$, no son equivalentes.

6. ALGEBRA DE BOOLE DE LOS CIRCUITOS LOGICOS

Vamos a ver que el conjunto de los circuitos con las operaciones: asociación en serie y en paralelo, y el circuito contrario forman un *Algebra de Boole*.

Para ello es necesario comprobar que cumplen determinadas propiedades ya conocidas. Estas propiedades las demostraremos mediante las tablas de respuesta.

— Propiedad conmutativa

Para todo par de interruptores *a* y *b* se verifica: $a + b = b + a$ y $a \cdot b = b \cdot a$.

Demostración

a	b	a + b	b + a	a · b	b · a
1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0

Las columnas tercera y cuarta coinciden y las quinta y sexta también, se verifica, por tanto, la propiedad conmutativa.

— Propiedad asociativa

Para tres cualesquiera interruptores a, b y c se verifica que:

$$(a + b) + c = a + (b + c) \text{ y } (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

a	b	c	a + b	b + c	(a + b) + c	a + (b + c)	a · b	b · c	(a · b) · c	a · (b · c)
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Las columnas sexta y séptima coinciden para todos los valores y la penúltima y última también, luego se verifica la propiedad asociativa.

— Propiedad idempotente

Para todo interruptor *a* se verifica:

$$a + a = a \quad \text{y} \quad a \cdot a = a$$

Demostración

a	a + a	a · a
1	1	1
0	0	0

Como las tres columnas coinciden se verifica: $a + a = a$ y $a \cdot a = a$.

— Propiedad simplificativa o de absorción

Si *a* y *b* son dos interruptores cualesquiera se verifica:

$$(a + b) \cdot a = a \quad \text{y} \quad (a \cdot b) + a = a$$

Demostración

a	b	a + b	(a + b) · a	a · b	(a · b) + a
1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Las columnas primera, cuarta y sexta coinciden, luego se verifica la propiedad simplificativa. Como se verifican estas cuatro propiedades, podemos asegurar que el conjunto de los circuitos con las operaciones + y · tiene estructura de retículo.

Podemos añadir que es un retículo distributivo y complementario, como veremos a continuación estudiando las correspondientes propiedades.

— Propiedad distributiva

Si *a*, *b* y *c* son tres interruptores cualesquiera se verifica:

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \quad y \quad a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$$

Demostración

a	b	c	b + c	a(b + c)	a · b	a · c	(a · b) + (a · c)
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Vemos que las columnas quinta y octava coinciden, luego se verifica:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

a	b	c	b · c	a + (b · c)	a + b	a + c	(a + b) · (a + c)
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

las columnas quinta y octava coinciden, luego se verifica

$$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$$

Ya tenemos que el retículo es distributivo.

— Complementario

Para cualquier interruptor *a* existe el interruptor contrario *a'*, que verifica:

$$a + a' = 1 \quad y \quad a \cdot a' = 0$$

Demostración

a	a′	a + a′	a · a′
1	0	1	0
0	1	1	0

luego se verifica: $a + a' = 1$ y $a \cdot a' = 0$.

Por tanto, el conjunto de los circuitos con las operaciones + y · tiene estructura de retículo complementario y distributivo, tiene, pues, estructura de Algebra de Boole.

7. LEYES DE MORGAN

Si *a* y *b* son dos interruptores cualesquiera se verifica:

$$(a + b)' = a' \cdot b' \quad \text{y} \quad (a \cdot b)' = a' + b'$$

Estas dos igualdades son las leyes de Morgan. Veamos la demostración con las tablas de respuesta:

a	b	a + b	(a + b)′	a′	b′	a′ · b′	a · b	(a · b)′	a′ + b′
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	0	1	1

las columnas cuarta y séptima coinciden y las novena y décima también, luego se verifica:

$$(a + b)' = a' \cdot b' \quad \text{y} \quad (a \cdot b)' = a' + b'$$

NOTAS ACLARATORIAS Y COMPLEMENTARIAS

El alumno habrá observado que en la exposición de este tema hemos empleado indistintamente las palabras interruptor y circuito para designar una misma cosa. Habrá comprendido que solamente nos interesan los interruptores.

Hemos señalado en repetidas ocasiones la analogía entre conceptos definidos al hablar de las proposiciones con los expuestos con referencia a los circuitos lógicos. De una manera sencilla, podemos decir que esta analogía se observa de una forma inmediata sin más que comparar lo que hemos llamado «tablas de verdad» con las denominadas «tablas de respuesta». De las primeras podemos pasar a las segundas, sin más que cambiar el símbolo V por el signo 1 y el símbolo F por el signo 0. Aconsejamos que el alumno insista en esta circunstancia.

CONCLUSIONES TEMA VIII

<table>
<tr><td colspan="2">SISTEMA DE NUMERACION</td><td>Conjunto de reglas que nos permiten representar todos los números naturales mediante algunos símbolos o palabras.</td></tr>
<tr><td colspan="2">SISTEMA BINARIO</td><td>Es un sistema de numeración que tiene por base el número dos. Solamente emplea los símbolos 0 y 1.</td></tr>
<tr><td colspan="2">PASO DEL SISTEMA DECIMAL AL BINARIO</td><td>Se divide el número escrito en base decimal por dos, tantas veces como sea necesario hasta llegar a un cociente que sea menor que dos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">PASO DEL SISTEMA BINARIO AL DECIMAL</td><td>Se descompone en forma polinómica y se suma.</td></tr>
<tr><td colspan="2">TABLA DE SUMAR SISTEMA BINARIO</td><td><table><tr><th>+</th><th>0</th><th>1</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>10</td></tr></table></td></tr>
<tr><td colspan="2">TABLA DE MULTIPLICAR SISTEMA BINARIO</td><td><table><tr><th>·</th><th>0</th><th>1</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr></table></td></tr>
<tr><td colspan="2">CIRCUITOS LOGICOS</td><td>Elegimos un elemento físico que admite dos estados que se pueden representar por los símbolos 0 y 1. Los interruptores de un circuito eléctrico admiten dos posiciones: cerrados y abiertos. Cuando un interruptor está abierto no pasa corriente, le asignamos el símbolo 0 y cuando está cerrado, el número 1.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">COMBINACIONES DE CIRCUITOS</td><td>ASOCIACION EN PARALELO</td><td><table><tr><th>a</th><th>b</th><th>a + b</th></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>ASOCIACION EN SERIE</td><td><table><tr><th>a</th><th>b</th><th>a · b</th></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table></td></tr>
</table>

INTERRUPTOR CONTRARIO	Interruptor contrario a *a*, y lo representamos por *a'* es otro interruptor que está cerrado cuando *a* está abierto y abierto cuando *a* está cerrado.
CIRCUITOS EQUIVALENTES	Dos circuitos son equivalentes cuando las tablas de respuesta coinciden.
ALGEBRA DE BOOLE DE LOS CIRCUITOS LOGICOS	El conjunto de los circuitos con las operaciones, asociación en serie y en paralelo y el circuito contrario forman un Algebra de Boole.

EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. Escribir los números: 15, 93 y 317 en el sistema binario.

2. Pasar los números: $1\,1\,0\,0\,1\,0_{(2}$, $1\,0\,1\,1_{(2}$ y $1\,0\,0\,1\,0\,1\,1_{(2}$ del sistema binario al decimal.

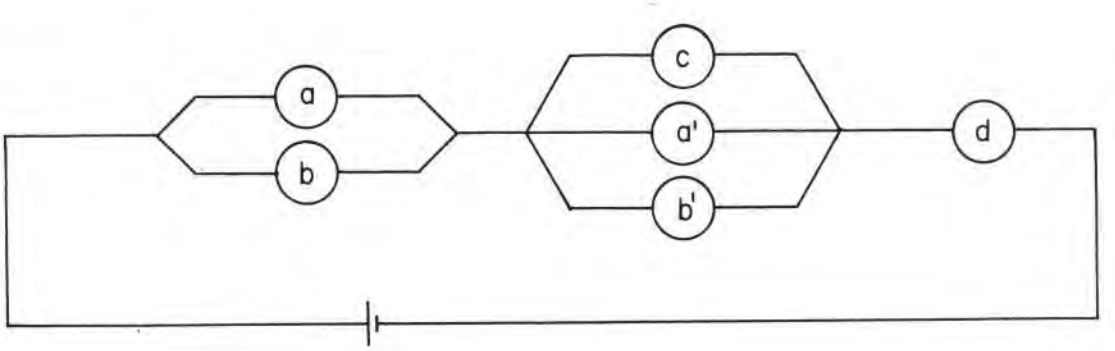
3. Sumar en el sistema binario los números: 1 1 0 0 1 y 1 0 1 1 1.

4. Multiplicar en el sistema binario los números: 1 1 0 1 0 1 y 1 1 0 1.

5. Hallar el máximo número que en base dos tiene seis cifras.

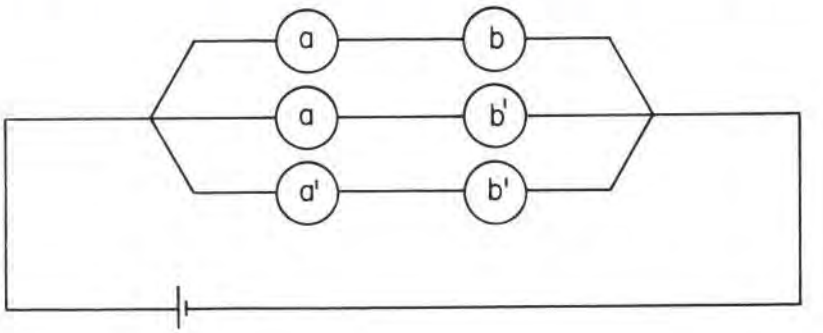
6. Si la suma de dos números es $1\,0\,0\,1\,1_{(2}$ y uno de ellos es $1\,0\,0\,0_{(2}$. Hallar el otro número.

7. Escribir la expresión representada por el circuito:



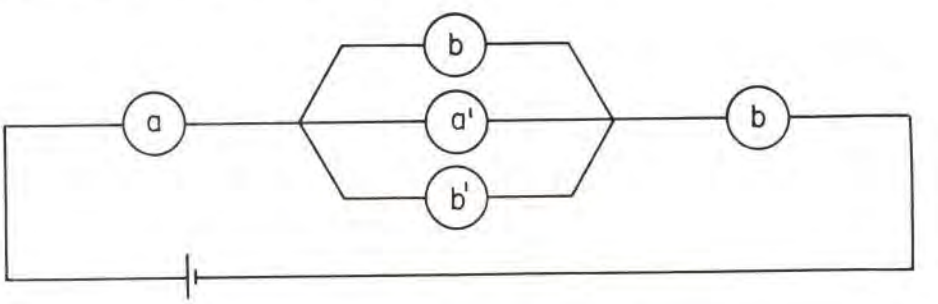
8. Representar gráficamente el circuito definido por la expresión: $a \cdot (b + c) \cdot (d + b') \cdot a'$ y decir si pasa la corriente o no.

9. Haciendo uso de las propiedades de Algebra de Boole, simplificar el circuito:



10. Construir un circuito que tenga dos interruptores en paralelo y dos en serie con los anteriores.

11. Estudiar si por el siguiente circuito pasa corriente o no:



12. Si (A, $\perp$, T) tiene estructura de álgebra de Boole, ¿(A, T, $\perp$) qué estructura tendrá?

13. Demostrar que los circuitos $a + a \cdot b' + a' \cdot b$ y $a + b$ son equivalentes.

14. Simplificar las siguientes expresiones:

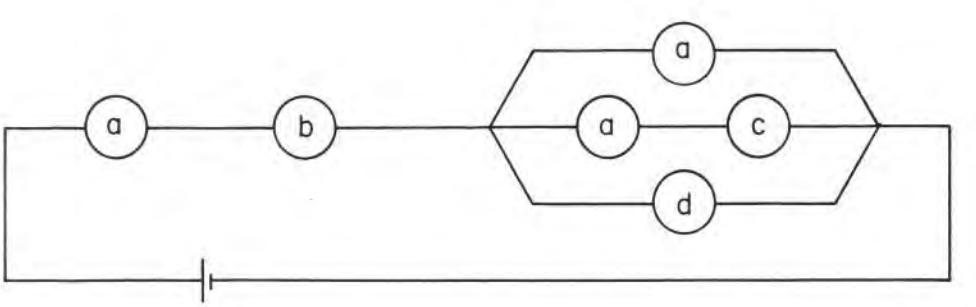
    a) $a + (a' \cdot b)$

    b) $(a \cdot b) + (a' + b')$.

15. Decir si pasa corriente por los dos circuitos:

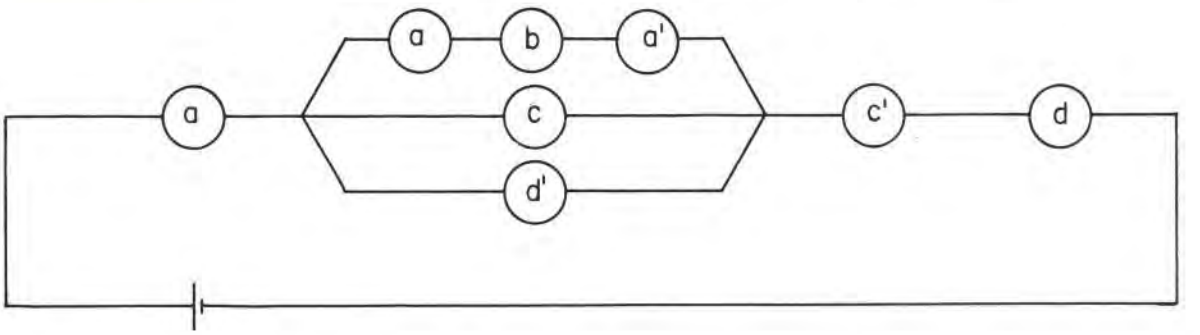
$$(a + b) \cdot (a' + b') \quad \text{y} \quad (a + b) \cdot a' \cdot b'$$

16. Escribir la expresión representada por el circuito:



17. Ver si son equivalentes los circuitos $(a + b) \cdot c$ y $a \cdot (b + c)$.

18. Escribir la expresión del circuito siguiente y decir en qué caso pasa la corriente:



19. Aplicando las leyes de Morgan, demostrar que el circuito $[(a + b) \cdot a]'$ es equivalente al $a' \cdot b' + a'$.

20. Ver si son equivalentes los circuitos: $a \cdot b \cdot (a' + b) \cdot (c + c')$ y $a \cdot b$.

SOLUCION A LOS EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. $15 = 1111_{(2}$; $93 = 1011101_{(2}$;
   $317 = 100111101_{(2}$

2. $110010 = 2^5 + 2^4 + 2 = 32 + 16 + 2 = 50$
   $1011 = 2^3 + 2 + 1 = 8 + 2 + 1 = 11$
   $1001011 = 2^6 + 2^3 + 2 + 1 = 64 + 8 + 2 + 1 = 75$

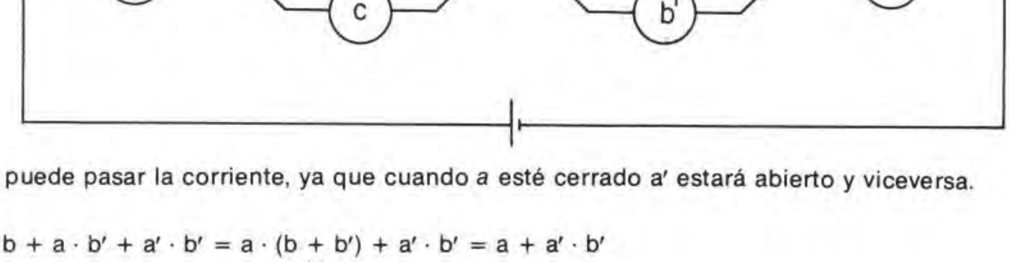
3. $11001_{(2} + 10111_{(2} = 110000_{(2}$

4. $110101 \times 1101 = 1010110001$

5. $111111_{(2} = 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1 = 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 63$

6. $10011_{(2} - 1000_{(2} = 1011_{(2}$

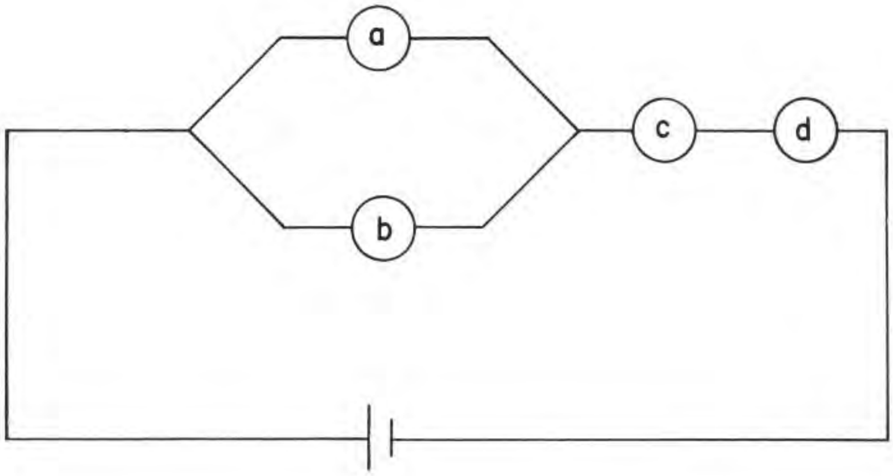
7. $(a + b) \cdot (c + a' + b') \cdot d$

8. 

   No puede pasar la corriente, ya que cuando *a* esté cerrado a' estará abierto y viceversa.

9. $a \cdot b + a \cdot b' + a' \cdot b' = a \cdot \underbrace{(b + b')}_{1} + a' \cdot b' = a + a' \cdot b'$

10. Será (a + b) · c · d



11. Pasará la corriente únicamente en el caso en que *a* y *b* estén cerrados a la vez.

12. La misma, pues, las dos operaciones tienen que cumplir las mismas propiedades.

13.

a	b	a′	b′	a · b′	a′ · b	a + a · b′	a + a · b′ + a′ · b	a + b
1	1	0	0	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0	0	0

Las dos últimas columnas coinciden, luego a + a · b′ + a′ · b = a + b.

14. a) a + (a′ · b) = (a + a′) · (a + b) = a + b
||
1

b) (a · b) + (a′ + b′) Leyes de Morgan (a · b) + (a · b)′ = 1, es decir, un circuito por el que siempre pasa corriente.

15.

a	b	a + b	a′	b′	a′ + b′	(a + b) · (a′ + b′)
1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	0

Pasa corriente cuando *a* = 1 y *b* = 0 y cuando *a* = 0 y *b* = 1

(a + b) · a′ · b′ = 0

ya que si *a* = 1, a′ = 0 y si *b* = 1, b′ = 0

16. a · b · (a + a · c + d)

17.

a	b	c	a + b	(a + b) · c	b + c	a · (b + c)
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0

Luego no son equivalentes.

18. $a \cdot (a \cdot b \cdot a' + c + d') \cdot c' \cdot d$. No pasa la corriente en ningún caso.

19. $[(a + b) \cdot a]' = (a + b)' + a' = a' \cdot b' + a'$

20. $a \cdot b \cdot (a' + b) \cdot \underbrace{(c + c')}_{1} = a \cdot b \cdot (a' + b) =$

$= a \cdot (b \cdot a' + \underbrace{b \cdot b}_{b}) = \underbrace{a \cdot b \cdot a'}_{o} + a \cdot b = a \cdot b.$

También se puede demostrar haciendo la tabla correspondiente.

Luego son equivalentes.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE
EDUCACION A DISTANCIA

MATEMATICAS BASICAS

UNIDAD DIDACTICA/3

Preparada por los profesores:
C. Herrera González
J. R. Marco Franco
J. Summers Gámez

TEMA IX

EL NUMERO NATURAL

ESQUEMA/RESUMEN

1. El número natural.
   1.1. Definición de número natural.

2. Operaciones con los números naturales.
   2.1. Suma de números naturales.
      2.1.2. Propiedades de la suma de números naturales.
   2.2. Producto de números naturales.
      2.2.1. Propiedades del producto de números naturales.

3. Estructura algebraica del conjunto de los números naturales.

4. Ordenación en el conjunto de los números naturales.

5. Sistemas de numeración.
   5.1. Teorema fundamental de la numeración.
   5.2. Algunos sistemas de numeración no decimales.
   5.3. Paso de un sistema de numeración a otro.
   5.4. Operaciones en cualquier base.

INSTRUCCIONES PARA EL ESTUDIO DEL TEMA

Con este tema vamos a iniciarnos en el estudio de los números; empezamos con los números naturales.

En un principio puede parecer complicado el proceso seguido para definir el conjunto de los números naturales, debe fijarse el alumno que solamente se utilizan conceptos estudiados en la primera Unidad Didáctica de este Curso de Matemáticas Básicas. Tenemos la seguridad de que si los conceptos vertidos en ella han quedado claros, no tendrá especial dificultad en comprender los razonamientos utilizados para establecer el conjunto de los números naturales.

Una vez establecido el conjunto de los números naturales definimos dos leyes de composición interna; la suma y el producto de números naturales. Estudiando las propiedades de estas dos leyes de composición interna, podemos averiguar la estructura algebraica del conjunto de los números naturales.

Aconsejamos prestar mucha atención al concepto de número natural, por ser fundamental para entender los siguientes temas en los que hablamos de las restantes clases de números.

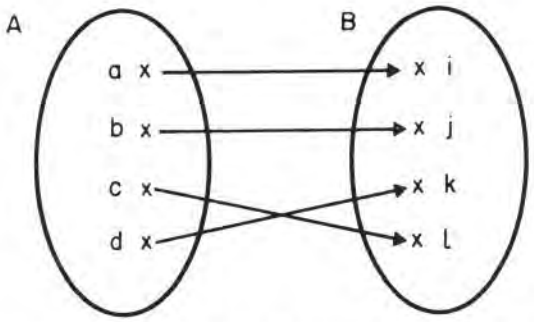
Terminamos el presente tema ampliando brevemente lo estudiado en la Unidad Didáctica anterior sobre sistemas de numeración, en aquella ocasión solamente vimos el sistema de numeración binario, ahora haremos un estudio de los sistemas de numeración de una manera general.

BIBLIOTECA PUBLICA
PTO. STA. MARIA

1. EL NUMERO NATURAL

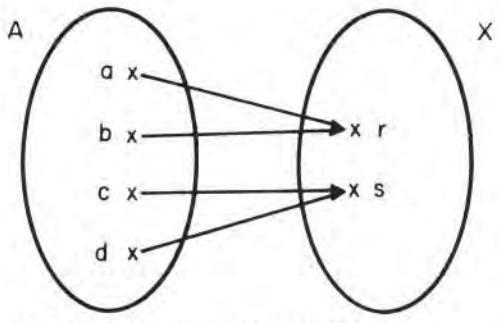
1.1. Definición de número natural

Entre los conjuntos A = {a, b, c, d} y B = {i, j, k, l} establecemos una aplicación biyectiva, mediante el siguiente diagrama:



Cuando, entre el conjunto A y el conjunto B se puede establecer una aplicación biyectiva o correspondencia biunivoca, diremos que el conjunto *A es equipotente con B*.

La aplicación entre A = {a, b, c, d} y X = {r, s} definida mediante el siguiente diagrama:



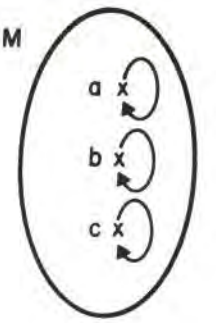
no es una aplicación biyectiva, por lo tanto, *A no es equipotente con X.*

En general, diremos que dos conjuntos M y N son equipotentes si podemos establecer una correspondencia biunívoca entre ellos; los simbolizaremos así $M \sim N$.

También se suele decir que M es coordinable con N.

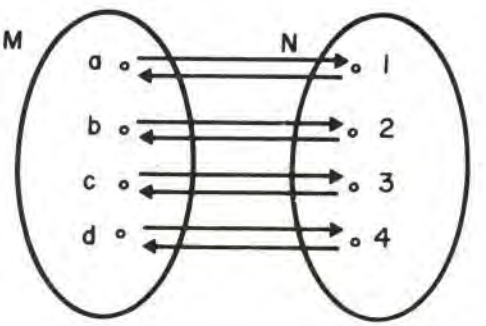
La equipotencia de conjuntos goza de algunas propiedades que vamos a estudiar a continuación:

i) La equipotencia de conjuntos es reflexiva, es decir, todo conjunto es equipotente consigo mismo. $M \sim M$.

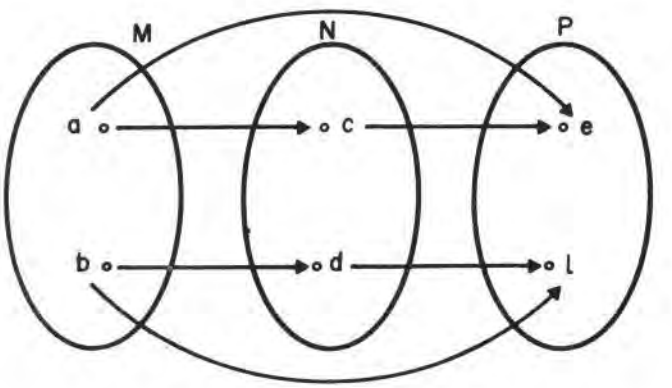


ii) La equipotencia de conjuntos es simétrica, es decir, si M es equipotente con N, entonces también N es equipotente con M.

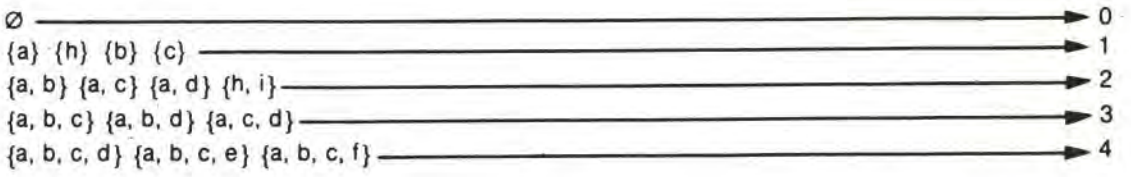
$$M \sim N \Rightarrow N \sim M$$



iii) La equipotencia de conjuntos es transitiva, es decir, si M es equipotente con N y N es equipotente con P, entonces M es equipotente con P.



Como consecuencia la equipotencia de conjuntos es una relación de equivalencia. Como ya sabemos, las clases de equivalencia producen clasificaciones, estas clases de equivalencia las podemos esquematizar así:



Esto es, cada una de las clases de equivalencia está formada por todos los conjuntos que tienen el mismo número de elementos (se recordará qué entre dos conjuntos solamente se puede establecer una aplicación biyectiva cuando tienen el mismo número de elementos).

La clase formada por el conjunto vacío se llama *número cero,* la clase formada por todos los conjuntos de un sólo elemento se llama *número uno.* La clase formada por todos los conjuntos que tienen dos elementos se llama *número dos,* etcétera.

Por tanto, los números naturales son las clases de equivalencia producidas por la relación de coordinabilidad entre conjuntos o la relación de equipotencia, pues de las dos formas puede decirse. Según esto el conjunto de los números naturales será el conjunto de las clases, o sea, el conjunto cociente.

Al conjunto de los números naturales, como ya hemos visto, lo designamos por la letra N:

$$N = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Para decir, por ejemplo, que el conjunto {a, b, c} pertenece a la clase 3, diremos que el cardinal del conjunto {a, b, c} es 3 y lo escribiremos así:

$$\text{card}(\{a, b, c\}) = 3$$

Podemos, lógicamente, variar la definición de equipotencia o coordinabilidad de conjuntos, de acuerdo con este último criterio. Dos conjuntos M y N son equipotentes si tienen el mismo cardinal, o sea:

$$M \sim N \iff \text{card}(M) = \text{card}(N)$$

2. OPERACIONES CON LOS NUMEROS NATURALES

2.1. Suma de números naturales

Sean dos números naturales por ejemplo, 2 y 4. Elegimos dos conjuntos cualesquiera pertenecientes, respectivamente a las clases 2 y 4 y disjuntos:

$$A = \{a, b\} \quad \text{card}(A) = 2$$
$$B = \{e, i, o, u\} \quad \text{card}(B) = 4$$

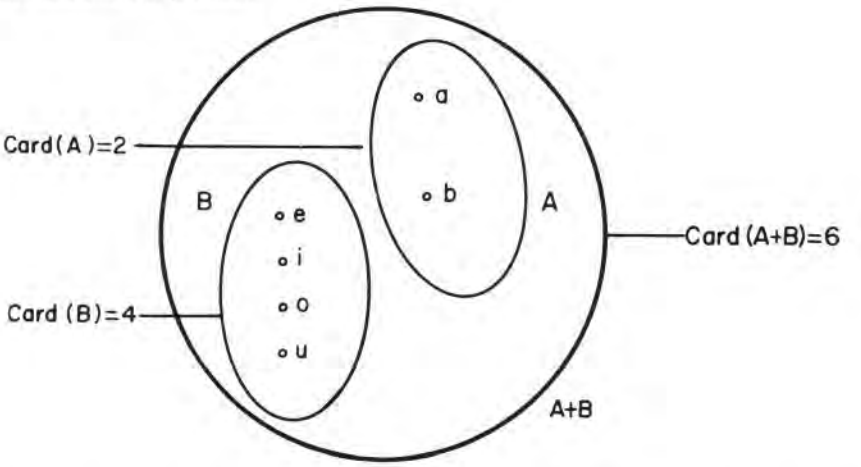
Es evidente que $A \cap B = \emptyset$, construimos, el conjunto suma A + B:

$$A + B = \{a, b, e, i, o, u\}$$

este conjunto pertenece a la clase 6. Se puede decir que: 2 + 4 = 6.

$$\text{card}(A + B) = 6$$

Primero esquematizamos el proceso:



y ahora lo generalizamos: Dados dos números naturales a y b si A y B son dos conjuntos, tales que:

$$\text{card}(A) = a \quad \text{card}(B) = b \quad A \cap B = \varnothing$$

se llama suma de a y b al número natural

$$s = \text{card}(A + B)$$

Acabamos de definir una ley de composición interna en el conjunto N de los números naturales, de manera que a cada pareja de números naturales *a* y *b* le asociamos otro número natural único $a + b$ independiente de los representantes, A y B, elegidos.

La suma es una aplicación de $N \times N$ en N

$$(a, b) \xrightarrow{+} a + b$$

Vamos a justificar lo que acabamos de decir: *A* es un representante cualquiera de la clase *a* y *B* es un representante cualquiera de la clase *b*. Si en lugar de *A* hubiéramos tomado otro representante, *A'*, de *a* y en vez de *B* hubiéramos escogido otro conjunto *B'*, disjunto con *A'*, perteneciente a la clase *b*, hubiéramos obtenido el mismo resultado:

$$\begin{array}{l} A \longrightarrow a \\ B \longrightarrow b \\ \hline A + B \longrightarrow a + b \end{array} \qquad A \cap B = \varnothing$$

$$\begin{array}{l} A' \longrightarrow a \\ B' \longrightarrow b \\ \hline A' + B' \longrightarrow a + b \end{array} \qquad A' \cap B' = \varnothing$$

los resultados coinciden. Como A y A' pertenecen a la misma clase, a:

$$\text{card}(A) = \text{card}(A')$$

Análogamente:

$$\text{card}(B) = \text{card}(B')$$

por tanto:

$$\text{card}(A + B) = \text{card}(A' + B')$$

2.1.2. Propiedades de la suma de números naturales

1. *CONMUTATIVA*

Cualesquiera que sean los números naturales *a* y *b* se verifica:

$$a + b = b + a$$

consecuencia lógica de la conmutatividad de la suma de conjuntos.

2. *ASOCIATIVA*

Si *a, b, c* son tres números naturales cualesquiera, tenemos:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

expresión fácil de comprobar recordando que la suma de conjuntos cumple la propiedad asociativa.

3. *EXISTENCIA ELEMENTO NEUTRO*

Existe un número natural, el cero, que sumado con cualquier número natural *a*, es a:

$$a + 0 = a$$

lo podemos comprobar fácilmente; basta recordar, para ello, que la clase formada por el conjunto vacio la llamábamos número cero, luego card $(\phi) = 0$. Sea A un conjunto cualquiera, tal que, card (A) = = a. Es evidente que $A \cap \phi = \phi$, por tanto, los conjuntos A y ϕ son disjuntos.

Construimos el conjunto:

$$A + \phi = A$$

luego:

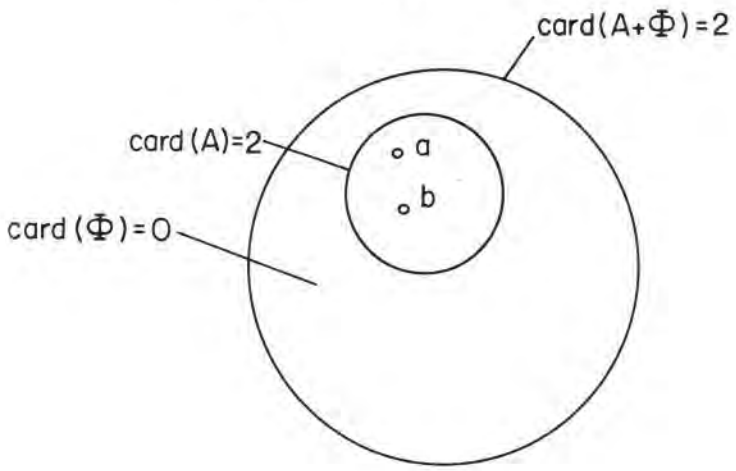
$$\text{card } (A + \phi) = \text{card } A$$

esto es,

$$a + 0 = a$$

Esquemáticamente:

$A = \{a, b\}$ card (A) = 2
ϕ card $(\phi) = 0$



por tanto,

$$2 + 0 = 2$$

2.2. Producto de números naturales

Dados dos números naturales *a* y *b*, si A y B son dos conjuntos cualesquiera, tales que:

$$\text{card}\,(A) = a \quad \text{card}\,(B) = b$$

se llama producto de *a* y *b* al número natural

$$\text{card}\,(A \times B)$$

Aclaramos la definición con un ejemplo: sean dos números naturales cualesquiera 2 y 3. Elegimos un representante de la clase 2 y otro de la clase 3.

$$M = \{a, b\}$$
$$N = \{a, e, i\}$$

formamos el conjunto producto:

$$M \times N = \{(a, a), (a, e), (a, i), (b, a), (b, e), (b, i)\}$$

luego el

$$\text{card}\,(M \times N) = 6$$

diremos que el producto de 2 por 3 es 6; $2 \times 3 = 6$.

El producto de números naturales es otra ley de composición interna, que asocia a cada pareja *a* y *b* de números naturales otro número natural único independiente de los representantes A y B elegidos.

Insistimos en este último párrafo: Decir que el producto de números naturales es una ley de composición interna, supone afirmar (*) que es una aplicación de $N \times N$ en N, de manera que,

$$(a, b) \rightarrow a \times b$$

siendo, por supuesto, *a* y *b* dos números naturales cualesquiera.

Veamos, a continuación, que el producto de números naturales es independiente de los representantes A y B elegidos. Sea el conjunto A un representante cualquiera de la clase *a* y el conjunto B un representante cualquiera de la clase *b*. A′ y B′ son dos conjuntos que pertenecen, respectivamente, a las clases a y b. Según lo dicho podemos escribir:

$$\text{card}\,(A) = \text{card}\,(A') = a$$
$$\text{card}\,(B) = \text{card}\,(B') = b$$

Especifiquemos los conjuntos de la siguiente manera:

$$A = \{a_1, a_2, \ldots a_a\}$$
$$A' = \{a'_1, a'_2, \ldots a'_a\}$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots b_b\}$$
$$B' = \{b'_1, b'_2, \ldots b'_b\}$$

(*) Basta recordar la definición de ley de composición interna.

calcularemos A × B y A′ × B′

$$A \times B = \left\{ \begin{array}{l} (a_1, b_1), (a_1, b_2), \ldots, (a_1, b_b) \\ (a_2, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_2, b_b) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (a_a, b_1), (a_a, b_2), \ldots, (a_a, b_b) \end{array} \right\}$$

$$A' \times B' = \left\{ \begin{array}{l} (a'_1, b'_1), (a'_1, b'_2), \ldots, (a'_1, b'_b) \\ (a'_2, b'_1), (a'_2, b'_2), \ldots, (a'_2, b'_b) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (a'_a, b'_1), (a'_a, b'_2), \ldots, (a'_a, b'_b) \end{array} \right\}$$

Al elemento $(a_1, b_1) \in A \times B$ le hacemos corresponder $(a'_1, b'_1) \in A' \times B'$

Al elemento $(a_1, b_2) \in A \times B$ le hacemos corresponder $(a'_1, b'_2) \in A' \times B'$

De manera general, $(a_i, b_j) \in A \times B$ le hacemos corresponder $(a'_i, b'_j) \in A' \times B'$, por lo tanto, el conjunto A × B tiene el mismo número de elementos que A′ × B′, esto supone que:

$$\text{card } (A \times B) = \text{card } (A' \times B')$$

2.2.1. Propiedades del producto de números naturales

1. *CONMUTATIVA*

Si a y b son dos números naturales cualesquiera, siempre se verifica:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

es evidente esta propiedad, pues,

$$\text{card } (A \times B) = \text{card } (B \times A)$$

2. *ASOCIATIVA*

Sean a, b, c tres números naturales cualesquiera, se verifica:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

pues, card A × (B × C) = card (A × B) × C, comprobación fácil de realizar, que aconsejamos verifique el alumno.

3. *EXISTENCIA DE ELEMENTO NEUTRO*

Existe un único número, el uno, cuyo producto por un número natural cualquiera, *a*, es *a*, es decir:

$$a \cdot 1 = a$$

En efecto, si $A = \{a_1, a_2, ..., a_a\}$ y $B = \{b\}$

siendo card (A) = a y card (B) = 1 el producto:

$$A \times B = \{(a_1, b), (a_2, b), ..., (a_a, b)\}$$

pertenece a la misma clase que el conjunto A, esto es:

$$\text{card}\,(A \times B) = \text{card}\,(A)$$

4. *PROPIEDAD DISTRIBUTIVA DEL PRODUCTO RESPECTO DE LA SUMA DE NUMEROS NATURALES*

Como ya hemos dicho en otra ocasión, esta propiedad tiene la particularidad de ligar dos leyes de composición interna definidas sobre un mismo conjunto; en el caso de los números naturales podemos escribir:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

siendo *a, b* y *c* tres números naturales cualesquiera. Esta propiedad es evidente puesto que la expresión,

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

siempre es cierta, cualesquiera que sean los conjuntos A, B y C.

Un ejemplo ayudará a comprender esta propiedad: Partimos de la expresión:

$$2 \cdot (3 + 2) = (2 \cdot 3) + (2 \cdot 2)$$

sean $A = \{a, b\}$ $B = \{c, d, e\}$ y $C = \{f, g\}$

tenemos que comprobar:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

Averiguamos en primer lugar:

$$B \cup C = \{c, d, e, f, g\}$$

por tanto, el primer miembro de la igualdad anterior es:

$$A \times (B \cup C) = \{(a, c), (a, d), (a, e), (a, f), (a, g), (b, c), (b, d), (b, e), (b, f), (b, g)\}$$

Veamos el segundo miembro:

$$A \times B = \{(a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e)\}$$

$$A \times C = \{(a, f), (a, g), (b, f), (b, g)\}$$

resulta en definitiva:

$$(A \times B) \cup (A \times C) = \{(a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e), (a, f), (a, g), (b, f), (b, g)\}$$

luego, hemos comprobado que:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

por tanto,

$$2 \cdot (3 + 2) = (2 \cdot 3) + (2 \cdot 2)$$

3. ESTRUCTURA ALGEBRAICA DEL CONJUNTO DE LOS NUMEROS NATURALES

Hemos definido el conjunto N de los números naturales y dos leyes de composición interna, operaciones que hemos denominado *suma* y *producto* de números naturales.

La suma de números naturales es una auténtica ley de composición interna que goza de las siguientes propiedades:

- Es asociativa.
- Es conmutativa.
- Existe elemento neutro: 0.

por tanto, podemos decir que el conjunto N de los números naturales con la suma como ley de composición interna tiene estructura de semigrupo conmutativo con elemento neutro.

(N, +) es un semigrupo conmutativo con elemento neutro.

El producto de números naturales es una ley de composición interna definida sobre N que cumple las siguientes propiedades:

- Es asociativa.
- Es conmutativa.
- Existe elemento neutro: 1.

de acuerdo con lo que acabamos de ver, podemos afirmar que el conjunto N de los números naturales con el producto como ley de composición interna, tiene estructura de semigrupo conmutativo con elemento neutro.

(N, ×) es un semigrupo conmutativo con elemento neutro.

Además, hemos podido comprobar una propiedad que relaciona el producto y la suma de números naturales, podemos decir:

- El producto de números naturales es distributivo respecto a la suma.

Resumiendo: En el conjunto N de los números naturales se han definido dos operaciones, *suma* y *producto*, de forma que:

- (N, +) es un semigrupo conmutativo con elemento neutro.
- (N, ×) es un semigrupo conmutativo con elemento neutro.
- El producto es distributivo respecto a la suma.

Estas consideraciones nos permiten afirmar que N tiene estructura de semianillo conmutativo con elemento neutro.

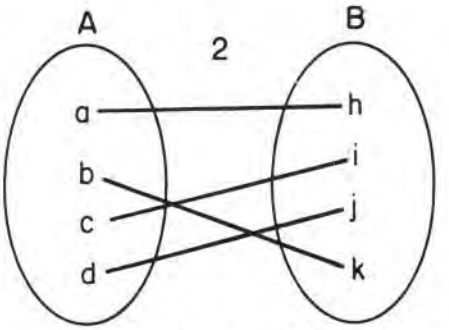
(N, +, ×) es un semianillo conmutativo con elemento neutro.

Ejercicios y ejemplos

1. Dado el conjunto A = {a, b, c, d}, encontrar otro conjunto B que sea equipotente con él.

   Para que sean equipotentes los conjuntos A y B, es necesario poder establecer una correspondencia biyectiva entre A y B.

   El conjunto B = {h, i, j, k}, por ejemplo, nos permite establecer este tipo de correspondencia:

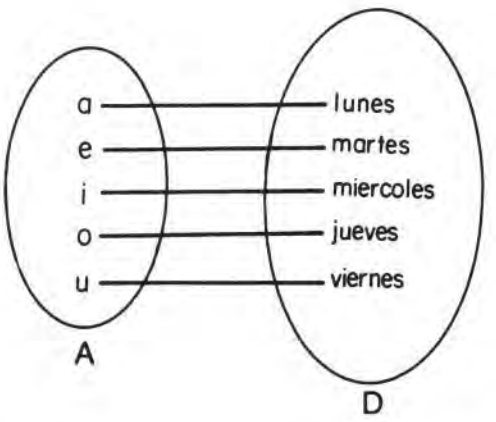


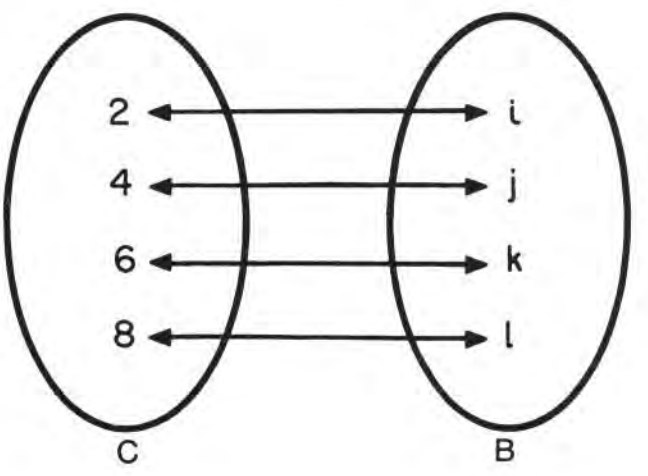
2. Dados los conjuntos A = {vocales}, B = {i, j, k, l}, C = {múltiplos de 2 mayores que 0 y menores que 10}, D = {días de la semana que terminan en s}. ¿Cuáles son equipotentes?

   Escribiendo los conjuntos por extensión:

   A = {a, e, i, o, u}
   B = {i, j, k, l}
   C = {2, 4, 6, 8}
   D = {Lunes, martes, miércoles, jueves, viernes}

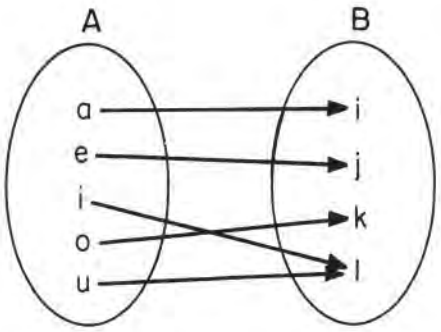
   Por medio de los siguientes esquemas, podemos averiguar cuándo podemos establecer una biyección:





Por tanto, A es equipotente con D y B es equipotente con C.

Por el contrario, A no es equipotente con B, puesto que no se puede establecer una biyección, como puede comprenderse con el siguiente diagrama:



3. En el conjunto de los números naturales se considera la operación diferencia. ¿Es una ley de composición interna?

Sabemos que una ley de composición interna es una aplicación de

$$N \times N \to N$$

Es decir, a cada par de números naturales tenemos que asociarle otro número natural, resultado de restar los dos primeros.

Consideremos algunos ejemplos:

(4, 2) le corresponderá $4 - 2 = 2$ que es un número natural
(2, 4) le corresponderá $2 - 4 = -2$ que no es un número natural.

En consecuencia, no hemos establecido una ley de composición interna en el conjunto de los números naturales.

4. Sobre el conjunto de los números naturales se define la siguiente operación: $a + b = 2a + 2b$. ¿Es una ley de composición interna? ¿Qué propiedades tiene?

Teniendo en cuenta lo visto en el ejercicio anterior tenemos que comprobar: $N \times N \to N$.

En este caso particular: $(a, b) \to 2a + 2b$, de manera que a cada pareja de números naturales le asociamos otro número natural, puesto que $2a + 2b$ es un número natural, como fácilmente se puede comprobar.

Sea una pareja determinada de números naturales 5 y 3:

$$(5, 3) \to 2 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = 10 + 6 = 16$$

o sea,

$$(5, 3) \to 16$$

repitiendo este proceso para cualquier par de números naturales siempre obtenemos otro número natural. Luego, es una ley de composición interna.

Estudiemos sus propiedades:

- *Asociativa*

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

Primer miembro: $b + c = 2b + 2c$

$a + (2b + 2c) = 2a + 2(2b + 2c) = 2a + 4b + 4c$

Segundo miembro: $a + b = 2a + 2b$

$(2a + 2b) + c = 2(2a + 2b) + 2c = 4a + 4b + 2c$

} No es asociativa

- *Conmutativa*

$a + b = b + a$

$a + b = 2a + 2b$
$b + a = 2b + 2a$ } como $2a + 2b = 2b + 2a$ es conmutativa

- *Elemento neutro*

Vamos a llamar al elemento neutro e. Tiene que verificarse:

$$a + e = a$$

$a + e = a$ por definición de elemento neutro, por tanto,

$$a + e = 2a + 2e = a$$
$$2e = a - 2a = -a$$
$$e = -\frac{a}{2}$$

Como $e = -\frac{a}{2}$ no es un número natural, no tiene elemento neutro.

4. ORDENACION EN EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS NATURALES

En el conjunto N de los números naturales definimos la siguiente relación binaria:

$$a \, R \, b \Leftrightarrow a = b + n$$

siendo *a*, *b* y *n*, números naturales.

Esta relación binaria es una relación de orden, que trataremos de comprobar a continuación, analizando para ello las propiedades características de este tipo de relaciones, es decir, las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva.

- *Reflexiva*

Siendo *a* un número natural cualquiera

$a \, R \, a$ pues $a = a + 0$ y el cero es un número natural.

- *Antisimétrica*

Se enuncia esta propiedad así:

$$\left.\begin{array}{l} a\,R\,b \\ b\,R\,a \end{array}\right\} \Rightarrow a = b$$

En efecto:

$$a\,R\,b \Rightarrow a = b + n$$
$$b\,R\,a \Rightarrow b = a + n'$$
$$a + b = b + a + n + n'$$

luego,

$$n' = n = 0$$

por tanto

$a = b$ como queríamos demostrar

- *Transitiva*

$$\text{Si} \quad \left.\begin{array}{l} a\,R\,b \\ b\,R\,c \end{array}\right\} \Rightarrow a\,R\,c$$

En efecto:

$$\left.\begin{array}{l} a\,R\,b \Rightarrow a = b + n \\ b\,R\,c \Rightarrow b = c + n' \end{array}\right\} \quad a = c + n + n'$$

como $n + n'$ es un número natural se verifica que a R c como queríamos demostrar.

Es, por tanto, una relación de orden, que habitualmente suele escribirse así:

$a \geqslant b$ que se lee «*a* mayor o igual a *b*»

Con esta relación de orden total, dados dos números naturales podemos compararlos, averiguando cuál es mayor, en definitiva, tenemos un criterio para ordenar los números naturales. En los ejemplos siguientes hemos escrito algunos números naturales ordenados de acuerdo con la relación antes enunciada:

$$3 \geqslant 1$$
$$7 \geqslant 4 \geqslant 2$$
$$6 \geqslant 5 \geqslant 4 \geqslant 3 \geqslant 2 \geqslant 1$$

5. SISTEMAS DE NUMERACION

Habitualmente se entiende por sistema de numeración a un conjunto de reglas y signos que nos permiten expresar una serie infinita de números mediante un conjunto finito de signos (*) (Ver Unidad Didáctica número 2, tema VIII).

(*) Recordamos que el conjunto N de los números naturales es un conjunto que tiene infinitos elementos: $N = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Sobradamente conocido es el sistema de numeración romano, que utiliza los siguientes signos: I, V, X, L, C, D, M. Estos signos se ven acompañados de una serie de reglas que no indicamos por considerar conocidas de todos. Así el número 1.977 utilizando este sistema de numeración se escribiría de la siguiente manera: MCMLXXVII.

Este sistema de numeración resulta engorroso comparado con los habitualmente utilizados, basados en el principio de valor relativo o valor posicional: *una misma cifra representa valores distintos según el lugar que ocupa.*

Las unidades simples y colectivas se clasifican en órdenes del siguiente modo: elegimos un número m, mayor que 1, que llamamos base. La unidad simple se denomina *unidad de primer orden.* El conjunto de m unidades de primer orden se denomina *unidad colectiva de segundo orden.* El conjunto de m unidades de segundo orden forma una *unidad de tercer orden,* y así sucesivamente. En general, *m* unidades de un orden cualquiera constituye otra unidad colectiva del orden inmediato superior.

Imaginamos que todos nuestros alumnos están familiarizados con el sistema de numeración decimal que emplea los signos siguientes: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Esto es, los diez primeros números naturales, números llamados dígitos con cierta frecuencia. Diremos de pasada, que en el sistema decimal, diez unidades constituyen una decena, diez decenas forman una centena, diez centenas hacen un millar y así sucesivamente. Más adelante, al estudiar diferentes sistemas de numeración insistiremos de nuevo en lo que acabamos de decir.

5.1. Teorema fundamental de la numeración

Todo número natural *m* se puede descomponer de modo único como suma de potencias de otro número natural *n*, mayor que 1, llamado base del sistema de numeración, de la forma siguiente:

$$m = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \ldots + a_k n^k$$

siendo $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k$ números naturales menores que *n*.

En efecto, para expresar el número natural *m* en la forma que acabamos de indicar (se suele llamar también forma polinómica de la base n) basta efecturar las divisiones siguientes:

$$\begin{array}{l|l} m & n \\ a_0 & q_1 \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} q_1 & n \\ a_1 & q_2 \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} q_2 & n \\ a_2 & q_3 \end{array} \qquad \ldots \qquad \begin{array}{l|l} q_{k-1} & n \\ a_{n-1} & q_k \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} q_k & n \\ a_n & 0 \end{array}$$

Recordando que en toda división, el dividendo es igual al divisor por el cociente más el resto, las divisones anteriores nos permiten escribir:

$$\begin{aligned} m &= n \cdot q_1 + a_0 \\ q_1 &= n \cdot q_2 + a_1 \\ q_2 &= n \cdot q_3 + a_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_{k-1} &= n \cdot q_k + a_{n-1} \\ q_k &= n \cdot 0 + a_n,\ q_k = a_n \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de q_1 obtenido en la segunda ecuación, en la primera, obtenemos:

$$m = n(n \cdot q_2 + a_1) + a_0 = a_0 + a_1 n + n^2 q_2$$

llevando ahora el valor de q_2 obtenido en la tercera ecuación a la expresión que acabamos de obtener, resulta:

$$m = a_0 + a_1 n + n^2(nq_3 + a_2) = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + n^3 q_3$$

repitiendo esta operación tantas veces como sea necesario, llegamos finalmente a:

$$m = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \ldots + a_k n^k$$

que es la expresión escrita, al enunciar el teorema fundamental de la numeración que acabamos de demostrar.

Así en el caso del número 1.243 escrito en el sistema decimal podemos escribir, teniendo presente que n = 10:

$$1.243 = 3 + 4 \cdot 10 + 2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^3$$

otros ejemplos nos ayudarán a comprender mejor este teorema:

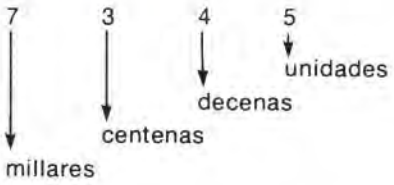
$$352 = 2 + 5 \cdot 10 + 3 \cdot 10^2$$
$$4.051 = 1 + 5 \cdot 10 + 0 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^3 = 1 + 5 \cdot 10 + 4 \cdot 10^3$$
$$10.789 = 9 + 8 \cdot 10 + 7 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^4 = 9 + 8 \cdot 10 + 7 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^4$$

5.2. Algunos sistemas de numeración no decimales

Hemos utilizado el sistema de numeración decimal, es decir, el sistema de numeración que su base es 10. Este sistema de numeración es perfectamente conocido por todos los alumnos, por ser el utilizado habitualmente.

El sistema de numeración decimal, repetimos, utiliza diez signos, que coinciden con los diez primeros números naturales o números dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Todos sabemos cómo «funciona» este sistema: cada grupo de diez unidades forman una decena, diez grupos de una decena constituyen una centena, diez grupos de una centena hacen un millar y así sucesivamente.

Al escribir un número, la primera cifra de la derecha representa a las unidades, la segunda las decenas, etc.



El planteamiento realizado para este sistema de numeración de base 10 es general para cualquier otro sistema. Vamos a estudiar el sistema de numeración de base 3.

Este sistema utiliza tres signos: 0, 1, 2. Cada grupo de tres unidades de primer orden será una unidad de segundo orden, cada tres grupos de unidades de segundo orden forman una unidad de tercer orden y así sucesivamente.

Al contar en base 3 obtenemos la siguiente sucesión de números:

1, 2, 10, 11, 12, 20, 21, 22, 100, ...

Con el siguiente ejemplo pretendemos aclarar el sistema de numeración de base 3. Tratamos de contar el siguiente conjunto:

X X X X X X
X X X X X X X

Podemos seguir este procedimiento:

- Los agrupamos de tres en tres:

X X X
X X X
X X X
X X X → Grupo unidades de segundo orden

X → Unidad de primer orden

- Agrupamos el grupo de las «decenas» de la misma manera:

X X X
X X X
X X X → Grupo unidad de tercer orden

X X X → Grupo unidad de segundo orden

X → Grupo unidad de primer orden

En consecuencia, tenemos una unidad, una decena y una centena (*), luego el número en base tres es $1\ 1\ 1_{(3}$.

5.3. Paso de un sistema de numeración a otro

Vamos a distinguir los siguientes casos:

i) *Pasar de base decimal a una base cualquiera.* De acuerdo con lo expuesto anteriormente, basta realizar una serie de divisiones sucesivas del número escrito en base decimal por la base nueva.

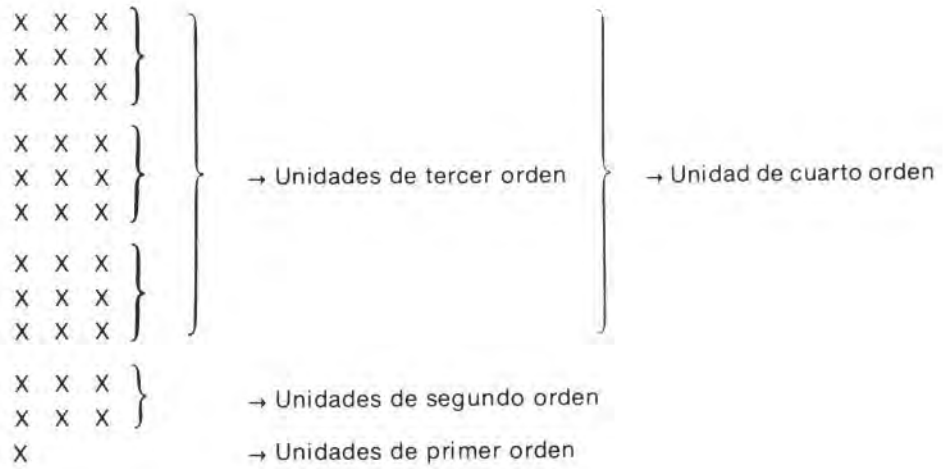
Así, si el número 34 escrito en base 10 lo queremos pasar a base 3, procedemos así:

34	3		
~~04~~	11	3	
1	*2*	*3*	3
		0	*1*

el nuevo número es $1021_{(3}$

(*) Por simplificar, llamamos: unidad a la unidad de primer orden, decena a la de segundo orden, y así sucesivamente.

Utilizando el esquema antes presentado:



$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}X\ X\ X\\ X\ X\ X\\ X\ X\ X\end{array}\right\}\\ \left.\begin{array}{l}X\ X\ X\\ X\ X\ X\\ X\ X\ X\end{array}\right\}\\ \left.\begin{array}{l}X\ X\ X\\ X\ X\ X\\ X\ X\ X\end{array}\right\}\end{array}\right\} \rightarrow \text{Unidades de tercer orden}\\ \left.\begin{array}{l}X\ X\ X\\ X\ X\ X\end{array}\right\} \rightarrow \text{Unidades de segundo orden}\\ X \rightarrow \text{Unidades de primer orden}\end{array}\right\} \rightarrow \text{Unidad de cuarto orden}$$

Hemos obtenido:

$$\left.\begin{array}{l}1 \text{ - Unidad de primer orden}\\ 2 \text{ - Unidades de segundo orden}\\ 0 \text{ - Unidades de tercer orden}\\ 1 \text{ - Unidad de cuarto orden}\end{array}\right\} \Rightarrow 1\,0\,2\,1_{(3}$$

ii) *Pasar de una base cualquiera a una base decimal.* Aplicando, de nuevo, el teorema fundamental de la numeración, podemos pasar de una base cualquiera a base 10.

Si $1\,0\,2\,1_{(3}$ lo queremos pasar a base decimal, basta escribir:

$$1\,0\,2\,1_{(3} = 1 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^3 = 1 + 6 + 27 = 34_{(10}$$

Otro ejemplo, el número 1237 escrito en base 8 queremos pasarlo a base decimal.

$$1\,2\,3\,7_{(8} = 1 \cdot 8^3 + 2 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8 + 7 = 512 + 128 + 24 + 7 = 671_{(10}$$

iii) *Pasar de una base cualquiera no decimal a otra base no decimal.* Consecuencia de lo visto en los apartados i y ii, el procedimiento más sencillo es pasar el número en cuestión a base 10 y luego aplicamos lo visto en el primer apartado.

Ejercicios y ejemplos

1. Escribir el número $2\,1\,1\,0_{(3}$ en base 10 y en base 6.

Para escribirlo en base decimal lo expresamos en forma polinómica:

$$2\,1\,1\,0_{(3} = 0 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 = 0 + 3 + 1 \cdot 9 + 2 \cdot 27 = 66$$

Dividiendo este resultado por 6 tantas veces como sea posible nos aparecerá escrito en base 6.

$$\begin{array}{l|l|l} 66 & 6 & \\ \hline 0 & 11 & 6 \\ \hline & 5 & 1 \end{array}$$

podemos escribir, en resumen: $2\,1\,1\,0_{(3} = 66 = 1\,5\,0_{(6}$

2. El número 2 1 3 está escrito en base decimal, escribirlo en base 5 y en base 7.

Por medio de divisiones sucesivas obtenemos:

$$\begin{array}{r|l} 213 & 5 \\ 13 & 42 \\ 3 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 42 & 5 \\ 8 & 8 \\ 3 & 1 \end{array}$$

$$2\,1\,3_{(10} = 1\,3\,2\,3_{(5}$$

$$\begin{array}{r|l} 213 & 7 \\ 03 & 30 \\ 2 & 4 \end{array}$$

$$2\,1\,3_{(10} = 4\,2\,3_{(7}$$

3. Sabemos que el número 1 a $3_{(4}$ en base decimal se escribe 27. Calcular el valor de *a*.

En primer lugar, 1 a $3_{(4}$ lo escribimos en base decimal:

$$1\ a\ 3_{(4} = 3 + a \cdot 4 + 1 \cdot 4^2 = 3 + 4a + 16 = 19 + 4a$$

según el enunciado, esta expresión ha de ser igual a 27:

$$19 + 4a = 27$$
$$4a = 27 - 19 = 8$$
$$a = \frac{8}{4} = 2$$

El número pedido es $123_{(4}$.

4. El número a $22_{(3}$ en base 7 se escribe 23. ¿Cuánto vale *a*?

Escribimos los dos números en base decimal:

$$a\ 22_{(3} = 2 + 3 \cdot 2 + a \cdot 3^2 = 2 + 6 + 9a = 9a + 8$$
$$23_{(7} = 3 + 2 \cdot 7 = 3 + 14 = 17$$

puesto que son iguales, podemos escribir:

$$9a + 8 = 17$$
$$9a = 9 \qquad \text{luego } a = 1$$

El número pedido es: $1\,2\,2_{(3}$

5.4. Operaciones en cualquier base

Lo mismo que sabemos sumar y multiplicar números expresados en base decimal, se puede utilizar una base no decimal. En estos casos conviene construir la correspondiente tabla de sumar o de multiplicar, por ejemplo, en base 3 tenemos:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

×	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

Imaginamos que todos los alumnos entienden cómo se han formado estas dos tablas de sumar y multiplicar en base 3, de todas maneras, puede ocurrir que a algunos les extrañe la aparición de los números $10_{(3}$ y $11_{(3}$ en la primera y el número $11_{(3}$ en la segunda. Veamos cómo se obtienen:

$1 + 2 = 3_{(10}$ pasando a base 3

$$\begin{array}{r|l} 3 & 3 \\ \hline 0 & 1 \end{array}$$

$3_{(10} = 10_{(3}$

$2 + 2 = 4_{(10}$ pasando a base 3

$$\begin{array}{r|l} 4 & 3 \\ \hline 1 & 1 \end{array}$$

$4_{(10} = 11_{(3}$

En el caso del producto:

$2 \cdot 2 = 4_{(10}$ pasando a base 3

$$\begin{array}{r|l} 4 & 3 \\ \hline 1 & 1 \end{array}$$

$4_{(10} = 11_{(3}$

A continuación vamos a realizar algunas operaciones con números expresados en base 3:

1. *Suma:* $2\,0\,2\,1_{(3} + 2\,2\,2\,1_{(3}$

«cifras que se llevan de la cifra anterior» →

$$\begin{array}{r} 1\ 1 \\ 2\ 0\ 2\ 1 \\ 2\ 2\ 2\ 1 \\ \hline 1\ 2\ 0\ 1\ 2_{(3} \end{array}$$

2. *Multiplicar:* $1\ 2\ 2_{(3} \cdot 2_{(3}$

$$\begin{array}{r} 1\ 2\ 2 \\ \times\ 2 \\ \hline 1\ 0\ 2\ 1_{(3} \end{array}$$

3. *Resta:* $2\ 1\ 2_{(3} - 1\ 2\ 1_{(3}$

$$\begin{array}{r} 2\ 1\ 2 \\ -\ 1\ 2\ 1 \\ \hline 0\ 2\ 1_{(3} \end{array}$$

4. *Cociente:* $1\ 2\ 2_{(3} : 2_{(3}$

$$\begin{array}{r|l} 1\ 2\ 2 & 2 \\ \hline -\ 11 & 22 \\ \hline 1\ 2 & \\ 1\ 1 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

CONCLUSIONES TEMA IX

<table>
<tr><td>COORDINABILIDAD ENTRE CONJUNTOS</td><td colspan="3">Dos conjuntos son coordinables cuando entre ellos se puede establecer una aplicación biyectiva o correspondencia biunívoca.

La coordinabilidad de conjuntos es una relación de equivalencia, cada clase de equivalencia está formada por todos los conjuntos que tienen el mismo número de elementos.</td></tr>
<tr><td>CARDINAL DE UN CONJUNTO</td><td colspan="3">Cardinal de un conjunto es el número de elementos que tiene ese conjunto.

Dos conjuntos son coordinables cuando tienen el mismo cardinal.</td></tr>
<tr><td>NUMERO NATURAL</td><td colspan="3">Los números naturales son las clases de equivalencia producidas por la coordinabilidad entre conjuntos.</td></tr>
<tr><td>CONJUNTO DE LOS NUMEROS NATURALES</td><td colspan="3">El conjunto de los números naturales es el formado por todas las clases de equivalencia producidas por la relación de coordinabilidad entre conjuntos, o sea, el conjunto cociente.
$N = \{0, 1, 2, 3, ...\}$</td></tr>
<tr><td>OPERACIONES CON LOS NUMEROS NATURALES</td><td>SUMA</td><td>DEFINICION</td><td>a y b son números naturales, A y B dos conjuntos tales que
card (A) = a
card (B) = b
$A \cap B = \phi$
S = card (A + B)
S es la suma de los números naturales a y b.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="3">OPERACIONES CON LOS NUMEROS NATURALES</td><td>SUMA</td><td>PROPIEDADES</td><td>Conmutativa:
$a + b = b + a$
Asociativa:
$(a + b) + c = a + (b + c)$
Elemento neutro: 0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">PRODUCTO</td><td>DEFINICION</td><td>a y b son números naturales; A y B dos conjuntos cualesquiera.
card (A) = a
card (B) = b. Se llama producto de a por b a card (A × B)</td></tr>
<tr><td>PROPIEDADES</td><td>Conmutativa:
$a \cdot b = b \cdot a$
Asociativa:
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Elemento neutro: 1
El producto de números naturales es distributivo respecto a la suma.</td></tr>
<tr><td>ESTRUCTURA ALBEGRAICA DEL CONJUNTO DE LOS NUMEROS NATURALES</td><td colspan="3">(N, +) es un semigrupo conmutativo con elemento neutro.
(N, ×) es un semigrupo conmutativo con elemento neutro.
(N, +, ×) es un semianillo conmutativo con elemento neutro.</td></tr>
<tr><td>ORDENACION EN N</td><td colspan="3">Si a, b son números naturales
$a \mathrel{R} b \Leftrightarrow a = b + n$
R es una relación de orden total.</td></tr>
<tr><td>SISTEMAS DE NUMERACION</td><td colspan="3">Es un conjunto de reglas y signos que nos permiten expresar una serie infinita de números mediante un conjunto finito de signos.</td></tr>
<tr><td>TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA NUMERACION</td><td colspan="3">Todo número natural, m, se puede descomponer de modo único como suma de potencias de otro número natural n, mayor que 1, llamado base del sistema de numeración, de la forma siguiente:
$m = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \ldots + a_k n^k$
siendo $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k$ números naturales menores que n.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">CAMBIOS DE BASE</td><td>De base decimal a una cualquiera</td><td colspan="2">Se realizan divisiones sucesivas del número escrito en base decimal por la base nueva.</td></tr>
<tr><td>De base cualquiera a base decimal.</td><td colspan="2">Aplicando el teorema fundamental de la numeración.</td></tr>
<tr><td>De una base cualquiera a otra base cualquiera.</td><td colspan="2">Se pasa a base 10 y después se pasa a la base deseada.</td></tr>
</table>

EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. Dados los conjuntos A = {a, b, c, d}; B = {e, f, g} ; C = {m, n} ; D = {h, i, j} ; E = {o, p, q, r}. ¿Cuáles son equipotentes?

2. Dado el conjunto A = {p, q, r, s, t}, escribir un conjunto B que sea equipotente con él y otro C que no lo sea.

3. ¿Qué condición se necesita para que dos conjuntos sean equipotentes?

4. De los siguientes conjuntos, decir cuáles pertenecen a la misma clase y qué número natural definen:

$$A = \{a, b\} \; ; \quad B = \{c, d, e\} \; ; \quad C = \{h, i\} \; ;$$
$$D = \{i, j, k, l\} \; ; \quad E = \{f, g, h\} \; ; \quad F = \{m, n, p, q\}$$

5. Dados los números naturales 1, 2, 3 escribir tres conjuntos que pertenezcan a las clases que definen dichos números.

6. Dados los siguientes números

$$0, 1, -1, 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3},$$

averiguar razonadamente cuáles son números naturales.

7. Sumar aplicando la definición vista en el tema, los siguientes números naturales: 2 + 3; 1 + 4; 0 + 2.

8. Comprobar, con un ejemplo, que la suma de números naturales goza de la propiedad asociativa.

9. El conjunto de los números naturales con la suma como ley de composición interna, ¿es un grupo? Razonar la contestación.

10. Aplicando la definición de producto de números naturales, efectuar: 2×3; 1×4.

11. Comprobar, con un ejemplo, que el producto de números naturales es conmutativo.

12. El conjunto de los números naturales con el producto como ley de composición interna ¿es un grupo? Razonar la contestación.

13. Ordenar de menor a mayor los siguientes números naturales: 3, 0, 1, 2, 7, 4.

14. Dados los siguientes números en las bases que se indican, pasarlos a la base decimal:

$$101_{(2} \quad ; \quad 1132_{(4} \quad ; \quad 10134_{(5}$$

15. Dado el número 1 0 2 en base decimal escribirlo en las bases 2, 4 y 5.

16. Dado el número $213_{(4}$ pasarlo a la base 5.

17. Escribir las tablas de sumar y multiplicar en la base 4.

18. Igualmente en la base 5.

19. Efectuar las operaciones en las bases indicadas.

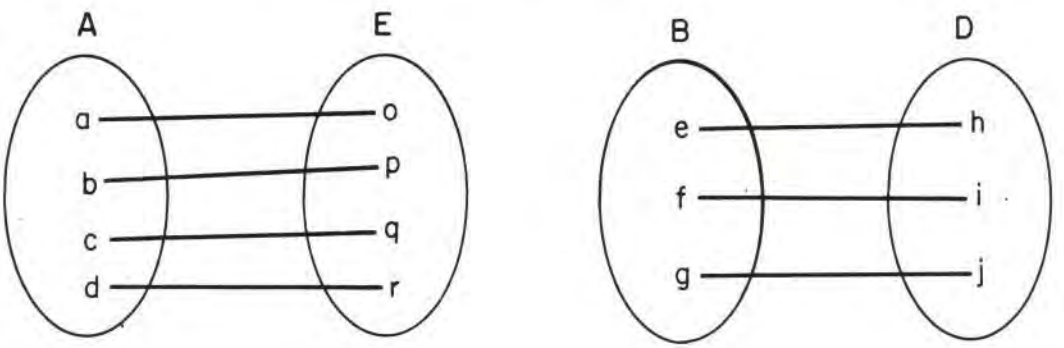
$$\begin{array}{r} 2\,3\,4 \\ +\ 1\,2\,3_{(5} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\,0\,3\,2 \\ +\ 2\,1\,3\,3_{(4} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\,3\,2 \\ -\ 1\,3\,3_{(4} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\,1\,3\,2 \\ -\ 1\,0\,4\,3_{(5} \\ \hline \end{array}$$

20. Efectuar las operaciones en las bases indicadas:

$$\begin{array}{r} 2\,3\,3 \\ \times\ 2_{(4} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\,2\,3 \\ \times\ 3_{(5} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2\,3\,3 : 3 \quad \text{base } 4 \\ 1\,2\,3\,4 : 2 \quad \text{base } 5 \end{array}$$

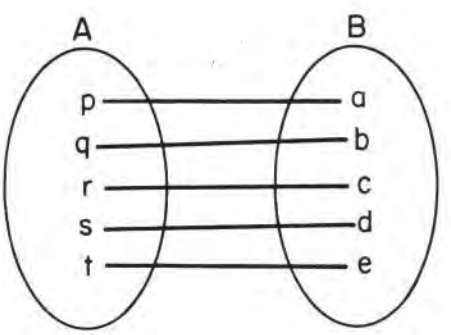
SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. Para que sean equipotentes es necesario poder establecer una aplicación biyectiva, por tanto:

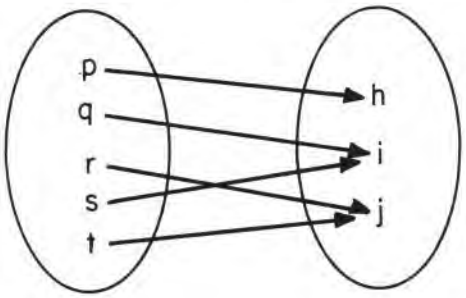


C no es equipotente con ninguno.

2. B = {a, b, c, d, e} ya que podemos establecer una aplicación biyectiva:



C = {h, i, j} ya que no existe ninguna aplicación biyectiva



3. Para que dos conjuntos sean equipotentes es necesario que se pueda establecer una aplicación biyectiva y para ello se necesita que los dos conjuntos tengan el mismo número de elementos.

4. Para que pertenezcan a la misma clase han de ser equipotentes y, según el ejercicio anterior, para que ésto ocurra han de tener el mismo número de elementos, por tanto:

$$A \sim C \quad \text{card}(A) = \text{card}(C) = 2$$
$$B \sim E \quad \text{card}(B) = \text{card}(E) = 3$$
$$D \sim F \quad \text{card}(D) = \text{card}(F) = 4$$

5. Escribiremos tres conjuntos cuyo cardinal sea 1, A = {e} B = {f} C = {h}.
D = {a, b} E = {c, d} F = {e, g}, conjuntos con cardinal 2.
Lo mismo G = {h, i, j} H = {m, n, q} I = {r, s, t}, conjuntos con cardinal 3.

6. Los números naturales son el 0, 1, 2, ya que los conjuntos ϕ, {a}, {b, c} tienen respectivamente por cardinal 0, 1 y 2.

Los números $-1, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}$ no son naturales, ya que no existen conjuntos cuyos cardinales sean los números dados.

7.

$2 \to A = \{a, b\}$
$3 \to B = \{c, d, e\}$
$A \cap B = \phi$
$A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$ y su cardinal es $5 = 2 + 3$

$1 \to A = \{a\}$
$4 \to B = \{c, d, e, f\}$
$A \cap B = \phi$
$A \cup B = \{a, c, d, e, f\}$ y su cardinal es $5 = 1 + 4$

$0 \to A = \phi$
$2 \to B = \{a, b\}$
$A \cap B = \phi$
$A \cup B = \{a, b\}$ y su cardinal es $2 = 0 + 2$

8. Vamos a comprobar que $2 + (3 + 4) = (2 + 3) + 4$
Para ello tomamos un representante del número 2, otro del 3 y otro del 4, sean éstos:

$$A = \{a, b\} \quad B = \{c, d, e\} \quad C = \{f, g, h, i\}$$

$$2 + (3 + 4) \quad \begin{matrix}\{a, b\}\\ \cup\\ \{c, d, e\}\\ \cup\\ \{f, g, h, i\}\end{matrix} \Rightarrow \left\{\begin{matrix}\{a, b\}\\ \cup\\ c, d, e\\ \\ f, g, h, i\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix}a, b\\ \\ c, d, e\\ \\ f, g, h, i\end{matrix}\right\} \quad \text{su cardinal 9}$$

luego: $2 + (3 + 4) = 9$

$$(2 + 3) + 4 \quad \begin{matrix}\{a, b\}\\ \cup\\ \{c, d, e\}\\ \cup\\ \{f, g, h, i\}\end{matrix} \Rightarrow \left\{\begin{matrix}a, b\\ \\ c, d, e\end{matrix}\right\} \cup \{f, g, h, i\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix}a, b\\ \\ c, d, e\\ \\ f, g, h, i\end{matrix}\right\} \quad \text{su cardinal 9}$$

por tanto: $2 + (3 + 4) = (2 + 3) + 4$

9. La propiedad que le falta es que cada elemento no tiene elemento simétrico. Efectivamente, si tomamos un conjunto A = {a, b} no existe ningún conjunto A' cuya unión con A nos dé el conjunto vacio, por tanto, no es un grupo.

10.

$$\left.\begin{matrix}2 \to A = \{a, b\}\\ 3 \to B = \{c, d, e\}\end{matrix}\right\} A \times B = \left\{\begin{matrix}(a, c), (a, d), (a, e),\\ \\ (b, c), (b, d), (b, e)\end{matrix}\right\} \quad \text{su cardinal es } 6 = 2 \times 3$$

$$\left.\begin{matrix}1 \to A = \{a\}\\ 4 \to B = \{b, c, d, e\}\end{matrix}\right\} A \times B = \{(a, b), (a, c), (a, d), (a, e)\} \quad \text{su cardinal es } 4 = 1 \times 4$$

11. Veamos que $2 \times 3 = 3 \times 2$:

$$\left.\begin{matrix}2 \to A = \{a, b\}\\ 3 \to B = \{c, d, e\}\end{matrix}\right\} A \times B = \left\{\begin{matrix}(a, c), (a, d), (a, e)\\ \\ (b, c), (b, d), (b, e)\end{matrix}\right\} \quad \text{su cardinal es } 6 = 2 \times 3$$

$$\left.\begin{matrix}3 \to B = \{c, d, e\}\\ 2 \to A = \{a, b\}\end{matrix}\right\} B \times A = \left\{\begin{matrix}(c, a), (c, b)\\ (d, a), (d, b)\\ (e, a), (e, b)\end{matrix}\right\} \quad \text{su cardinal es } 6 = 3 \times 2$$

luego: $2 \times 3 = 3 \times 2$

12. La propiedad que le falta es que cada elemento no tiene su simétrico. Efectivamente, tomamos un conjunto A = {a, b}; no existe ningún conjunto A' tal que el cardinal de A × A' sea uno, elemento neutro del producto, luego, no es un grupo.

13. La relación que hemos estudiado de orden era:

$a \geqslant b$ si $a = b + n$ siendo *n* un número natural, por tanto:

$7 \geqslant 4$ ya que $7 = 4 + 3$
$4 \geqslant 3$ ya que $4 = 3 + 1$
$3 \geqslant 2$ ya que $3 = 2 + 1$
$2 \geqslant 1$ ya que $2 = 1 + 1$
$1 \geqslant 0$ ya que $1 = 0 + 1$

luego: $0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 7$

14. Aplicamos el teorema fundamental de la numeración, obtenemos:

$1\ 0\ 1_{(2} = 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2^2 = 1 + 0 + 4 = 5_{(10}$

$1\ 1\ 3\ 2_{(4} = 2 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^3 = 2 + 12 + 16 + 64 = 94_{(10}$

$1\ 0\ 1\ 3\ 4_{(5} = 4 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^3 + 1 \cdot 5^4 = 4 + 15 + 25 + 625 = 669_{(10}$

15.

1	0	2	2				
0	2	51	2				
0	11	25	2				
1	05	12	2				
1	0	6	2				
0	3	2					
1	1						

$1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0_{(2}$

1	0	2	4		
2	2	25	4		
2	1	6	4		
2	1				

$1\ 2\ 1\ 2_{(4}$

1	0	2	5		
0	2	20	5		
0	4				

$4\ 0\ 2_{(5}$

16. Pasamos primero a la base 10

$2\ 1\ 3_{(4} = 3 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 4^2 = 3 + 4 + 32 = 39_{(10}$

y ahora el $39_{(10}$ lo pasamos a base 5

39	5			
4	7	5		
2	1			

$1\ 2\ 4_{(5}$

por tanto, $2\ 1\ 3_{(4} = 1\ 2\ 4_{(5}$

17. Base 4

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	10
2	2	3	10	11
3	3	10	11	12

×	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	10	12
3	0	3	12	21

18. Base 5

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

19.

$$\begin{array}{r} 1\ 1 \\ 2\ 3\ 4 \\ +\ 1\ 2\ 3_{(5)} \\ \hline 4\ 1\ 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\ 1 \\ 1\ 0\ 3\ 2 \\ +\ 2\ 1\ 3\ 3_{(4)} \\ \hline 3\ 2\ 3\ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\ 3\ 2 \\ -\ 1\ 3\ 3_{(4)} \\ \hline 0\ 3\ 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\ 1\ 3\ 2 \\ -\ 1\ 0\ 4\ 3_{(5)} \\ \hline 1\ 0\ 3\ 4 \end{array}$$

20.

$$\begin{array}{r} 2\ 3\ 3 \\ \times\ 2_{(4)} \\ \hline 1\ 1\ 3\ 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\ 2\ 3 \\ \times\ 3_{(5)} \\ \hline 4\ 2\ 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2\ 3\ 3 & 3 \\ 2\ 1 & 33 \\ \hline 0\ 2\ 3 & \\ \quad 2\ 1 & \\ \hline \quad 2 & \end{array} \qquad \text{base 4}$$

$$\begin{array}{r|l} 1\ 2\ 3\ 4 & 2 \\ 1\ 1 & 342 \\ \hline \quad 1\ 3 & \\ \quad 1\ 3 & \\ \hline \quad\ 0\ 4 & \\ \quad\quad 4 & \\ \hline \quad\quad 0 & \end{array} \qquad \text{base 5}$$

TEMA X

EL NUMERO ENTERO

ESQUEMA/RESUMEN

1. Necesidad de ampliar los números naturales.

2. Construcción del conjunto de los números enteros.

   2.1. Pares ordenados de números naturales.
   2.2. Relación de equivalencia definida sobre N × N.
   2.3. El número entero.
   2.4. Representantes canónicos de los números enteros.

3. Operaciones con los números enteros.

   3.1. Suma de números enteros.
   3.2. Propiedades de la suma de números enteros.
   3.3. Producto de números enteros.
   3.4. Propiedades del producto de números enteros.

4. Estructura del conjunto de los números enteros.

5. Isomorfismo entre N y Z.

6. Ordenación en el conjunto de los números enteros.

INSTRUCCIONES PARA EL ESTUDIO DEL TEMA

El conjunto de los números naturales que acabamos de estudiar presenta algunas limitaciones para realizar ciertas operaciones, concretamente al restar dos números naturales no siempre obtenemos otro número natural. De este hecho partimos en el presente tema; en primer lugar, justificamos la necesidad de utilizar otra clase de números que llamaremos *números enteros.*

Aconsejamos prestar mucha atención a este planteamiento para entender perfectamente la construcción del conjunto de los números enteros, construcción que hemos procurado realizar con mucho detalle, pensando en la importancia que tiene entender el concepto de número entero, por ser un concepto importante en sí mismo y porque el comprenderlo supone relacionar buena parte de lo visto en la primera Unidad Didáctica.

El conjunto de los números enteros resulta de establecer una relación de equivalencia en el conjunto $N \times N$. Así, es evidente que el conjunto de los números enteros es un conjunto cociente, cada una de las clases de equivalencia del mismo engendra un número entero.

Una vez definido el conjunto de los números enteros, tratamos de operar con ellos, definiendo dos leyes de composición interna o dos operaciones: la suma y el producto de números enteros.

Estudiando las propiedades que verifican estas dos operaciones, podemos asignar al conjunto de los números enteros una estructura algebraica de acuerdo con lo estudiado en la Unidad Didáctica 1. El alumno debe notar que aparece una estructura nueva referida a este conjunto de los números enteros, cuando se tiene en cuenta la suma y el producto. Nos referimos a la estructura de anillo, aunque no profundizamos en la misma; conviene tener presente que es definida a partir de los conocimientos explicados con anterioridad sobre estructuras algebraicas.

Terminamos este tema, dando una idea muy breve e incompleta de lo que supone la ordenación de números enteros.

1. NECESIDAD DE AMPLIAR LOS NUMEROS NATURALES

En el tema anterior hemos definido el conjunto de los números naturales que designamos por N, es decir,

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$

al mismo tiempo hemos aprendido a operar con los números naturales. A modo indicativo nos permitimos recordar algunas de las operaciones realizadas entonces:

Suma: Dados dos o más números naturales cualesquiera podemos obtener otro número natural siempre.

Ejemplos:

$$2 + 3 = 5$$

$$2 + 4 + 3 = 9$$

Multiplicación: Dados dos o más números naturales siempre se puede averiguar el producto de ellos, que además es un número natural.

Ejemplos:

$$2 \cdot 3 = 6$$

$$2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

Resta: Esta operación no siempre se puede realizar. Esto es, puede ocurrir que al restar dos números naturales no obtengamos otro número natural. Dos ejemplos nos ayudarán a comprender este planteamiento:

Ejemplo 1.º Supongamos que el minuendo es mayor que el sustraendo (*):

$$3 - 2 = 1 \qquad 6 - 4 = 2$$

en este caso, la operación de resta es válida, en el sentido de que al restar dos números naturales obtenemos otro número natural. Recordemos que las operaciones que estamos viendo, son leyes de composición interna, definidas en la Unidad Didáctica 1. Para el caso que estamos tratando se puede decir: una ley de composición interna es un criterio por medio del cual a dos números cualesquiera de un conjunto les asociamos otro número que pertenece a este conjunto.

Ejemplo 2.º Ahora, el minuendo es menor que el sustraendo:

$$3 - 5 = \qquad 7 - 13 =$$

en este caso la resta no se puede efectuar, puesto que el resultado no es un número natural. De una manera más sencilla, al restar dos números naturales no obtenemos otro número natural si el segundo es mayor que el primero.

No creemos suponga adelantar conocimientos, completar las dos operaciones anteriores:

$$3 - 5 = -2 \qquad 7 - 13 = -6$$

es evidente que el resultado de estas dos operaciones son dos *números negativos:* -2 y -6. *Los números negativos* no son números naturales.

En esta exposición hemos intentado poner de manifiesto que con los números naturales existe, por lo menos, una operación que no se puede realizar. En consecuencia, hay dos caminos a seguir: uno, limitarnos y no realizar las operaciones cuyo resultado no sea un número natural; y otro, ampliar el conjunto de los números naturales para poder realizar operaciones como las presentadas más arriba. Por este último camino nos decidimos.

A modo de conclusión, recopilamos todo lo dicho en este apartado de la siguiente forma:

Supongamos la expresión $x + b = a$, donde *a* y *b* son números naturales, $a, b \in N$, pretendemos calcular el valor de x que satisfaga la igualdad anterior, fácilmente se deduce que

$$x = a - b$$

Se pueden distinguir dos casos:

a) Si $a \geqslant b$ resulta que $x = a - b$ es un número natural.

x puede expresarse por la diferencia $a - b$ o simplemente por la pareja (a, b)

Inmediatamente se deduce la existencia de muchas parejas que pueden representar al número *x*: todas aquellas parejas (a', b') que satisfagan la condición:

$$a - b = a' - b'$$

(*) Recordamos que en una resta o diferencia de dos números, cualesquiera que sean sus clases se tiene: minuendo – sustraendo = resta o diferencia.

o lo que es lo mismo

$$a + b' = a' + b$$

Asi, por ejemplo, las expresiones $x + 2 = 7$ y $x + 5 = 10$ tienen el mismo valor de x:

$$x = 7 - 2 \qquad x = 10 - 5$$

el valor de x está dado, respectivamente, por las parejas (7, 2) y (10, 5), asociando ambas al mismo número natural. Además se verifica:

$$7 - 2 = 10 - 5 \text{ ó } 7 + 5 = 10 + 2$$

b) Si $a < b$, $x = a - b$, no tiene sentido dentro del campo de los números naturales. En este sentido diremos que la expresión de partida, $x + b = a$, no tiene solución.

De la consideración de este segundo caso nace la necesidad de crear unos números que permitan dar solución a la ecuación $x + b = a$ siempre.

2. CONSTRUCCION DEL CONJUNTO DE LOS NUMEROS ENTEROS

Vamos a construir, a partir del conjunto de los números naturales, un nuevo conjunto que llamaremos conjunto de los números enteros. Para ello, construimos un conjunto formado por pares ordenados de números naturales. Sobre este conjunto, definimos una relación de equivalencia que nos permite considerar un conjunto cociente que, como veremos, coincide con el conjunto de los números enteros. Los elementos de este conjunto son clases de equivalencia, cada una de estas clases de equivalencia representa un número entero.

2.1. Pares ordenados de números naturales

En el apartado 1 de este mismo tema hemos apuntado la posibilidad de que pares o parejas de números naturales representasen, perfectamente, el resultado de una resta de números naturales, en cualquiera de los dos casos considerados.

¿Cómo pueden expresarse matemáticamente los pares o parejas de números naturales? Recordando la definición del conjunto producto de otros dos, podemos afirmar que las parejas de números naturales son elementos del conjunto $N \times N$, donde, como es obvio, N es el conjunto de los números naturales.

Por ejemplo, las parejas o pares ordenados:

$$(2, 1) \quad (1, 3) \quad (0, 1) \quad (0, 0) \quad (1, 1) \quad \ldots$$

son elementos del conjunto $N \times N$. Los elementos de cada una de estas parejas son números naturales y forman parte de dicha pareja en un orden determinado.

2.2. Relación de equivalencia definida sobre $N \times N$

En el conjunto $N \times N$ definimos la siguiente relación binaria que, como posteriormente comprobaremos, es una relación de equivalencia:

«Si $(a, b) \in N \times N \quad (a', b') \in N \times N \quad (a, b) = (a', b') \Longleftrightarrow a + b' = a' + b$»

Según esta relación binaria, las parejas (2, 3) y (4, 5) pertenecientes a N × N están relacionadas, puesto que: $2 + 5 = 3 + 4$.

En cambio, las parejas (5, 2) y (7, 6) que también pertenecen a N × N, no están relacionadas porque: $5 + 6 \neq 2 + 7$.

Vamos a demostrar que la relación binaria que acabamos de definir es una relación de equivalencia, comprobando que verifica las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

- *Reflexiva.* $(a, b) = (a, b)$

  En efecto: $a + b = b + a$

- *Simétrica.* Si $(a, b) = (a', b') \Longrightarrow (a', b') = (a, b)$.

  Puesto que si es $(a, b) = (a', b')$ quiere decir que $a + b' = b + a'$ de lo que deducimos $a' + b = b' + a$, luego $(a', b') = (a, b)$ como queríamos demostrar.

- *Transitiva.*

$$\text{si} \left.\begin{array}{l} (a, b) = (a', b') \\ (a', b') = (a'', b'') \end{array}\right\} \Longrightarrow (a, b) = (a'', b'')$$

  puesto que, si

$$(a, b) = (a', b') \text{ esto implica } a + b' = b + a'$$
$$(a', b') = (a'', b'') \text{ esto implica } a' + b'' = b' + a''$$

  sumando miembro a miembro estas dos últimas igualdades:

$$a + b' + a' + b'' = b + a' + b' + a''$$

  simplificando:

$$a + b'' = b + a''$$

  luego, $(a, b) = (a'', b'')$ como queríamos demostrar.

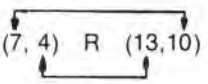
Ejercicios y ejemplos

1. Sobre el conjunto N × N hemos definido una relación de equivalencia que podemos expresar de manera distinta.

   «Si $(a, b) \in N \times N$ y $(c, d) \in N \times N$
   $(a, b)\ R\ (c, d)$ si $a + d = b + c$

Esquemáticamente:

dos parejas están relacionadas cuando la suma de los extremos de la doble flecha coinciden. Por ejemplo, las parejas (7, 4) y (13, 10) están relacionadas:



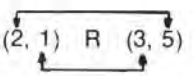
en efecto: $7 + 10 = 13 + 4$

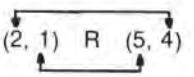
El alumno comprenderá que se trata de la misma definición, acompañada de un pequeño esquema para recordarla más fácilmente.

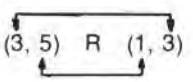
2. De los siguientes pares ordenados de $N \times N$, ¿cuáles están relacionados?

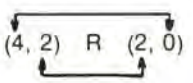
$$(2, 1), (3, 5), (4, 2), (5, 4), (1, 3), (2, 0)$$

Utilizando el esquema anterior:

 no están relacionados: $2 + 5 \neq 1 + 3$

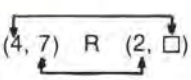
 sí están relacionados: $2 + 4 = 1 + 5$

 sí están relacionados: $3 + 3 = 5 + 1$

 si están relacionados: $4 + 0 = 2 + 2$

3. Dada la pareja de números naturales (4, 7) obtener otro par que esté relacionado con ella.

Hay varias formas de resolver este ejercicio, tal vez la más sencilla sea tomar la nueva pareja con un primer elemento condicionado por nosotros. Sea este primer elemento el número natural 2. Según lo visto, podemos escribir:

 $7 + 2 = 9$, luego $4 + \square = 9$

el segundo elemento de la pareja buscada es, por tanto, el número natural 5.

$$(4, 7) \quad R \quad (2, 5)$$

4. De las siguientes parejas: (3, 4) (5, 6) (7, 8) (2, 3) (4, 3) (0, 1). ¿Cuál es la que no está relacionada con las demás?

Con el procedimiento esquemático de siempre:

$(3, 4)\ R\ (5, 6)$ sí están relacionadas: $3 + 6 = 4 + 5$

$(5, 6)\ R\ (7, 8)$ sí están relacionadas: $5 + 8 = 6 + 7$

$(7, 8)\ R\ (2, 3)$ sí están relacionadas: $7 + 3 = 8 + 2$

$(2, 3)\ R\ (4, 3)$ no están relacionadas: $2 + 3 \neq 3 + 4$

$(2, 3)\ R\ (0, 1)$ sí están relacionadas: $2 + 1 = 3 + 0$

La pareja (4, 3)

5. Sustituir los «cuadros» por los números naturales correspondientes para que se verifiquen las relaciones siguientes:

$(2, 3)\ R\ (1, \square)$ $(4, 1)\ R\ (5, \square)$ $(3, \square)\ R\ (4, 0)$

$(2, 3)\ R\ (1, \square)$ $3 + 1 = 4$ $2 + \square = 4$. La segunda pareja será (1, 2)

$(4, 1)\ R\ (5, \square)$ $1 + 5 = 6$ $4 + \square = 6$. La segunda pareja será (5, 2)

$(3, \square)\ R\ (4, 0)$ $3 + 0 = 3$ $\square + 4 = 3$. No hay ningún número natural que sumado con 4 nos de 3, ésto indica, por tanto, que estas parejas nunca están relacionadas.

2.3. El número entero

Acabamos de ver que sobre el conjunto $N \times N$, siendo N el conjunto de los números naturales, hemos definido una relación binaria R de la siguiente manera:

$$\text{«Si } (a, b) \in N \times N \text{ y } (a', b') \in N \times N \quad (a, b) = (a', b') \iff a + b' = a' + b\text{»}$$

también hemos demostrado que esta relación R es una relación de equivalencia. Por tanto, podemos considerar el conjunto cociente definido por la relación R en el conjunto $N \times N$, conjunto cociente que representaremos por

$$\frac{N \times N}{R}$$

a este conjunto lo llamaremos conjunto de los números enteros y lo representaremos por Z.

$$Z = \frac{N \times N}{R}$$

¿Cuáles son los elementos del conjunto Z? Al ser Z un conjunto cociente, sus elementos son las clases de equivalencia en que queda dividido el conjunto $N \times N$, según la relación de equivalencia R antes definida. A cada una de estas clases de equivalencia la llamaremos *número entero*.

En consecuencia, el número entero viene definido por uno cualquiera de los representantes de su clase, o sea, por un par de números naturales dados en un orden determinado.

Así las siguientes parejas

(1,0) (2,1) (3,2) (4,3) (5,4) (6,5) (7,6) (8,7) . . .
(2,0) (3,1) (4,2) (5,3) (6,4) (7,5) (8,6) (9,7) . . .
(3,0) (4,1) (5,2) (6,3) (7,4) (8,5) (9,6) (10,7) . . .
. . . . . .
(0,1) (1,2) (2,3) (3,4) (4,5) (5,6) (6,7) (7,8) . . .
(0,2) (1,3) (2,4) (3,5) (4,6) (5,7) (6,8) (7,9) . . .
(0,3) (1,4) (2,5) (3,6) (4,7) (5,8) (6,9) (7,10) . . .
. . . . . .
(0,0) (1,1) (2,2) (3,3) (4,4) (5,5) (6,6) (7,7) . . .
. . . . . .

representan números, todas las parejas o pares ordenados de números naturales, que figuran en la misma linea son equivalentes entre si, representan a idéntico número entero. Hemos representado, sucesivamente, a los números enteros siguientes: 1, 2, 3, − 1, − 2, − 3, 0. Es evidente, que el número de parejas posibles para representar a un mismo número entero es infinito, circunstancia que hemos tratado de reflejar con los puntos suspensivos, al final de cada linea.

Parece claro la forma de averiguar el número entero que representa cada clase de equivalencia, basta restar de la primera componente del par ordenado la segunda (minuendo menos sustraendo, como decíamos al principio del tema).

Esta diferencia puede resultar cero, un número positivo o un número negativo y, por tanto, el cero, los números positivos y los números negativos constituyen el conjunto Z de los números enteros.

Lo podemos resumir de la siguiente manera:

Sea (a, b) un número entero cualquiera

Si $a > b \Rightarrow$ (a, b) es un número positivo.
Si $a = b \Rightarrow$ (a, b) es el número cero.
Si $a < b \Rightarrow$ (a, b) es un número negativo.

2.4. Representantes canónicos de los números enteros

Parece normal, cuando se trata de representar a los números enteros por pares ordenados de números naturales, utilizar los representantes más sencillos. Normalmente se entiende por representante sencillo aquel que tiene alguna componente nula; a estos representantes se les suele llamar *formas canónicas, elementos canónicos* o *representantes canónicos.* Por tanto, cualquier número entero puede representarse por una de las tres formas canónicas:

(m, 0) (0, n) (0, 0)

según se trate de un número entero positivo, negativo o nulo.

Si un número entero no está dado en forma canónica se puede pasar a ella. Sea, por ejemplo, el número entero (a, b) tratemos de averiguar sus representantes canónicos.

Pueden ocurrir tres casos:

$$\begin{array}{lll} a > b & \text{entonces} & (a, b) = (a - b, 0) = (m, 0) \quad m \in N \\ a < b & \text{entonces} & (a, b) = (0, b - a) = (0, n) \quad n \in N \\ a = b & \text{entonces} & (a, b) = (0, 0) \end{array}$$

Insistimos, para mayor claridad, utilizando el esquema planteado con anterioridad:

$a > b \quad (a, b) \; R \; (a - b, b - b) \quad$ pues $a + b - b = b + a - b$

el representante canónico de (a, b) es (a − b, 0)

$a < b \quad (a, b) \; R \; (a - a, b - a) \quad$ pues $a + b - a = b + a - a$

el representante canónico de (a, b) es (0, b − a)

$a = b \quad (a, a) \; R \; (a - a, a - a) \quad$ pues $a + a - a = a + a - a$

el representante canónico de (a, b) es (0, 0)

Por comodidad, se suele asociar a cada par ordenado de números naturales, que representa a un número entero, un número natural precedido de un signo. Así:

(m, 0) ———————— + m N.^{os} enteros positivos Z^+
(0, n) ———————— − n N.^{os} enteros negativos Z^-
(0, 0) ———————— 0 N.° entero nulo o cero

Queda claro que los signos + ó − son indicativos de una cualidad: el ser positivos o negativos. No confundir con los signos de la suma y la sustracción.

$$Z^+ \subset Z \,,\; Z^- \subset Z \,,\; 0 \in Z$$

Ejercicios y ejemplos

1. Siendo (3, 2) y (4, 5) elementos de N × N, escribir la clase de equivalencia que representan sus representantes canónicos y el número entero que definen.

   Consideramos primero el par (3, 2); la clase de equivalencia estará formada por pares ordenados relacionados con él. Procedemos como en otras ocasiones y tenemos:

   $(3, 2) \; R \; (4, \square) \quad 2 + 4 = 6 \quad 3 + \square = 6$

   luego la pareja (4, 3) es equivalente a la dada (3, 2). Análogamente obtendríamos (5, 4) (6, 5), etc.

   La clase de equivalencia correspondiente a (3, 2) sería:

   (3, 2) (4, 3) (5, 4) (6, 5) ...

Averiguamos el representante canónico de (3, 2), como 3 > 2 tenemos:

$$(3, 2) = (3 - 2, 0) = (1, 0)$$

Por último, el par ordenado de números naturales (3, 2) representa al número entero + 1.

Procediendo de la misma manera para la pareja (4, 5) obtenemos que su clase de equivalencia es:

$$(4, 5)\ (5, 6)\ (6, 7)\ (7, 8)\ (8, 9)\ \ldots$$

su representante canónico:

$$(4, 5) = (0, 5 - 4) = (0, 1)$$

y representa al número entero negativo − 1.

2. Escribir parejas de la clase de equivalencia que representan los números enteros 3, 0, − 2.

Por ser el número 3 positivo, el representante canónico tendrá por segunda componente cero, será, por tanto (3, 0).

Parejas de números naturales equivalentes a (3, 0) son:

$$(3, 0)\ (4, 1)\ (5, 2)\ (6, 3)\ (7, 4)\ldots$$

Tomemos ahora el cero. El representante canónico tiene la primera y la segunda componente cero: (0, 0).

Parejas equivalentes a (0, 0) son:

$$(0, 0)\ (1, 1)\ (2, 2)\ (3, 3)\ (4, 4)\ (5, 5)\ldots$$

Por último, el número − 2 es negativo, su representante canónico es (0, 2). Parejas equivalentes a ésta son:

$$(0, 2)\ (1, 3)\ (2, 4)\ (3, 5)\ (4, 6)\ldots$$

3. OPERACIONES CON LOS NUMEROS ENTEROS

Tenemos un conjunto cuyos elementos están perfectamente definidos, que según hemos visto en el apartado anterior es el conjunto Z de los números enteros, parece lógico siguiendo planteamientos estudiados en la Unidad Didáctica anterior, tratar de operar con sus elementos, esto es, vamos a definir leyes de composición interna entre los elementos de Z.

3.1. Suma de números enteros

Sean (a, b) y (c, d) dos elementos cualesquiera de Z, definimos en Z una ley de composición interna llamada suma, definida así:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

Para que esta definición sea válida son necesarias dos cosas: una, dados dos elementos de Z obtengamos otro elemento de Z y segunda, la suma ha de ser la misma cualquiera que sean los representantes.

Según el procedimiento utilizado para sumar, es evidente que dadas dos parejas de elementos, obtenemos otra pareja

$$(2, 1) + (3, 7) = (2 + 3, 1 + 7) = (5, 8)$$
$$(4, 1) + (2, 3) = (4 + 2, 1 + 3) = (6, 4)$$

Vamos a comprobar ahora, que la definición dada para la suma es independiente de los representantes **escogidos. Además de los** representates (a, b) y (c, d) tomamos los (a', b') y (c', d') equivalentes a los primeros, de tal manera que:

$$\left.\begin{array}{l}(a, b) = (a', b') \Longleftrightarrow a + b' = b + a' \\ (c, d) = (c', d') \Longleftrightarrow c + d' = d + c'\end{array}\right\} \text{ sumando miembro a miembro}$$

$$a + b' + c + d' = b + a' + d + c'$$

$$(a + c) + (b' + d') = (b + d) + (a' + c')$$

recordando una vez más, la relación de equivalencia R (**apartado** 2.2):

$$(a + c, b + d) = (a' + c', b' + d')$$

Por ejemplo: dadas las parejas (2, 1) y (7, 2) dos equivalentes a ellas son: (11, 10) y (15, 10), o sea:

$$\left.\begin{array}{l}(2, 1) = (11, 10) \\ (7, 2) = (15, 10)\end{array}\right\} \text{ Sumando}$$

$$(2, 1) + (7, 2) = (11, 10) + (15, 10)$$

$$(2 + 7, 1 + 2) = (11 + 15, 10 + 10)$$

$$(9, 3) = (26, 20)$$

lo que acabamos de enunciar constituye la propiedad uniforme de la suma de números enteros: La suma de dos enteros definidos por las clases (a, b) y (c, d) es el entero correspondiente a la clase (a + c, b + d).

De la definición de suma que acabamos de estudiar se desprenden tres consecuencias, inmediatas:

I. La suma de dos números positivos es otro número positivo.

$$(m, 0) + (n, 0) = (m + n, 0)$$

II. La suma de dos números negativos es otro número también negativo.

$$(0, m) + (0, n) = (0, m + n)$$

III. Si sumamos dos números de distinto signo, podemos considerar tres casos:

i) $m > n$ $(m, n) = (m - n, 0)$ suma positiva.
ii) $m < n$ $(m, n) = (0, n - m)$ suma negativa.
iii) $m = n$ $(m, n) = (0, 0)$ suma igual a cero.

3.2. Propiedades de la suma de números enteros

Vamos a enunciar las propiedades que verifica la ley de composición interna, llamada suma, definida en Z.

1. *Conmutativa.* Siendo $(a, b) \in Z$, $(c, d) \in Z$.

$$(a, b) + (c, d) = (c, d) + (a, b)$$

ya hemos visto en la Unidad Didáctica primera, como se pueden demostrar o justificaficar estas propiedades: partiendo del primer miembro de la igualdad hemos de llegar al segundo.

En este caso:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = (c, d) + (a, b)$$

2. *Asociativa.* Si $(a, b) \in Z$, $(c, d) \in Z$, $(e, f) \in Z$ la propiedad asociativa se enuncia:

$$[(a, b) + (c, d)] + (e, f) = (a, b) + [(c, d) + (e, f)]$$

En efecto:

$$\begin{aligned}[(a, b) + (c, d)] + (e, f) &= (a + c, b + d) + (e, f) = \\ = ([a + c] + e, [b + d] + f) &= (a + [c + e], b + [d + f]) = \\ = (a, b) + (c + e, d + f) &= (a, b) + [(c, d) + (e, f)]\end{aligned}$$

3. *Existencia de elemento neutro.* Dado un número entero cualquiera, $(a, b) \in Z$, tenemos que buscar otro número entero $(e_1, e_2) \in Z$ tal que, se verifique:

$$(a, b) + (e_1, e_2) = (a, b)$$

este número entero que buscamos (e_1, e_2) será el elemento neutro para la suma en Z. Vamos a determinarlo:

$$(a + e_1, b + e_2) = (a, b)$$

luego, ha de verificarse

$$\begin{aligned}a + e_1 = a &\Rightarrow e_1 = a - a = 0 \\ b + e_2 = b &\Rightarrow e_2 = b - b = 0\end{aligned}$$

por tanto, el elemento neutro es (0, 0):

$$(a, b) + (0, 0) = (a, b)$$

4. *Existencia de elemento simétrico.* Dado un número entero cualquiera $(a, b) \in Z$, buscamos otro número entero $(c, d) \in Z$ tal que

$$(a, b) + (c, d) = (0, 0)$$

esto es, la suma de ambas parejas ha de ser el elemento neutro. A esta segunda pareja la llamamos elemento simétrico del primero (en el caso de considerar como ley de composición interna la suma, también suele llamarse elemento opuesto).

En efecto:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = (0, 0)$$

luego:

$$\left.\begin{matrix} a + c = 0 \\ b + d = 0 \end{matrix}\right\} \text{ la solución más sencilla es: } \left\{\begin{matrix} c = b \\ d = a \end{matrix}\right.$$

por tanto, el elemento simétrico del número entero (a, b) es la pareja (b, a).

$$(a, b) + (b, a) = (a + b, b + a) = (0, 0)$$

El opuesto de un número entero siempre existe y es único, de esta manera conseguimos desaparezca la operación de sustracción; no hace falta definir un nuevo criterio para restar dos números, basta sumar al minuendo el opuesto del sustraendo. Así podemos decir que la sustracción de dos números enteros es siempre posible.

3.3. Producto de números enteros

Definimos ahora una nueva ley de composición interna u operación, que llamaremos producto, de la siguiente manera: dados dos elementos cualesquiera de Z, (a, b) $\in$ Z y (c, d) $\in$ Z, llamamos producto a una nueva pareja, a un nuevo número entero, definido por la siguiente expresión:

$$(a, b) \times (c, d) = (ac + bd, bc + ad)$$

Tenemos, pues, un procedimiento por medio del cual, dados dos números enteros conseguimos otro número entero. Así,

$$(2, 1) \cdot (3, 7) = (2 \cdot 3 + 1 \cdot 7, 1 \cdot 3 + 2 \cdot 7) = (6 + 7, 3 + 14) = (13, 17)$$

Vamos a demostrar que esta operación definida en el conjunto N $\times$ N es estable frente a la relación de equivalencia R, o sea, que es una operación definida en el conjunto Z de los números enteros, independiente de los representantes elegidos en cada clase.

Sean las parejas (a, b) (c, d) (a', b') y (c', d') de manera que:

$$(a, b) = (a', b') \Longleftrightarrow a + b' = b + a'$$
$$(c, d) = (c', d') \Longleftrightarrow c + d' = d + c'$$

Multiplicamos la primera de estas dos expresiones por c y por d y la segunda por a' y por b'. Obtenemos así cuatro expresiones:

$$a\,c + b'\,c = b\,c + c\,a'$$
$$a\,d + b'\,d = b\,d + a'\,d$$
$$a'\,c + a'\,d' = a'\,d + a'\,c'$$
$$b'\,c + b'\,d' = b'\,d + b'\,c'$$

A la suma de la primera y tercera le restamos la segunda y cuarta:

$$a\,c + b\,d + a'\,d' + b'\,c' = b\,c + a\,d + a'\,c' + b'\,d'$$

recordando la definición de producto:

$$(a\,c + b\,d,\ b\,c + a\,d) = (a'\,c' + b'\,d',\ a'\,d' + b'\,c')$$
$$(a, b) \times (c, d) = (a', b') \times (c'\ d')$$

Acabamos de demostrar la propiedad uniforme de la multiplicación de números enteros: El producto de los números enteros definido por las clases (a, b) y (c, d) es el correspondiente a la clase (a c + b d, b c + a d)

Por ejemplo: Las parejas (3, 5) y (7, 8) son equivalentes, respectivamente, a las parejas (7, 9) y (1, 2), luego

$$(3, 5) = (7, 9)$$
$$(7, 8) = (1, 2)$$

$$(3, 5) \times (7, 8) = (7, 9) \times (1, 2)$$
$$(3 \cdot 7 + 5 \cdot 8,\ 5 \cdot 7 + 3 \cdot 8) = (7 \cdot 1 + 9 \cdot 2,\ 9 \cdot 1 + 7 \cdot 2)$$
$$(21 + 40,\ 35 + 24) = (7 + 18,\ 9 + 14)$$
$$(61,\ 59) = (25,\ 23)$$

3.4. Propiedades del producto de números enteros

Vamos a proceder de la misma manera que en el apartado 3.2.

1. *Conmutativa.* $(a, b) \cdot (c, d) = (c, d) \cdot (a, b)$

puesto que:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (a\,c + b\,d,\ b\,c + a\,d) = (c\,a + d\,b,\ c\,b + d\,a) = (c, d) \cdot (a, b)$$

2. *Asociativa.* $[(a, b) \cdot (c, d)] \cdot (e, f) = (a, b) \cdot [(c, d) \cdot (e, f)]$

La demostración de esta propiedad es semejante a la propiedad asociativa de la suma. Por este motivo no la repetimos. Pensamos que es un buen ejercicio para el alumno.

3. *Existencia de elemento neutro.* Cuando la ley de composición interna de que se trata es el producto, al elemento neutro suele llamársele *elemento unidad.*

Dado el elemento $(a, b) \in Z$ buscamos otro elemento de Z, (e_1, e_2) llamado elemento unidad, tal que

$$(a, b) \times (e_1, e_2) = (a, b)$$

en electo:

$$(a\,e_1 + b\,e_2,\ b\,e_1 + a\,e_2) = (a, b)$$

$$\left.\begin{array}{l} a\,e_1 + b\,e_2 = a \\ b\,e_1 + a\,e_2 = b \end{array}\right\} \text{ una posible solución es } e_1 = 1,\ e_2 = 0$$

luego el elemento unidad, para el producto de números enteros, es (1, 0). Así:

$$(2, 3) \cdot (1, 0) = (2 \cdot 1 + 3 \cdot 0,\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0) = (2, 3)$$

4. *Propiedad distributiva del producto respecto a la suma.* Esta propiedad tiene la particularidad, como ya hemos dicho, de relacionar los elementos de un conjunto, Z en este caso, respecto a dos leyes de composición interna: suma y producto.

La enunciamos así:

$$(m, n) \cdot [(a, b) + (c, d)] = (m, n) \cdot (a, b) + (m, n) \cdot (c, d)$$

siendo (m, n) (a, b) y (c, d) elementos de Z.

Vamos a demostrarla. Operamos en el primer miembro

$$(m, n) \cdot [(a, b) + (c, d)] = (m, n) \cdot (a + c, b + d) = (m\,a + m\,c + n\,b + n\,d, n\,a + n\,c + m\,b + m\,d)$$

Análogamente con el segundo:

$$(m, n) \cdot (a, b) + (m, n) \cdot (c, d) = (m\,a + n\,b, n\,a + m\,b) + (m\,c + n\,d, n\,c + m\,d) = (m\,a + n\,b + m\,c + n\,d, n\,a + m\,b + n\,c + m\,d)$$

Hemos llegado al mismo resultado.

4. ESTRUCTURA ALGEBRAICA DEL CONJUNTO DE LOS NUMEROS ENTEROS

En el conjunto Z de los números enteros hemos definido dos leyes de composición interna, dos operaciones que se denominan habitualmente *suma* y *producto* de números enteros.

La suma de números enteros verifica las siguientes propiedades:

- Asociativa.
- Conmutativa.
- Tiene elemento neutro: (0, 0).
- Todo número entero tiene su simétrico. Si (a, b) es un número entero cualquiera, su simétrico es (b, a).

En consecuencia, recordando lo visto en el último tema de la Unidad Didáctica 1, podemos decir que el conjunto Z de los números enteros con la suma como ley de composición interna, tiene estructura de *grupo conmutativo.*

Más brevemente,

(Z, +) es un grupo conmutativo

El producto de números enteros cumple las siguientes propiedades:

- Asociativa.
- Conmutativa.
- Tiene elemento neutro: (1, 0)

Por tanto, el conjunto Z de los números enteros con el producto como ley de composición interna tiene estructura de *semigrupo conmutativo con elemento neutro.* Es decir,

(Z, ×) es un semigrupo conmutativo con elemento neutro.

Además, hemos podido comprobar una propiedad que relaciona el producto y la suma de números enteros, concretamente hemos visto que:

- El producto de números enteros es distributivo respecto a la suma.

Resumiendo: En el conjunto Z de los números enteros se han definido dos operaciones *suma* y *producto*, de manera que:

- (Z, +) es un grupo conmutativo.
- (Z, ×) es un semigrupo conmutativo con elemento neutro.
- El producto es distributivo respecto a la suma.

Estas tres consideraciones nos permiten afirmar que Z tiene estructura de *anillo conmutativo con elemento neutro.*

(Z, +, ×) es un anillo conmutativo con elemento neutro

5. ISOMORFISMO ENTRE N Y Z

Consideremos los dos conjuntos siguientes: el conjunto de los números naturales con la ley de composición interna suma y el conjunto de los números enteros positivos, con la ley de composición interna suma, en ambos conjuntos consideramos incluido el 0. Por comodidad a ambos conjuntos los simbolizaremos respectivamente, así:

$$(N, +) \qquad (Z^+, +)$$

Estos dos conjuntos son disjuntos, pero podemos establecer entre ellos una correspondencia biunivoca, tomando como transformado natural *a* el entero positivo $+a = (a, 0)$

$$+a \in (N, +) \longrightarrow (a, 0) \in (Z^+, +)$$

Esta correspondencia la podemos representar así:

$$f(a) = (a, 0)$$

Para mayor claridad formamos las correspondientes imágenes de algunos números naturales:

$3 \longrightarrow (3, 0)$
$5 \longrightarrow (5, 0)$
$7 \longrightarrow (7, 0)$
$8 \longrightarrow (8, 0)$
$9 \longrightarrow (9, 0)$

también puede representarse así:

$f(3) = (3, 0)$
$f(5) = (5, 0)$
$f(7) = (7, 0)$
$f(8) = (8, 0)$
$f(9) = (9, 0)$

Si *a* y *b* son dos números naturales se verifica

$$f(a) = (a, 0) \qquad f(b) = (b, 0)$$
$$f(a + b) = (a + b, 0) = (a, 0) + (b, 0) = f(a) + f(b)$$

BIBLIOTECA PUBLICA PTO. STA. MARIA

o sea, el transformado de la suma $a + b$ es igual a la suma de los homólogos $f(a) + f(b)$. Esto equivale a decir que la correspondencia conserva la adición. Toda correspondencia biunívoca que cumpla esta propiedad se llama *isomorfismo*.

Parece claro que los números naturales y los números enteros positivos son de distinta naturaleza, el isomorfismo indicado nos permite considerar ambos conjuntos como idénticos frente a la operación de la adición y a tomar unos por otros, escribiendo, por ejemplo:

$$(+ a) + (+ b) = a + b$$

Se dice que se ha sumergido el conjunto N de los números naturales en el conjunto Z de los números enteros mediante la identificación $a = (a, 0)$.

Entre el conjunto de los números naturales, con la ley de composición interna producto y el de los números enteros positivos, con la ley de composición interna producto, lo mismo que antes, establecemos una correspondencia biunívoca f de manera que al número natural a le asociamos el número entero positivo (a, O)

$$a \xrightarrow{f} (a, 0) \text{ ó } f(a) = (a, 0)$$

De esta manera, si *a* y *b* son dos números naturales podemos escribir:

$$f(a) = (a, 0)$$
$$f(b) = (b, 0)$$

luego:

$$f(a \cdot b) = (a \cdot b, 0) = (a, 0) \cdot (b, 0) = f(a) \cdot f(b)$$

Por tanto, el transformado del producto $a \cdot b$ es igual al producto de los transformados $f(a) \cdot f(b)$. De otro modo, la correspondencia definida conserva el producto.

Este isomorfismo permite identificar los dos conjuntos N y Z^+, frente a la operación de multiplicar y sustituir uno por otro.

6. ORDENACION EN EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS ENTEROS

Consideremos el conjunto formado por todos los números enteros positivos, que representaremos por Z^+. Ya hemos visto que Z^+ es un subconjunto del conjunto Z de los números enteros: $Z^+ \subset Z$.

Sobre Z vamos a definir la siguiente relación binaria:

Si $a, b \in Z \quad a \mathrel{R} b \iff b - a \in Z^+$

Esta relación binaria es una relación de orden que normalmente se representa por $\leqslant$ (*). Podemos escribir entonces:

(*) El signo $\leqslant$ se lee menor o igual.

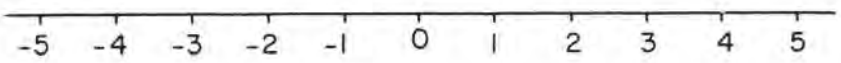
Si $a, b \in Z \quad a \leqslant b \Leftrightarrow b - a \in Z^+$

Dejamos como ejercicio para el alumno comprobar que, efectivamente, es una relación de orden.

Por último, vamos a aplicar esta relación de orden a algunos casos particulares para entender mejor su funcionamiento:

$$2 \leqslant 5 \quad \text{pues } 5 - 2 = 3 \in Z^+$$
$$-4 \leqslant -2 \quad \text{pues } -2 - (-4) = 2 \in Z^+$$

Si utilizamos la siguiente representación sobre una recta:



queda, pues, clara la significación de la relación de orden total establecida en el conjunto Z de los números enteros (**).

(**) Dicho de una manera muy sencilla: cada número es mayor que cualquiera que esté a su izquierda.

CONCLUSIONES TEMA X

CONJUNTO DE LOS NUMEROS ENTEROS	Sobre $N \times N$ definimos la siguiente relación de equivalencia R: Si $(a, b) \in N \times N$, $(a', b') \in N \times N$ $(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow a + b' = a' + b$ Al conjunto cociente engendrado por R en $N \times N$ se le llama conjunto de los números enteros $Z = \frac{N \times N}{R}$
NUMERO ENTERO	Es cada una de las clases de equivalencia engendradas por la relación de equivalencia R en $N \times N$. Es decir, cada uno de los elementos del conjunto cociente $\frac{N \times N}{R}$ Los números enteros vienen dados por pares ordenados de números naturales y un mismo número entero puede expresarse por distintos pares ordenados equivalentes.
REPRESENTANTES CANONICOS DE UN NUMERO ENTERO	Sea (a, b) un número entero cualquiera, sus representantes canónicos son: $a > b \quad (a, b) = (a - b, 0) = (m, 0) \quad m \in N$ $a < b \quad (a, b) = (0, b - a) = (0, n) \quad n \in N$ $a = b \quad (a, b) = (0, 0)$

<table>
<tr><td rowspan="4">OPERACIONES EN Z</td><td rowspan="2">SUMA</td><td>DEFINICION</td><td>$(a, b) \in Z \quad (c, d) \in Z$
$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$</td></tr>
<tr><td>PROPIEDADES</td><td>Conmutativa.
Asociativa.
Elemento neutro: (0, 0).
Todo elemento entero tiene su simétrico.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">PRODUCTO</td><td>DEFINICION</td><td>$(a, b) \in Z \quad (c, d) \in Z$
$(a, b) \times (c, d) = (ac + bd, bc + ad)$</td></tr>
<tr><td>PROPIEDADES</td><td>Conmutativa.
Asociativa.
Elemento neutro: (1, 0) (Elemento unidad).
El producto es distributivo respecto a la suma.</td></tr>
<tr><td>ESTRUCTURA ALGEBRAICA EN Z</td><td colspan="3">$(Z, +)$ es un grupo conmutativo.
$(Z, \times)$ es un semigrupo conmutativo con elemento neutro.
$(Z, +, \times)$ es un anillo conmutativo con elemento neutro.</td></tr>
<tr><td>ORDENACION EN Z</td><td colspan="3">La relación binaria:
Si $a, b \in Z \quad a \leqslant b \Leftrightarrow b - a \in Z^+$
es una relación de orden total definida en Z.</td></tr>
</table>

EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. Escribir las clases de equivalencia definidas por los números naturales:

$$-3,\ 1 \text{ y } 3$$

2. Comprobar, tomando un representante cualquiera de las clases de equivalencia, la siguiente expresión:

$$2 + 3 + (-1) = 4$$

3. Demostrar que el elemento neutro de la suma de números enteros es la clase a la que pertenece el elemento (0, 0).

4. Demostrar que el elemento simétrico de (a, b), respecto a la suma, es el (b, a).

5. ¿Qué estructura tiene el conjunto de los enteros pares con la suma como ley de composición interna? y ¿con la misma ley de composición interna, el conjunto de los números enteros impares?

6. Comprobar, tomando un representante cualquiera de las clases de equivalencia, que:

$$2 \times 3 \times (-2) = -12$$

7. Demostrar la propiedad asociativa de la multiplicación de enteros.

8. ¿Qué estructura tiene el conjunto de los enteros múltiplos de 2 con la multiplicación como ley de composición interna?

9. Comprobar que en el conjunto de los números enteros no existe elemento simétrico, considerando como ley de composición interna el producto de números enteros.

10. Ordenar de menor a mayor los siguientes números enteros: 2, − 3, 0, 1, − 4, − 5, 3.

11. Comprobar mediante un representante de la clase de equivalencia que se verifica:

$$3 \times (2 + 1) = (3 \times 2) + (3 \times 1)$$

(Propiedad distributiva)

12. En el conjunto de los enteros se define la siguiente ley de composición: $a \perp b = 2ab$. ¿Qué propiedades tiene esta ley?

SOLUCION A LOS EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. Por ser -3 un número negativo, el representante canónico tendrá la primera componente cero y será (0, 3). La clase vendrá dada por los pares:

$$(0, 3)\ (1, 4)\ (2, 5)\ (3, 6)\ (4, 7)\ \ldots$$

Por ser positivos los dos siguientes, sus representantes canónicos tendrán cero en segundo lugar y serán:

el de 1 (1, 0) y el de 3 (3, 0)

Sus respectivas clases son:

$$(1, 0)\ (2, 1)\ (3, 2)\ (4, 3)\ (5, 4)\ \ldots$$
$$(3, 0)\ (4, 1)\ (5, 2)\ (6, 3)\ (7, 4)\ \ldots$$

2. Escribamos en primer lugar los representantes canónicos:

2 su representante canónico será (2, 0)
3 su representante canónico será (3, 0)
-1 su representante canónico será (0, 1)
4 su representante canónico será (4, 0)

Tomemos ahora los siguientes pares:

de la clase (2, 0) tomamos el par (3, 1)
de la clase (3, 0) tomamos el par (6, 3)
de la clase (0, 1) tomamos el par (4, 5)

tenemos que comprobar que:

(3, 1) + (6, 3) + (4, 5) su suma pertenece a la clase (4, 0)
(3, 1) + (6, 3) + (4, 5) = (3 + 6 + 4, 1 + 3 + 5) = (13, 9)
(13, 9) R (4, 0) $13 + 0 = 9 + 4 = 13$ como queríamos demostrar.

3. Efectivamente, por definición de elemento neutro (e, e') debe ser un elemento que pertenezca a Z y que para cualquier (a, b) $\in$ Z verifique:

(a, b) + (e, e') = (a, b) si efectuamos la suma,
(a + e, b + e') = (a, b)
y por la condición de que los pares han de ser iguales:

$$\begin{matrix} a + e = a \\ b + e' = b \end{matrix} \quad \text{de donde se deduce} \quad \begin{matrix} e = a - a = 0 \\ e' = b - b = 0 \end{matrix}$$

luego el elemento neutro será (0, 0)

4. El simétrico del elemento (a, b) lo representamos por $(\bar{a}, \bar{b})$ y se verifica que:

$$(a, b) + (\bar{a}, \bar{b}) = (0, 0) \text{ ó } (a + \bar{a}, b + \bar{b}) = (0, 0)$$

y en particular: (a + b, a + b), ya que

$$(0, 0) \quad R \quad (a + b, a + b) \quad 0 + a + b = 0 + a + b = a + b$$

por tanto,

$$(a + \bar{a}, b + \bar{b}) = (a + b, a + b)$$

de donde:

$$\begin{matrix} a + \bar{a} = a + b \\ b + \bar{b} = a + b \end{matrix} \quad \text{luego} \quad \begin{matrix} \bar{a} = b \\ \bar{b} = a \end{matrix}$$

por tanto, el simétrico de (a, b) es el $(\bar{a}, \bar{b})$ y según lo visto es (b, a)

5. Consideremos los números enteros pares − 6, − 4, − 2, 0, 2, 4, 6, 8. Hemos de comprobar:

a) Si la operación es cerrada, es decir, si al sumar dos enteros pares, el resultando es otro entero par, efectivamente:

$$\begin{matrix} 2 + 4 = 6 & \text{entero par} \\ -6 - 2 = -8 & \text{entero par} \\ -4 + 2 = -2 & \text{entero par} \end{matrix}$$

b) Es asociativa y conmutativa.

c) Tiene elemento neutro y es el 0.

d) Todo elemento tiene simétrico y así el simétrico del 2 será el − 2, ya que 2 + (− 2) = 0.

Por tanto, tiene estructura de grupo conmutativo.

Haremos ahora lo mismo con los números enteros impares:

$$\ldots -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \ldots$$

Seguimos el mismo procedimiento que en el caso anterior:
¿Es cerrada la suma?
En este caso vemos que no, que si sumamos dos números impares, el resultado es un número par, así:

$$3 + 5 = 8$$

por tanto no es cerrada, y al no cumplir esta propiedad, la suma no es ley de composición interna ni tiene ninguna estructura.

6. Utilizando un procedimiento ya visto:

$$\begin{aligned} 2 &\text{ su representante canónico } (2, 0) \\ 3 &\text{ su representante canónico } (3, 0) \\ -2 &\text{ su representante canónico } (0, 2) \\ -12 &\text{ su representante canónico } (0, 12) \end{aligned}$$

Tomemos ahora un representante cualquiera:

$$\begin{aligned} 2 &\text{ tomemos } (3, 1) \\ 3 &\text{ tomemos } (4, 1) \\ -2 &\text{ tomemos } (1, 3) \end{aligned}$$

y comprobemos que el resultado es equivalente al (0, 12)

$$\begin{aligned} 2 \times 3 \times (-2) &= [(3, 1) \times (4, 1)] \times (1, 3) = \\ &= (3 \cdot 4 + 1 \cdot 1, 3 \cdot 1 + 1 \cdot 4) \times (1, 3) = (13, 7) \times (1, 3) = \\ &= (13 \cdot 1 + 7 \cdot 3, 13 \cdot 3 + 7 \cdot 1) = (34, 46) \quad \text{y} \end{aligned}$$

$(34, 46)$ R $(0, 12)$ ya que $34 + 12 = 46 + 0 = 46$

7. Vamos a demostrar la propiedad asociativa que dice:

$$[(a, b) \times (c, d)] \times (e, f) = (a, b) \times [(c, d) \times (e, f)]$$

para ello vamos a operar los dos miembros y ver si coinciden

$$\begin{aligned} [(a, b) \times (c, d)] \times (e, f) &= (ac + bd, ad + bc) \times (e, f) = \\ &= [e(ac + bd) + f(ad + bc), f(ac + bd) + e(ad + bc)] = \\ &= (eac + ebd + fad + fbc, fac + fbd + ead + ebc) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a, b) \times [(c, d) \times (e, f)] &= (a, b) \times (ce + df, cf + de) = \\ &= [a(ce + df) + b(cf + de), a(cf + de) + b(ce + df)] = \\ &= (ace + adf + bcf + bde, acf + ade + bce + bdf) \end{aligned}$$

Como los dos miembros son iguales: verifica la propiedad asociativa.

8. El conjunto de los múltiplos de 2 es $\{\ldots -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$. Tenemos que demostrar:

   a) Que la multiplicación es cerrada.
   Efectivamente, ya que al multiplicar dos múltiplos de 2 obtenemos otro múltiplo de 2.

   b) Es asociativa y conmutativa.

   c) No tiene elemento neutro, ya que en la multiplicación es el 1 y éste no es múltiplo de 2.
   Por tanto, es un semigrupo conmutativo.

9. Tomemos un representante cualquiera de una de las clases de equivalencia, por ejemplo el (3, 1), y busquemos su simétrico que representaremos por (X, Y); por definición de elemento simétrico se ha de verificar que:

$(3, 1) \times (X, Y) = (1, 0)$ siendo (1, 0) el elemento neutro
$(3X + Y, 3Y + X) = (1, 0)$

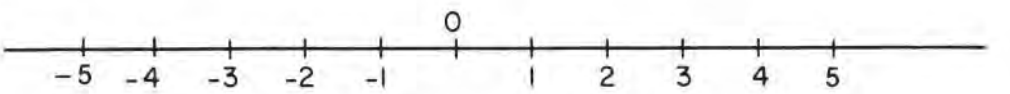
$$\left.\begin{array}{l} 3X + Y = 1 \\ 3Y + X = 0 \end{array}\right\} \text{ resolviendo el sistema } X = -3Y$$

$$3(-3Y) + Y = 1 \;;\; -9Y + Y = 1 \;;\; -8Y = 1 \;;\; Y = -\frac{1}{8}$$

$$X = -\frac{3}{8} \quad \text{luego el simétrico sería} \quad \left(+\frac{3}{8}, -\frac{1}{8}\right)$$

pero los elementos que componen el par no son naturales, por tanto, no existe elemento simétrico.

10. Si utilizamos la representación en una recta, resulta muy sencillo:



Los de la izquierda son los menores; así:

$$-5 < -4 < -3 < 0 < 1 < 2 < 3$$

11. Tomemos pares cualesquiera de las clases de equivalencia correspondientes:

$$(4, 1) \times [(3, 1) + (2, 1)] = [(4, 1) \times (3, 1)] + [(4, 1) \times (2, 1)]$$

$$(4, 1) \times [(3, 1) + (2, 1)] = (4, 1) \times [(3 + 2, 1 + 1)] =$$
$$= (4, 1) \times (5, 2) = (4 \cdot 5 + 1 \cdot 2, 4 \cdot 2 + 1 \cdot 5) = (22, 13)$$

$$[(4, 1) \times (3, 1)] + [(4, 1) \times (2, 1)] = (12 + 1, 4 + 3) + (8 + 1, 4 + 2) =$$
$$= (13, 7) + (9, 6) = (22, 13)$$

12. a) Asociativa

$a \perp (b \perp c) = (a \perp b) \perp c$
$a \perp (b \perp c) = a \perp (2bc) = 2 \cdot a \cdot 2bc = 4abc$ Sí la verifica
$(a \perp b) \perp c = (2ab) \perp c = 2 \cdot 2abc = 4abc$

b) Conmutativa

$a \perp b = b \perp a$
$a \perp b = 2ab$ Sí la verifica
$b \perp a = 2ba$

c) Elemento neutro: le llamaremos e

$$a \perp e = a \; ; \; 2ae = a \; ; \; 2e = 1 \; ; \; e = \frac{1}{2}$$

Por no ser $\frac{1}{2}$ un número entero, no tiene elemento neutro.

TEMA XI

DIVISIBILIDAD EN EL ANILLO DE LOS NUMEROS ENTEROS

1. Consideraciones generales.
   - 1.1. La división exácta y la división entera.
   - 1.2. Múltiplos de un número.
   - 1.3. Divisor de un número.
   - 1.4. Propiedades de los múltiplos y de los divisores.
   - 1.5. Criterios de divisibilidad.
   - 1.6. Descomposición de un número compuesto en factores primos.
   - 1.7. Cálculo de todos los divisores de un número.
2. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo.
   - 2.1. Máximo común divisor de dos números.
   - 2.2. Mínimo común múltiplo de dos números.
   - 2.3. Relación entre el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo.

INSTRUCCIONES PARA EL ESTUDIO DEL TEMA

Por medio de este tema tratamos de familiarizar al alumno con los rudimentos de la Teoría de la divisibilidad. En esta ocasión, como en otras de este curso de Matemáticas Básicas, hemos estimado conveniente prescindir de las grandes y brillantes exposiciones, para recurrir a criterios de aplicación práctica, que puedan servirles para manejar los números enteros.

Hemos intentado, algunas veces, relacionar conceptos de la teoría de la divisibilidad con los rudimentos de la Teoría de Conjuntos que hemos expuesto en la primera Unidad Didáctica, de esta manera, pensamos, se llega a comprender mejor los conceptos manejados.

Una advertencia final, el estudiante debe comprender que estamos manejando números enteros, pero no utilizamos la representación de pares ordenados de números naturales, hemos considerado establecido el isomorfismo, ya estudiado, entre el conjunto de los números enteros y el conjunto de los números naturales, de manera que estos últimos representan a los números enteros sin más que anteponer un signo + o −.

1. CONSIDERACIONES GENERALES

1.1. La división exacta y la división entera

Consideramos la ecuación

$$ax = b$$

en la que *a* y *b* son números enteros conocidos y *x* un número entero desconocido. Podemos averiguar el valor de *x* que satisface la ecuación anterior, cuando se puede escribir

$$b = a \cdot \text{número entero}$$

es decir,

$$x = \frac{b}{a}$$

a *x* se le llama *cociente exacto* y la operación que nos permite averiguar el cociente exacto la llamaremos *división exacta*.

Por ejemplo, en la ecuación

$$2 \cdot x = 10 \qquad x = \frac{10}{2} = 5$$

x = 5 es un número entero que se llama el cociente exacto y para obtenerlo hemos realizado la división exacta entre 10 y 2.

Puede ocurrir otra posibilidad: no encontrar un número entero x que multiplicado por a, de b; en este caso, hallaremos dos enteros consecutivos q y $q + 1$ tales que:

$$aq < b < a(q + 1)$$

Llamaremos resto a: $r = b - aq > 0$ siendo $0 < r < |a|$ (*).

Al número entero q se le llama *cociente entero* y a la operación realizada para averiguarlo la llamaremos *división entera.*

$$b = aq + r \qquad 0 < r < |a|$$

Veamos el siguiente ejemplo: $3 \cdot x = 7$. No existe ningún número entero que multiplicado por 3 dé 7, pero podemos encontrar dos números consecutivos, 2 y 3, tales que

$$3 \cdot 2 < 7 < 3 \cdot 3$$

que se puede escribir: $6 < 7 < 9$

El resto será: $r = 7 - 6 = 1 > 0$ y $0 < r < 3$

Es evidente que: $7 = 3 \cdot 2 + 1$

1.2. Múltiplos de un número

Dado un número entero a cualquiera, al multiplicarlo por cualquier número entero obtenemos un *múltiplo de a.* Así, si consideramos el número entero 7 y lo multiplicamos por el número entero 2, obtenemos el número entero 14, podemos decir que 14 es un múltiplo de 7. Si ahora lo multiplicamos por -3, el resultado obtenido es -21, que también es un múltiplo de 7, siendo -3 y -21 números enteros.

Parece claro decir, entonces, que para obtener todos los múltiplos de un número entero, basta multiplicar este número por todos los números enteros. De esta manera, los múltiplos de 2 son 0, ± 2, ± 4, ± 6, ± 8, ± 10, ..., por tanto, el conjunto de los números enteros múltiplos de 2 es un conjunto de infinitos elementos.

De otra manera, decir que un número a es múltiplo de otro número b, equivale a decir, que si a y b son números enteros, existe otro número entero que verifique:

$$a = b \cdot n$$

también se puede representar por $a = \dot{b}$.

(*) $|a|$ quiere significar valor absoluto de a, es decir, se prescinde del signo del número entero.

En efecto, decir que 18 es múltiplo de 3 supone la existencia de un número que multiplicado por 3 resulte 18:

$$18 = 6 \cdot 3 \qquad 18 = \dot{3}$$

En resumen, el conjunto de todos los múltiplos de un número *a*, es un conjunto de infinitos elementos, de la siguiente forma:

$$M(a) = \{\pm a, \pm 2a, \pm 3a, \pm 4a, ...\}$$

1.3. Divisor de un número

Dados los números enteros *a* y *b*, diremos que *a* divide a *b* o que *a* es *divisor* de *b*, si al realizar la división de *b* entre *a*, resulta una división exacta.

Según esto, y a modo de ejemplo, podemos calcular los divisores del número entero 15, para ello tenemos que buscar números enteros de manera que al dividir el número 15 por estos números, tenemos que obtener un cociente exacto. Los números 1, 3, 5 y 15 verifican esta condición, por tanto, todos los divisores del número 15 son: $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$.

Habitualmente, *a* divide a *b*, se escribe así a/b y quiere decir que, si *a* y *b* son números enteros, siempre existirá un número entero que al multiplicarlo por *a* resulte *b*. Es decir, si a/b implica que $b = a \cdot n$.

Recordando la definición de múltiplo podemos decir: si $a = \dot{b}$ implica que b/a.

Un ejemplo lo aclarará un poco más: Podemos decir que 18 es múltiplo de 3, pues $18 = 6 \cdot 3$, entonces 3 es un divisor de 18, porque $18 : 3 = 6$.

Resumiendo, dado un número entero *a*, por D(a) vamos a designar a todos los divisores de este número, este conjunto admite siempre los elementos ± 1 y $\pm a$ (llamados *divisores triviales*) y se puede escribir así:

$$D(a) = \{\pm 1, ..., \pm a\}$$

D(a) es un conjunto finito, pues un divisor de *a* siempre es inferior o igual a *a*.

Puede ocurrir que el conjunto de todos los divisores de *a* sea de la forma:

$$D(a) = \{\pm 1, \pm a\}$$

podemos decir, entonces, que *a* es un número primo. En cualquier otro caso, *a* es un número compuesto.

1.4. Propiedades de los múltiplos y los divisores

- En el conjunto Z de los números enteros definimos la siguiente relación binaria: «*a* divide a *b* si la división de *b* por *a* es exacta». Esto es:

$$\text{Si } a, b \in Z \qquad a/b \iff b = aq, \qquad q \in Z$$

podemos decir que *a* es un divisor de *b*, o que *b* es un múltiplo de *a* o que *b* es divisible por *a*.

Esta relación binaria definida en Z no es una relación de orden porque no verifica la propiedad antisimétrica. En efecto: la propiedad antisimétrica se enuncia:

$$\text{Si } a \in Z \text{ y } b \in Z \qquad a/b \text{ y } b/a \Rightarrow a = b$$

Vamos a demostrarlo:

$$\begin{matrix}\text{Si } a/b \Rightarrow b = aq \\ \text{Si } b/a \Rightarrow a = bq'\end{matrix} \qquad ba = abqq' \Rightarrow 1 = qq'$$

por tanto, $q = q' = \pm 1$, luego $a = \pm b$. Es decir, dos elementos que se dividen mutuamente no son necesariamente iguales. En consecuencia, no se cumple la propiedad antisimétrica.

- Si por un momento consideramos el conjunto *N* de los números naturales, la relación binaria que acabamos de definir, es decir, la relación binaria:

«*a* divide a *b* si la división de *b* por *a* es exacta»

esto es:

$$\text{«Si } a \in N \text{ y } b \in N \qquad a/b \iff b = a \cdot q, \qquad q \in N\text{»}$$

es una relación de orden, como se puede comprobar fácilmente:

1. *Reflexiva:* Para todo $a \in N$ a/a porque $a = a \cdot 1$.

2. *Antisimétrica:* Dos números naturales asociados por la relación de divisibilidad son necesariamente iguales.

$$\text{Si } a \in N \text{ y } b \in N \qquad a/b \text{ y } b/a \Rightarrow a = b$$

$$\begin{matrix}\text{Si } a/b \Rightarrow b = a \cdot q \\ \text{Si } b/a \Rightarrow a = b \cdot q'\end{matrix} \qquad ba = abqq'$$

$$1 = qq' \quad \text{luego } q = q' = 1 \Rightarrow a = b$$

3. *Transitiva:* Todo divisor de un número lo es de los múltiplos de éste:

$$\text{Si } a \in N,\ b \in N \text{ y } c \in N \qquad \begin{matrix}a/b \\ b/c\end{matrix} \Rightarrow a/c$$

En efecto:

$$\text{Si } a/b \Rightarrow b = aq$$
$$\text{Si } b/c \Rightarrow c = bq'$$

Sustituyendo la primera expresión en la segunda:

$$c = aqq' \Leftrightarrow a/c$$

Vemos que una misma relación binaria, en el conjunto de los números naturales es una relación de orden, mientras que en el conjunto de los números enteros no lo es.

- Todo número que divide a otros varios, divide a su suma:

$$m/a,\ m/b \text{ y } m/c \Rightarrow m/a + b + c$$

En efecto,

$$a = m \cdot n \qquad b = m \cdot p \qquad c = m \cdot q$$
$$a + b + c = m(n + p + q) \Leftrightarrow m/a + b + c$$

- Todo número que divide a otros dos, divide a su diferencia. Es inmediato comprobar:

$$m/a \text{ y } m/b \Rightarrow m/a - b \quad (a > b)$$

- Todo número que divide a otro, divide a los múltiplos de éste. Vamos a comprobarlo:

$$m/a \Rightarrow m/an$$

y

$$an = a + a + a + \ldots + a$$

Luego como m divide a cada uno de los sumandos, tiene que dividir a la suma.

1.5. Criterios de divisibilidad

Existen unas normas prácticas, de rápida aplicación, para determinar si un número es divisible por otro o no lo es, sin necesidad de realizar la correspondiente división. A estas normas se les suele llamar *criterios de divisibilidad,* algunas de las cuales vamos a enunciar brevemente a continuación, a modo de recordatorio, por considerarlas conocidas por todos.

— *Un número es divisible por 10 cuando termina en cero.*

— *Un número es divisible por 2 cuando termina en cero o en cifra par.* Así, los números 1.244 y 320 son divisibles por 2, el primero porque termina en 4 que es una cifra par y el segundo porque su cifra última es un cero.

— *Un número es divisible por 3 cuando la suma de sus cifras sea un múltiplo de 3.* Podemos asegurar que el número 153 es divisible por 3 porque sumando sus cifras 1 + 5 + 3 = 9 es un múltiplo de 3.

— *Un número es divisible por 5 cuando su última cifra es cero o cinco.* Es fácil de comprobar que los números 3.250 y 125 cumplen estas condiciones, siendo por tanto, divisibles por 5.

— *Un número es divisible por 11 cuando la suma de las cifras de lugar impar menos la suma de las cifras de lugar par sea cero o múltiplo de 11.* Asi el número 121 es divisible por 11 por que la suma de sus cifras impares 1 + 1 = 2 menos el de sus cifras pares (en este caso sale el número 2) es 2 − 2 = 0, es cero. Análogamente el número 123.607: suma cifras impares: 7 + 6 + 2 = 15. Suma cifras pares: 0 + 3 + 1 = 4. Su diferencia es 15 − 4 = 11, luego es divisible por 11.

1.6. Descomposición de un número compuesto en factores primos

Vamos a ver que todo número compuesto se puede descomponer de forma única en producto de factores primos. Sea *m* un número compuesto, por tanto, admitirá por lo menos un divisor, supongamos que *a* sea el divisor más pequeño de todos ellos, podemos escribir:

$$m = a \cdot n$$

Si *n* es un número primo ya hemos descompuesto *m*, en caso contrario *n* es un número compuesto, admitirá nuevos divisores, sea *b* el más pequeño de todos los divisores posibles:

$$n = b \cdot n'$$

luego

$$m = a \cdot n = a \cdot b \cdot n'$$

Es evidente que *n* y *n'* son números más pequeños que *m*, por tanto, la descomposición de *m* no será indefinida; repitiendo este proceso tantas veces como sea necesario se llega a expresar *m* de la siguiente manera:

$$m = a \cdot b \cdot c \ldots f$$

siendo a, b, c, ..., f números primos.

Repetimos el proceso que acabamos de exponer en un caso concreto. Supongamos que queremos descomponer el número 120 en factores primos.

El más pequeño de los divisores es el 2, luego

$$120 = 2 \cdot 60$$

el número 60 admite divisores, de todos los que admite el más pequeño es el 2

$$60 = 2 \cdot 30$$

análogamente con el número 30:

$$30 = 2 \cdot 15$$

El divisor más pequeño que admite el número 15 es el 3, por tanto:

$$15 = 3 \cdot 5$$

y ya hemos terminado, porque el número 5 es un número primo.

Recopilando todas las operaciones realizadas:

$$120 = 2 \cdot 60 = 2 \cdot (2 \cdot 30) = 2 \cdot 2 \cdot (2 \cdot 15) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

Normalmente, por comodidad, la descomposición en factores primos de un número se suele disponer de la siguiente manera:

120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

Hagamos un nuevo ejemplo, utilizando la disposición que acabamos de ver, la descomposición del número 250 en factores primos es:

250	2
125	5
25	5
5	5
1	

$250 = 2 \cdot 5^3$

1.7. Cálculo de todos los divisores de un número

Conocida la descomposición en factores primos de un número, es interesante averiguar todos los divisores de este número, para ello es necesario formar todos los productos posibles con sus factores primos.

Vamos a ver cómo puede realizarse este cálculo en un caso determinado. Calculamos todos los divisores del número 12.

En primer lugar, descomponemos este número en factores primos:

12	2
6	2
3	3
1	

es decir, $12 = 2^2 \cdot 3$

Para hallar todos los divisores del número 12, tenemos que realizar todos los posibles productos entre sus factores primos. Escribiendo la descomposición antes efectuada así:

$$12 = 1 \cdot 2^2 \cdot 3$$

tenemos:

$$1 \cdot 1 = 1 \qquad 1 \cdot 4 = 4$$
$$1 \cdot 3 = 3 \qquad 3 \cdot 2 = 6$$
$$1 \cdot 2 = 2 \qquad 3 \cdot 4 = 12$$

Por tanto, todos los divisores del número 12 son: 1, 2, 3, 4, 6 y 12.

Al obtener todos los divisores de un número es muy importante, como se puede suponer, no olvidarse de ningún producto. Si disponemos los productos en una tabla, como mostramos ahora, obtenemos ordenadamente todos los divisores de un número dado y no existe la posibilidad de olvidarnos de alguno de los productos a que antes hacíamos referencia.

En el caso anterior tendríamos:

	1	2^1	2^2
3	$1 \cdot 3$	$2 \cdot 3$	$2^2 \cdot 3$

luego

1	2	4
3	6	12

Consideremos otro ejemplo: Tratamos de calcular todos los divisores del número 36.

En primer lugar, efectuamos la descomposición en factores primos del número 36:

36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$

Recordando que esta descomposición la podemos escribir: $36 = 1 \cdot 2^2 \cdot 3^2$ construimos la tabla con todos los divisores, de la siguiente manera:

	1	2	2^2
3	$1 \cdot 3$	$2 \cdot 3$	$2^2 \cdot 3$
3^2	$1 \cdot 3^2$	$2 \cdot 3^2$	$2^2 \cdot 3^2$

es decir

1	2	4
3	6	12
9	18	36

Un último ejemplo. Queremos calcular ahora todos los divisores del número 600.

Efectuamos la descomposición en factores primos:

600	2
300	2
150	2
75	3
25	5
5	5
1	

$$600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$$

Todos los divisores aparecen en la tabla siguiente:

	1	2^1	2^2	2^3
3	$3 \cdot 1$	$2 \cdot 3$	$2^2 \cdot 3$	$2^3 \cdot 3$
5	$5 \cdot 1$ $5 \cdot 3 \cdot 1$	$5 \cdot 2$ $5 \cdot 2 \cdot 3$	$5 \cdot 2^2$ $5 \cdot 2^2 \cdot 3$	$5 \cdot 2^3$ $5 \cdot 2^3 \cdot 3$
5^2	$5^2 \cdot 1$ $5^2 \cdot 3$	$5^2 \cdot 2$ $5^2 \cdot 2 \cdot 3$	$5^2 \cdot 2^2$ $5^2 \cdot 2^2 \cdot 3$	$5^2 \cdot 2^3$ $5^2 \cdot 2^3 \cdot 3$

Efectuando estas operaciones, obtenemos en definitiva:

1	2	4	8
3	6	12	24
5	10	20	40
15	30	60	120
25	50	100	200
75	150	300	600

Conociendo la descomposición en factores primos de un número podemos averiguar el número de divisores que admite. Sea un número cualquera *m* cuya descomposición en factores primos es la siguiente:

$$m = a^{\alpha} \; b^{\beta} \; c^{\gamma} \; \ldots \; k^{\pi}$$

el número de divisores de *m* viene dado por el siguiente producto:

$$(\alpha + 1)\,(\beta + 1)\,(\gamma + 1) \ldots (\pi + 1)$$

Este resultado es demostrable, aunque no lo hacemos por no tener interés en el desarrollo que presentamos.

Para terminar este apartado, vamos a aplicar lo que acabamos de decir a los números 36 y 600 cuya descomposición en factores primos y cálculo de divisores ya hemos realizado:

$36 = 2^2 \cdot 3^2$ Número de divisores $= (2 + 1)\,(2 + 1) = 3 \cdot 3 = 9$

$600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$ Número de divisores $= (3 + 1)\,(1 + 1)\,(2 + 1) = 4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$

resultados fácilmente comprobados sin más que recurrir a las tablas de divisores obtenidas más arriba (*).

(*) El alumno habrá observado que, por comodidad, solamente hemos considerado los divisores positivos.

Ejercicios y problemas

1. Descomponer en factores primos los números: 324 y 630. Utilizando el procedimiento habitual obtenemos:

324	2
162	2
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

Luego: $324 = 2^2 \cdot 3^4$

630	2
315	3
105	3
35	5
7	7
1	

Luego: $630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

2. Hallar todos los divisores del número 504.

Descomponemos en factores primos, en primer lugar:

504	2
252	2
126	2
63	3
21	3
7	7
1	

por tanto: $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$

todos los divisores los encontramos en la siguiente tabla:

	1	2	4	8
3	3	6	12	24
3^2	9	18	36	72
7	7	14	28	56
	21	42	84	168
	63	126	252	504

Para saber el número de divisores del número 504, podemos anotar los números que aparecen en la tabla anterior o aplicar el procedimiento visto antes:

Número de divisores del número 504 $= (3 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

2. MAXIMO COMUN DIVISOR Y MINIMO COMUN MULTIPLO

2.1. Máximo común divisor de dos números

Sean *a* y *b* dos números enteros cualesquiera siendo D(a) y D(b) sus respectivos conjuntos de divisores. Los divisores comunes a *a* y *b* los designamos por D(a, b), este conjunto es la intersección de D(a) y D(b)

$$D(a, b) = D(a) \cap D(b)$$

El conjunto D(a, b) siempre es distinto del conjunto vacío, pues en el caso más desfavorable, *a* y *b* son números primos entre sí, hay un divisor común que es el número 1; en este caso, por tanto,

$$D(a, b) = \{1\}$$

luego, D(a, b) es un subconjunto finito del conjunto Z de los números enteros, que se puede ordenar según la relación $\leqslant$ (menor o igual), por tanto, tiene un elemento máximo que es el *máximo común divisor* de los números enteros *a* y *b*.

Aplicamos lo dicho, al cálculo del máximo común divisor de los números 28 y 36. Averiguamos, en primer lugar, los divisores de los números 28 y 36, siguiendo el procedimiento presentado en el apartado anterior:

$$D(28) = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$$
$$D(36) = \{1, 2, 4, 3, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

hallamos los elementos comunes a estos dos conjuntos, es decir, calculamos

$$D(28) \cap D(36)$$
$$D(28) \cap D(36) = \{1, 2, 4\}$$

Según lo visto, el máximo común divisor de los números 28 y 36 es el mayor de los elementos de este conjunto, es decir,

$$\text{m.c.d } (28, 36) = 4$$

Existe una regla de aplicación inmediata para calcular el máximo común divisor de dos números, consistente en descomponer en factores primos estos dos números, entonces el máximo común divisor viene dado por el producto de los factores comunes con los menores exponentes en que aparecen en la descomposición.

Vamos a comprobar que obtenemos el mismo resultado, aplicando esta regla al ejemplo anterior, a los números 28 y 36.

Efectuamos la descomposición en factores primos:

$$28 = 2^2 \cdot 7$$
$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$

luego, como el único factor común es el 2, y el menor exponente que aparece en ambos números es también 2, resulta:

$$\text{m.c.d } (28, 36) = 2^2 = 4$$

resultado equivalente al anterior.

Otro ejemplo, tratemos de averiguar el máximo común divisor de los números 36 y 120:

$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$
$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

En este caso, los factores comunes son 2 y 3, que tomamos con sus menores exponentes (para el primer factor es el 2 y para el segundo el 1), luego:

$$\text{m.c.d } (36, 120) = 2^2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12$$

Todo lo dicho para calcular el máximo común divisor de dos números es generalizable para tres, cuatro, o más números. Lo comprobamos a continuación: Queremos calcular el máximo común divisor de los números 18, 28, 36 y 40. Averiguamos en primer lugar todos los divisores de estos números:

$$D(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$
$$D(28) = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$$
$$D(36) = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$
$$D(40) = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$$

Calculamos los elementos comunes a estos cuatro conjuntos, es decir, los divisores comunes:

$$D(18) \cap D(28) \cap D(36) \cap D(40) = \{1, 2\}$$

el mayor elemento de este conjunto es el número 2, luego:

$$\text{m.c.d } (18, 28, 36, 40) = 2$$

Utilizando el otro procedimiento obtenemos el mismo resultado. Descomponemos, primero, en factores primos:

$$18 = 2 \cdot 3^2$$
$$28 = 2^2 \cdot 7$$
$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$
$$40 = 2^3 \cdot 5$$

el único factor común es el número 2, que tomamos con su menor exponente, por tanto:

$$\text{m.c.d } (18, 28, 36, 40) = 2$$

2.2. Mínimo común múltiplo de dos números

Sean *a* y *b* dos números enteros cualesquiera, designamos por M(a) y M(b) el conjunto de todos los múltiplos de *a* y *b* respectivamente. Ambos son conjuntos de infinitos elementos que tienen la siguiente forma:

$$M(a) = \{a, 2a, 3a, 4a, \ldots\}$$
$$M(b) = \{b, 2b, 3b, 4b, \ldots\}$$

El conjunto de los múltiplos comunes a *a* y *b* lo llamaremos M(a, b) y estará formado por todos los elementos comunes a M(a) y M(b), lo podemos averiguar efectuando la intersección de estos dos conjuntos:

$$M(a, b) = M(a) \cap M(b)$$

Este conjunto siempre es distinto del conjunto vacío

$$M(a, b) \neq \phi$$

es evidente, pues siempre contiene por lo menos el elemento a · b.

El conjunto M(a, b) es un subconjunto del conjunto de los números enteros, que está ordenado por la relación $\leqslant$ (menor o igual). Como consecuencia, tiene un elemento mínimo que es el *mínimo común múltiplo.*

Como aplicación calculamos el mínimo común múltiplo de los números 28 y 36. Averiguamos primeramente el conjunto de los múltiplos de 28 y 36:

$$M(28) = \{28, 56, 84, 112, 140, 168, 196, 224, 252, ..., 504, ..., 756, ...\}$$
$$M(36) = \{36, 72, 108, 144, 180, 216, 252, ..., 504, ..., 756, ...\}$$

A continuación hallamos el conjunto de los múltiplos comunes a 28 y 36, es decir,

$$M(28, 36) = M(28) \cap M(36) = \{252, 504, 657, ...\}$$

en el conjunto que acabamos de construir, podemos encontrar, sin dificultad, el elemento más pequeño, según lo visto, este número será el mínimo común múltiplo.

$$m.c.m.\ (28, 36) = 252$$

Al igual que hicimos en el apartado anterior, al estudiar el máximo común divisor, vamos a enunciar una regla que nos permita calcular el mínimo común múltiplo de dos números, para ello es suficiente, una vez descompuesto en factores primos éstos, averiguar el producto de los factores comunes y no comunes elevados a los mayores exponentes.

Utilizando este procedimiento, vamos a calcular el mínimo común múltiplo de los números 28 y 36. Su descomposición en factores primos es:

$$28 = 2^2 \cdot 7$$
$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$

escogiendo ahora los factores comunes y no comunes con los exponentes mayores tenemos:

$$m.c.m.\ (28, 36) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 252$$

Otro ejemplo, calculemos el mínimo común múltiplo de los números 360 y 2.100. Estos dos números descompuestos en factores primos se representan así:

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$
$$2.100 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$$

ahora tomamos los factores comunes y no comunes con los exponentes mayores, por tanto:

$$\text{m.c.m. } (360, 2.100) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 12.600$$

En el caso de que se trate de calcular el mínimo común múltiplo de más de dos números el procedimiento que utilizamos es semejante.

Se trata de calcular el mínimo común múltiplo de los números 24, 36 y 48. Averiguamos en primer lugar el conjunto de los múltiplos de estos números:

$$M(24) = \{24, 48, 72, 96, 120, 144, 168, 192, ...\}$$
$$M(36) = \{36, 72, 108, 144, 180, 216, 252, 288, ...\}$$
$$M(48) = \{48, 96, 144, 192, 240, 288, 336, 384, ...\}$$

el conjunto de todos los múltiplos comunes es:

$$M(24, 36, 48) = M(24) \cap M(36) \cap M(48) = \{144, ...\}$$

por tanto, el mínimo común múltiplo de estos tres números es:

$$\text{m.c.m. } (24, 36, 48) = 144$$

Utilizando el otro procedimiento, el resultado es el mismo. En efecto:

$$24 = 2^3 \cdot 3$$
$$36 = 2^2 \cdot 3^2 \qquad \text{m.c.m. } (24, 36, 48) = 2^4 \cdot 3^2 = 16 \cdot 9 = 144$$
$$48 = 2^4 \cdot 3$$

Ejercicios y problemas

1. Hallar el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los números 540 y 96.

Hacemos la descomposición en factores primos por el procedimiento ya conocido:

540	2	96	2
270	2	48	2
135	3	24	2
45	3	12	2
15	3	6	2
5	5	3	3
1		1	

luego:

$$540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$$
$$96 = 2^5 \cdot 3$$

por tanto:

$$\text{m.c.d. } (540, 96) = 2^2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12$$

$$\text{m.c.m. } (540, 96) = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 = 4.320$$

2. Hallar el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los números siguientes: 27, 81 y 729.

Descomponiendo en factores primos:

27	3
9	3
3	3
1	

81	3
27	3
9	3
3	3
1	

729	3
243	3
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

$$27 = 3^3$$
$$81 = 3^4$$
$$729 = 3^6$$

luego:

$$\text{m.c.d. } (27, 81, 729) = 3^3 = 27$$
$$\text{m.c.m. } (27, 81, 729) = 3^6 = 729$$

2.3. Relación entre el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de dos números

Dados dos números *a* y *b* llamemos al m.c.d. (a, b) = d y al m.c.m. (a, b) = D, siempre se verifica que:

$$D = \frac{a \cdot b}{d}$$

o sea, el mínimo común múltiplo de dos números es igual al producto de éstos dividido por el máximo común divisor de ambos.

Vamos a comprobarlo: Si *d* es el máximo común divisor de *a* y *b*, *d* es el mayor divisor de *a* y *b*, por tanto:

$$\frac{a}{d} = a' \qquad \frac{b}{d} = b'$$

de donde,

$$a = a' \cdot d \qquad b = b' \cdot d$$

El mínimo común múltiplo de *a* y *b* será el menor múltiplo de *a* y de *b*.

Un múltiplo de *a* es de la forma: $a' \cdot d \cdot n$

Un múltiplo de *b* es de la forma: $b' \cdot d \cdot n'$

Un múltiplo común de *a* y de *b*: $a' \cdot d \cdot n = b' \cdot d \cdot n'$

por tanto:

$$a' \cdot n = b' \cdot n'$$

b' es divisor de $a'n$ y como es primo con a' debe, por tanto, dividir a n, es decir, $n = b' \cdot k$.

Por tanto, los múltiplos comunes de *a* y de *b* serán de la forma: $a' \cdot d \cdot b' \cdot k$ y el menor será para $k = 1$, luego

$$\text{m.c.m. } (a, b) = D = a' \cdot d \cdot b'$$

pero $a' \cdot d = a$ y $b' d = b$, resulta en definitiva:

$$D = \frac{a \cdot b}{d}$$

Expresión fácilmente comprobable, sean los números 120 y 126. Su descomposición en factores primos es:

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$
$$126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$$

hallamos el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo:

$$\text{m.c.d. } (120, 126) = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\text{m.c.m. } (120, 126) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2.520$$

Sustituimos en:

$$D = \frac{a \cdot b}{d}$$

$$2.520 = \frac{120 \cdot 126}{6}$$

quedando de esta manera comprobada la expresión que deducimos al comenzar este apartado. Es evidente que dicha expresión se puede escribir también así:

$$D \cdot d = a \cdot b$$

NOTAS ACLARATORIAS Y COMPLEMENTARIAS

- Hemos visto que cuando se define una ley de composición interna en un conjunto, establecemos una aplicación entre cada pareja de elementos del mismo y otro elemento del conjunto. Pues bien, hemos visto que el máximo común divisor de dos números enteros es siempre un número entero. Podemos decir entonces que a dos números enteros cualesquiera *a* y *b*, siempre le podemos asociar otro número entero que es su máximo común divisor, *d*:

$$(a, b) \rightarrow d$$

de esta manera hemos definido una ley de composición interna en el conjunto Z de los números enteros.

Podemos expresarlo de la siguiente manera:

$$a \wedge b = d$$

con el símbolo $\wedge$ queremos representar la operación de realizar el máximo común divisor de *a* y *b*.

Verifica las siguientes propiedades:

- Idempotentes: $a \wedge a = a$.
- conmutativa: $a \wedge b = b \wedge a$
- Asociativa: $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$

- Lo mismo ocurre con el mínimo común múltiplo de dos números. Dados dos números enteros *a* y *b* cualesquiera, siempre les podemos asociar otro número entero que es su mínimo común múltiplo, *D*:

$$(a, b) \rightarrow D$$

Por tanto, en el conjunto Z de los números enteros hemos definido una ley de composición interna.

Esta ley de composición interna la podemos escribir así:

$$a \vee b = D$$

con el símbolo $\vee$ queremos representar la operación de realizar el mínimo común múltiplo de *a* y *b*.

Verifica las siguientes propiedades:

- Idempotente: $a \vee a = a$
- Conmutativa: $a \vee b = b \vee a$
- Asociativa: $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$

- El conjunto Z de los números enteros con las leyes de composición interna $\wedge$ y $\vee$ tiene estructura algebraica de retículo distributivo, porque verifica además las dos propiedades siguientes:

- Simplificativa $(a \wedge b) \vee a = a$ $\quad (a \vee b) \wedge a = a$
- Distributiva $(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$
  $(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$

CONCLUSIONES TEMA XI

MULTIPLO DE UN NUMERO	Si *a* es un número entero cualquiera al multiplicarlo por cualquier número entero se obtiene un múltiplo de *a*. El conjunto de los múltiplos de un número *a* es infinito y tiene la siguiente forma: $M(a) = \{\pm a, \pm 2a, \pm 3a, ...\}$
DIVISOR DE UN NUMERO	Siendo *a* y *b* números enteros diremos que *a* es divisor de *b*, si al realizar la división de *b* entre *a* es una división exacta. El conjunto de los divisores de un número *a* es siempre finito. $D(a) = \{\pm 1, ..., \pm a\}$ Un divisor de *a* siempre es igual o inferior de *a*. Si $D(a) = \{\pm 1, \pm a\}$ entonces *a* es un número primo, en los demás casos es un número compuesto.
CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD	— Un número es divisible por 10 cuando termina en cero. — Un número es divisible por 2 cuando termina en cero o cifra par. — Un número es divisible por 3 cuando la suma de sus cifras es múltiplo de 3. — Un número es divisible por 5 cuando su última cifra es cero ó 5.

DESCOMPOSICION EN FACTORES PRIMOS	Todo número se puede descomponer de la siguiente forma: $m = a^{\alpha}\ b^{\beta}\ c^{\gamma}\ \ldots\ k^{\eta}$ donde a, b, c, ..., k son números primos.
NUMERO DE DIVISORES DE UN NUMERO	$(\alpha + 1)\,(\beta + 1)\,(\gamma + 1) \ldots (\eta + 1)$
MAXIMO COMUN DIVISOR	El m.c.d. de dos números o más es el mayor de los divisores comunes.
MINIMO COMUN MULTIPLO	El m.c.m. de dos o más números es el menor de los múltiplos comunes.

EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. Dados los números 6, 9, 15 y 21. Averiguar todos los números de los que los dados son múltiplos.

2. Calcular los divisores de los siguientes números: 12, 18, 35, 42.

3. Aplicando los criterios de divisibilidad decir si los siguientes números son divisibles por 2, 3, 5, 9:

   1.234, 1.320, 1.836, 1.525

4. Aplicando la definición de m.c.d. y m.c.m. calcularlos para los números:
   a) 15 y 35.
   b) 12 y 21.

5. Calcular el m.c.d. y el m.c.m. de:
   a) 21, 32 y 42.
   b) 27, 105 y 81.

6. Calcular dos números sabiendo que su máximo común divisor es 6 y su m.c.m. es 84.

7. Si ponemos nuestros libros de 3 en 3, de 7 en 7, y de 15 en 15, sabemos que no sobra ninguno. ¿Cuál es el menor número de libros que podemos tener?

8. Dados los siguientes pares de números:(21, 49),(45, 48),(12, 35).Razonar cuáles son primos entre sí.

9. Escribir cinco múltiplos comunes a 30 y 24

10. Sin necesidad de calcular los divisores de 18 y 24. Escribir todos los divisores comunes a ambos.

11. Escribir un número de cuatro cifras que sea divisible por 2, 9, 4 y 11.

12. Demostrar que si un número no es divisible por 3, su cuadrado es un múltiplo de tres más uno.

13. Calcular un número que dividido por 2, por 3, por 4 y por 9 dé de resto 1.

14. Una plancha de 24 × 32 cm se quiere dividir en cuadrados iguales. ¿Cuál es el número mínimo de cuadrados que se pueden hacer?

15. Calcular dos números sabiendo que su m.c.d. es 8 y su cociente es 3/4.

16. Calcular todos los números comprendidos entre 200 y 400 que al dividirlos por 3, por 5 y por 7, den de resto 2.

17. Calcular el número de divisores de 60 y 90.

18. Calcualr el m.c.d. y m.c.m. de los números: 384 y 1.024.

19. Tenemos dos cuerdas de 20 y 8 metros de largo. ¿Cómo las dividiremos de modo que los trozos de una sean de igual longitud que los de la otra y lo más largos posibles?

20. Al m.c.m. (144, 40) le vamos a llamar A. Comprobar que el m.c.m. (A, 36) es igual que el m.c.m. (144, 40, 36).

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. Si un número *a* es múltiplo de *b* deducimos que *b* es divisor de *a*. Por tanto calculamos los divisores de los números dados:

$6 = 2 \cdot 3$ divisores

	1	2
3	$1 \cdot 3$	$2 \cdot 3$

luego divisores 1, 2, 3, 6

Por tanto, 6 es múltiplo de 1, de 2, de 3, y de 6.

Haciendo lo mismo con los demás obtenemos:

$9 = 3^2$ múltiplo de 1, de 3, de 9
$15 = 3 \cdot 5$ múltiplo de 1, de 3, de 5, de 15
$21 = 3 \cdot 7$ múltiplo de 1, de 3, de 7, de 21

2. Descomponemos en factores:

$12 = 2^2 \cdot 3$ Divisores de 12

	1	2	4
3	$1 \cdot 3$	$2 \cdot 3$	$4 \cdot 3$

1 2 4
3 6 12

$18 = 2 \cdot 3^2$ Divisores de 18

	1	2
3	$1 \cdot 3$	$2 \cdot 3$
3^2	$1 \cdot 9$	$2 \cdot 9$

1 2
3 6
9 18

$35 = 5 \cdot 7$ Divisores de 35: 1, 5, 7, 35

$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ Divisores de 42

	1	2	1	2
3	3	6	3	6
7	7	14	7	14
	21	42	21	42

3. 1.234 es divisible por 2 por terminar en cifra par

   1.320 por 2 por terminar en cifra par
   por 3 ya que la suma de sus cifras es $6 = \dot{3}$
   por 5 por terminar en cero.

   1.836 por 2 por terminar en cifra par
   por 3 ya que la suma de sus cifras es $18 = \dot{3}$
   por 9 ya que la suma de sus cifras es $18 = \dot{9}$

   1.525 por 5 por terminar en 5.

4. Divisores de 15 = {1, 3, 5, 15}
   Divisores de 35 = {1, 5, 7, 35}

   $D(15) \cap D(35) = \{1, 5\}$
   m.c.d. (15, 35) = 5

   Divisores de 12 = {1, 2, 3, 4, 6, 12}
   Divisores de 21 = {1, 3, 7, 21}

   $D(12) \cap D(21) = \{1, 3\}$
   m.c.d. (12, 21) = 3

   múltiplo de 15 = {15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, ...}
   múltiplo de 35 = {35, 70, 105, ...}
   múltiplo de 12 = {12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, ...}
   múltiplo de 21 = {21, 42, 63, 84, ...}

   m.c.m. (15, 35) = 105

   m.c.m. (12, 21) = 84

5. $21 = 3 \cdot 7$
   $32 = 2^5$
   $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$

   m.c.d. (21, 32, 42) = 1
   m.c.m. (21, 32, 42) $= 2^5 \cdot 3 \cdot 7 = 672$

   $27 = 3^3$
   $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$
   $81 = 3^4$

   m.c.d. (27, 105, 81) = 3
   m.c.m. (27, 105, 81) $= 3^4 \cdot 5 \cdot 7 = 2.835$

6. m.c.d. (a, b) · m.c.m. (a, b) = a · b

$$a \cdot b = 6 \cdot 84 = 504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$$

como el m.c.d. $= 6 = 2 \cdot 3$, este factor ha de estar en ambos números.

Posibles soluciones:

$a = 2 \cdot 3$	$b = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$	$a = 6$	$84 = b$
$a = 2^2 \cdot 3$	$b = 2 \cdot 3 \cdot 7$	$a = 12$	$42 = b$

7. Ha de ser el menor múltiplo común a los tres números, por tanto será el m.c.m.

$$\text{m.c.m. } (3, 7, 15) = 105$$

8. Para que sean primos entre sí su m.c.d. ha de ser 1

$$\text{m.c.d. } (21, 49) = 7$$
$$\text{m.c.d. } (45, 48) = 3$$
$$\text{m.c.d. } (12, 35) = 1$$

Por tanto, 12 y 35 son primos entre sí.

9. Calculemos el m.c.m.

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$
$$24 = 2^3 \cdot 3 \qquad \text{m.c.m. } (24, 30) = 120$$

Por tanto, los múltiplos comunes serán múltiplos del m.c.m.

$$120, \quad 120 \times 2 = 240, \quad 120 \times 3 = 360, \quad 120 \times 4 = 480, \quad 120 \times 5 = 600$$

10. Calculemos el m.c.d.

$$18 = 2 \cdot 3^2$$
$$24 = 2^3 \cdot 3 \qquad \text{m.c.d. } (18, 24) = 6$$

Sus divisores comunes serán los del m.c.d., por tanto: 1, 2, 3, 6.

11. El número tiene que tener los divisores 2, 9, 4 y 11, por tanto en la descomposición si llamamos al número x se verificará:

$$x = 2 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 11 \cdot n \qquad \text{como} \qquad 2 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 11 = 792$$

necesitamos dar algún valor a n, por ejemplo 11, y obtenemos:

$$x = 2 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 11 \cdot 11 = 8.712$$

12. Al no ser divisible por 3, el número tendrá que ser de la forma:

$$\dot{3} + 1 \qquad \text{o} \qquad \dot{3} + 2$$

Si elevamos al cuadrado, obtendremos:

$$(\dot{3} + 1)^2 = \dot{3}^2 + 2 \cdot \dot{3} \cdot 1 + 1 = \dot{3} + 1$$

$$(\dot{3} + 2)^2 = \dot{3}^2 + 2 \cdot \dot{3} \cdot 2 + 4 = \dot{3}^2 + 2 \cdot \dot{3} \cdot 2 + (3 + 1) = \dot{3} + 1$$

13. Sea el número que queremos encontrar x

Si al dividirlo por 2 da de resto 1 quiere decir que $x = \dot{2} + 1$
Si al dividirlo por 3 da de resto 1 quiere decir que $x = \dot{3} + 1$

Por la misma razón:

$$x = \dot{4} + 1$$
$$x = \dot{9} + 1$$

Por tanto, $x - 1$ ha de ser múltiplo de 2, 3, 4 y 9 y, por tanto, el m.c.m.

$$\text{m.c.m } (2, 3, 4, 9) = 36$$
$$x - 1 = 36 \qquad \text{Luego el número sería } 37$$

14. Calculemos el m.c.d. (24, 32) = 8

Luego, se pueden hacer cuadrados de lado 8 cm.

Por tanto,

$$\frac{24}{8} = 3 \qquad \frac{32}{8} = 4$$

Por tanto $3 \times 4 = 12$ cuadrados de 8 cm de lado.

15. $a = a' \cdot \text{m.c.d.}$
$b = b' \cdot \text{m.c.d.}$ $\qquad a'$ y b' son primos entre si

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{3}{4} \qquad a' = 3 \qquad \text{Luego} \quad a = 3 \times 8 = 24$$
$$b' = 4 \qquad\qquad\quad b = 4 \times 8 = 32$$

Los números son, por tanto, 24 y 32.

16. Calculemos el m.c.m. (3, 5, 7) = 105

Sea el número X, verificará que:

$$X - 2 = \dot{3}$$
$$X - 2 = \dot{5} \qquad \text{por tanto, } X - 2 = \dot{105}$$
$$X - 2 = \dot{7}$$

Calculemos ahora todos los múltiplos de 105 comprendidos entre 200 y 400, que son:

$$105 \times 2 = 210 \qquad \text{por tanto} \qquad X = 210 + 2 = 212$$
$$105 \times 3 = 315 \qquad\qquad\qquad\quad X = 315 + 2 = 317$$

Por tanto los números pedidos son 212 y 317.

17. $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

divisores de 60 $(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 12$
divisores de 90 $(1 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 12$

divisores de 60:

	1	2	2^2
3	$1 \cdot 3$	$2 \cdot 3$	$2^2 \cdot 3$
5	$1 \cdot 5$	$2 \cdot 5$	$2^2 \cdot 5$
	$3 \cdot 5$	$6 \cdot 5$	$2^2 \cdot 3 \cdot 5$

1	2	4
3	6	12
5	10	20
15	30	60

divisores de 90:

	1	2
3	$1 \cdot 3$	$2 \cdot 3$
3^2	$1 \cdot 3^2$	$2 \cdot 3^2$
5	$1 \cdot 5$	$2 \cdot 5$
	$3 \cdot 5$	$6 \cdot 5$
	$9 \cdot 5$	$18 \cdot 5$

luego

1	2
3	6
9	18
5	10
15	30
45	90

18. $384 = 2^7 \cdot 3$
$1.024 = 2^{10}$

m.c.d. $(384, 1.024) = 2^7 = 128$

m.c.m. $(384, 1.024) = 2^{10} \cdot 3 = 3.072$

19. Calculemos el m.c.d. $(20, 8) = 4$

Por tanto, los trozos han de ser de 4 metros.

20. $144 = 2^4 \cdot 3^2$
$40 = 2^3 \cdot 5$
$36 = 2^2 \cdot 3^2$

m.c.m. $(144, 40, 36) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$

m.c.m. $(144, 40) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$

m.c.m. $(720, 36) = 720$

TEMA XII

EL NUMERO RACIONAL

ESQUEMA/RESUMEN

1. Necesidad de ampliar los números enteros.

2. Construcción del conjunto de los números racionales.

   2.1. Pares ordenados de números enteros.
   2.2. Relación de equivalencia definida sobre $Z \times Z^*$.
   2.3. El número racional.
   2.4. Representantes canónicos de los números racionales.

3. Operaciones con los números racionales.

   3.1. Suma de números racionales.
   3.2. Propiedades de la suma de números racionales.
   3.3. Producto de números racionales.
   3.4. Propiedades del producto de números racionales.

4. Estructura algebraica del conjunto de los números racionales.

5. Isomorfismo entre Z y Q.

6. Ordenación en el conjunto de los números racionales.

INSTRUCCIONES PARA EL ESTUDIO DEL TEMA

En un principio es muy importante comprender que ante la imposibilidad de realizar ciertas operaciones con los números enteros, es necesario ampliar el concepto de número, construyendo el conjunto de los *números racionales*.

Hemos expuesto con sumo detalle el proceso de construcción de los números racionales a partir de los números enteros, poniendo de manifiesto su analogía con el proceso utilizado en el tema anterior, para construir los números enteros. Es muy importante dedicar todo el tiempo necesario a entender perfectamente esta parte del tema, por ser unas construcciones muy importantes matemáticamente, en primer lugar, y, después, porque con la utilización de una serie de conceptos vistos en la primera Unidad Didáctica se puede recordar lo ya estudiado.

En la segunda parte del tema nos preocupamos de definir en el conjunto de los números racionales dos leyes de composición y estudiar sus propiedades. Todas las propiedades son demostradas con sumo detalle, tratando de que el alumno pueda seguir las mismas sin perderse. Es importante familiarizarse con los razonamientos expuestos para poderlos aplicar posteriormente en los Ejercicios de autocomprobación.

Finalmente, estudiamos la estructura algebraica que adquiere el conjunto de los números racionales de acuerdo con las operaciones definidas y nos preocupamos de familiarizar al alumno, aunque de una manera intuitiva, con la ordenación de los números racionales.

Queremos insistir una vez más en la importancia que tiene, para la formación matemática del alumno, entender perfectamente el proceso lógico expuesto al construir los números racionales.

1. NECESIDAD DE AMPLIAR LOS NUMEROS ENTEROS

En el tema anterior hemos definido el conjunto Z de los números enteros:

$$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}$$

En este conjunto Z hemos definido unas leyes de composición interna u operaciones que llamamos suma y producto de números enteros. No hace falta recordar que al sumar dos números enteros obteníamos otro número entero. Estas operaciones dotan a Z de una estructura algebraica que, también, hemos descrito.

Recordamos una vez más que los números enteros han aparecido, porque con los números naturales no podríamos realizar cierta operación, concretamente no podríamos restar números naturales.

Vamos a realizar un planteamiento semejante con los números enteros.

Repasamos con unos ejemplos las operaciones con los números enteros:

Suma. Dados dos números enteros siempre se pueden sumar obteniendo otro número entero. Por ejemplo:

$$(12, 3) + (9, 0) = (21, 3) = (18, 0) \rightarrow +18$$

o si se prefiere:

$$9 + 9 = +18$$

Resta. Esta operación siempre es posible, basta recordar que todos los números enteros respecto a la suma tienen elemento simétrico (suele llamarse

elemento opuesto). Esto supone que restar dos números enteros es lo mismo ue sumar al primero el opuesto del segundo. Por ejemplo:

$$(2, 3) - (7, 5) = (2, 3) + (5, 7) = (7, 10) = (0, 3) \rightarrow -3$$

de otra manera:

$$(-1) - (+2) = -1 - 2 = -3$$

Producto. El producto de dos números enteros siempre es un número entero.

$$(8, 4) \cdot (6, 1) = (52, 32) = (20, 0) \rightarrow +20$$

o también:

$$(+4) \cdot (+5) = +20$$

Cociente. Para dividir dos números enteros basta multiplicar el dividendo por el elemento simétrico (se suele llamar elemento inverso) del divisor. Por tanto, no siempre se puede realizar el cociente de dos números, puesto que, respecto al producto los números enteros no tienen elemento inverso, en general. Dos ejemplos nos ayudarán a entender ésto.

Ejemplo 1. ¿Podemos dividir 18 entre 2? En efecto, los números 18 y 2 son enteros, siempre se puede encontrar un número entero que multiplicado por 2 resulte el número 18. Es fácil ver que:

$$18 : 2 = 18 \cdot \frac{1}{2} = 9$$

por tanto, en este caso, el cociente entre los números enteros 18 y 2 es otro número entero, 9.

Ejemplo 2. ¿Cuál es el cociente entre los números enteros 5 y 2 (*).

En este caso no podemos encontrar un número entero que multiplicado por 2 resulte el número 5. Luego la división entre dos números enteros no puede realizarse.

A la vista de estos dos ejemplos podemos decir que el cociente entre dos números enteros solamente puede realizarse cuando el primer número (se le llama también numerador o dividendo) es múltiplo del segundo número (denominador o divisor). En los casos restantes dados dos números enteros no podemos obtener otro número entero que sea el cociente de los dos números primeros.

De esta manera surge la necesidad de ampliar el concepto de número entero que hemos manejado hasta ahora, pero antes, vamos a recopilar todo lo dicho en este apartado de la siguiente manera:

(*) Para mayor comodidad vamos a utilizar el isomorfismo definido en el tema anterior

$$(a, 0) \rightarrow +a$$
$$(0, b) \rightarrow -b$$

en la seguridad de que el alumno entiende perfectamente el significado de este isomorfismo.

Si tenemos que determinar x en la expresión b x = a, de forma que *x* sea un número entero, suponiendo que *a* y *b* también lo son, nos encontramos que solamente es posible cuando existe cociente exacto de *a* entre *b*, que suele expresarse así:

$$x = \frac{a}{b}$$

Es evidente la existencia de muchos cocientes que representan al número entero *x*. Son todos aquellos que satisfacen la condición

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \qquad a\,b' = a'\,b$$

Si no existe cociente exacto de *a* entre *b*, $\frac{a}{b}$ carece de sentido en el anillo Z.

Siguiendo un razonamiento semejante al presentado en el campo de los números enteros, creamos unos nuevos números a/b, enunciados en este orden con la condición de igualdad $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ de manera que b sea siempre distinto de 0; de este modo la expresión

$$b\,x = a$$

siempre tiene solución.

Tenemos una vez más un par de números enteros ordenados, al primero le llamamos numerador y al segundo denominador. Según lo dicho antes, el numerador puede ser un elemento cualquiera de Z, mientras que el denominador puede ser cualquier número entero distinto de cero, cualquier elemento de $Z - \{0\} = Z^*$.

$$a \in Z,\ b \in Z^* = Z - \{0\}$$

Por tanto, a/b es una fracción y puede considerarse como un elemento del conjunto producto $Z \times Z^*$.

Ejemplos, de fracciones son:

$$\frac{1}{2},\ \frac{3}{5},\ \frac{7}{2},\ \frac{4}{7},\ \frac{2}{8},\ \frac{2}{4},\ \frac{-3}{5},\ \frac{-2}{9},$$

siendo $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ porque $1 \cdot 4 = 2 \cdot 2$, serían dos fracciones equivalentes.

2. CONSTRUCCION DEL CONJUNTO DE LOS NUMEROS RACIONALES

Vamos a construir a partir del conjunto de los números enteros un nuevo conjunto que llamaremos conjunto de los números racionales. Para ello construiremos un conjunto formado por pares ordenados de números enteros. Sobre este conjunto definimos, después, una relación de equivalencia que nos permite considerar un conjunto cociente que, como veremos, coincide con el conjunto de los números racionales. Los elementos de este conjunto son clases de equivalencia, cada una de estas clases de equivalencia representa a un *número racional*.

2.1. Pares ordenados de números enteros

Hace un momento hemos visto la posibilidad de que una pareja ordenada de números enteros represente perfectamente el cociente de dos números enteros.

Matemáticamente sabemos que los pares ordenados de elementos los podemos obtener a partir del conjunto producto de dos conjuntos, en el caso que nos ocupa, estos pares ordenados serán elementos del conjunto producto $Z \times Z$; pero hay que tener presente que el segundo elemento de estos pares ordenados ha de ser distinto de cero, por tanto, es inexacto considerar el conjunto producto $Z \times Z$, lo correcto es considerar el conjunto producto $Z \times Z^*$, donde Z es el conjunto de los números enteros y Z^* es el conjunto de los números enteros menos el cero:

$$Z^* = Z - \{0\}$$

Por ejemplo, las parejas o pares ordenados

$$(2, 3)\ (7, 2)\ (4, 3)\ (-5, 6)\ (-3, 4)\ \ldots$$

son elementos del conjunto $Z \times Z^*$. Los elementos de cada una de estas parejas son números enteros y forman parte de dicha pareja en un orden determinado.

2.2. Relación de equivalencia definida sobre $Z \times Z^*$

En el conjunto $Z \times Z^*$ definimos la siguiente relación binaria que más adelante comprobaremos; es una relación de equivalencia:

$$\text{«Si } (a, b) \in Z \times Z^*\ ,\quad (a', b') \in Z \times Z^*\quad (a, b) = (a', b') \Longleftrightarrow a \cdot b' = a' \cdot b\text{»}$$

Según esta relación binaria, las parejas (3, 5) y (6, 10) pertenecientes a $Z \times Z^*$ están relacionadas, pues:

$$3 \cdot 10 = 5 \cdot 6$$

Por el contrario, los pares ordenados (1, 2) y (7, 4), pertenecientes también a $Z \times Z^*$, no están relacionados, puesto que:

$$1 \cdot 4 \neq 7 \cdot 2$$

Demostraremos a continuación que la relación binaria enunciada al comenzar este apartado es una relación de equivalencia; para ello es necesario comprobar que verifica las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva:

- *Reflexiva.* $(a, b) = (a, b)$
  En efecto: $a \cdot b = a \cdot b$

- *Simétrica.* Si $(a \cdot b) = (c \cdot d) \Rightarrow (c \cdot d) = (a \cdot b)$
  Porque $a \cdot d = c \cdot b\ ,\ c \cdot b = a \cdot d\ ,\ (c \cdot d) = (a \cdot b)$ como queríamos demostrar.

- *Transitiva.* Si $\begin{matrix}(a, b) = (c, d) \\ (c, d) = (e, f)\end{matrix} \Rightarrow (a, b) = (e, f)$

puesto que: $(a, b) = (c, d) \Rightarrow a \cdot d = c \cdot b$
$(c, d) = (e, f) \Rightarrow c \cdot f = e \cdot d$

Multiplicando miembro a miembro:

$$a \cdot d \cdot c \cdot f = c \cdot b \cdot e \cdot d$$

$$a \cdot f = b \cdot e = e \cdot b \Leftrightarrow (a \cdot b) = (e \cdot f)$$

como queríamos demostrar.

Ejercicios y ejemplos

1. Sobre el conjunto $Z \times Z^*$ hemos definido una relación de equivalencia, que podemos expresar así:

«Si $(a, b) \in Z \times Z^*$ y $(c, d) \in Z \times Z^*$
$(a \cdot b)\ R\ (c \cdot d)$ si $a \cdot d = b \cdot c$»

Esquemáticamente:

$(a, b)\ R\ (c, d)$

dos parejas están relacionadas si el producto de los extremos de la flecha coinciden.

Por ejemplo, los pares ordenados (1, 2) y (3, 6) están relacionados

$(1, 2)\ R\ (3, 6)$

puesto que, $1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$

Es muy importante que el alumno lector comprenda que se trata de la misma relación binaria, fácil de recordar por medio del esquema (*).

2. De las siguientes parejas:

(1, 2) (3, 4) (3, 6) (4, 3) (8, 6) (6,8)

¿Cuáles están relacionadas?

Es fácil de comprobar con el último esquema presentado:

$(1, 2)\ R\ (3, 6)$ $1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$ si están relacionadas

$(3, 4)\ R\ (6, 8)$ $3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$ si están relacionadas

(*) El mismo esquema se utilizó en el estudio de los números enteros. Aconsejamos que el alumno lo compruebe y trate de verificar que es una relación de equivalencia utilizando este esquema.

$(4, 3)\ R\ (8, 6)$ $\quad 4 \cdot 6 = 3 \cdot 8$ si están relacionadas

3. Encontrar varios pares ordenados relacionados con la pareja (6, 3)

Para encontrar parejas relacionadas con una dada, basta multiplicar o dividir los dos elementos de ella por un mismo número (es un procedimiento práctico que conviene recordar).

Si multiplicamos por 2 obtendremos la pareja (12, 6). Comprobamos esta relación con la dada:

$(6, 3)\ R\ (12, 6)$ $\quad$ pues $6 \cdot 6 = 12 \cdot 3$

multiplicaremos por 3 y obtendremos (18, 9), efectivamente:

$(6, 3)\ R\ (18, 9)$ $\quad$ ya que $9 \cdot 6 = 18 \cdot 3$

dividiremos ahora por 3 y obtendremos (2, 1), efectivamente:

$(6, 3)\ R\ (2, 1)$ $\quad$ ya que $6 \cdot 1 = 3 \cdot 2 = 6$

4. Completar los pares ordenados siguientes:

$(3, 2)\ R\ (9, \square)$ $\qquad (2, 1)\ R\ (\square, 4)$ $\qquad (9, 6)\ R\ (3, \square)$

Acabamos de ver que un procedimiento para obtener pares relacionados o equivalentes a uno dado, es multiplicar o dividir ambos componentes del par por un mismo número. En este ejercicio quiere decir que si los pares están relacionados, uno de ellos ha resultado de multiplicar el otro por un número, averiguaremos cuál es este número y encontraremos el que falta.

$(3, 2)\ R\ (9, \square)$ Para obtener 9 basta multiplicar 3 por 3, por tanto $3 \cdot 2 = 6$, es decir,

$(3, 2)\ R\ (9, 6)$ $\qquad 3 \cdot 6 = 2 \cdot 9 = 18$

$(2, 1)\ R\ (\square, 4)$ Análogamente, multiplicando por 4: $4 \cdot 2 = 8$. Efectivamente:

$(2, 1)\ R\ (8, 4)$ $\qquad 4 \cdot 2 = 8 \cdot 1$

$(9, 6)\ R\ (3, \square)$ Para obtener 3 basta dividir el primero por 3, luego $6 : 3 = 2$. En efecto:

$(9, 6)\ R (3, 2)$ $\qquad 9 \cdot 2 = 6 \cdot 3$

2.3. El número racional

Acabamos de definir sobre el conjunto $Z \times Z^*$ la siguiente relación binaria R:

«Si $(a, b) \in Z \times Z^*$ y $(a', b') \in Z \times Z^*$ $(a, b) = (a', b') \iff a \cdot b' = a' \cdot b$»

y hemos demostrado que es una relación de equivalencia. Por tanto, podemos considerar el conjunto cociente definido por la relación R en el conjunto $Z \times Z^*$, conjunto cociente que representaremos por

$$\frac{Z \times Z^*}{R}$$

a este conjunto le llamaremos *conjunto de los números racionales* y le representaremos por Q:

$$Q = \frac{Z \times Z^*}{R}$$

Como Q es un conjunto cociente, los elementos de Q son las clases de equivalencia en que queda dividido el conjunto $Z \times Z^*$ según la relación de equivalencia R antes definida. A cada una de estas clases de equivalencia la llamaremos *número racional.*

El número racional, por tanto, viene definido por uno cualquiera de los representantes de su clase, o sea, por una pareja ordenada de números enteros, dados en un orden determinado, siendo el segundo de ellos distinto de cero.

Habitualmente se acostumbra a escribir los números racionales en forma de fracción (así lo hemos expresado en el apartado 1 de este tema). Al primer elemento del par ordenado, que se escribe encima de una línea horizontal, se le llama numerador, y el segundo elemento se denomina denominador, que se sitúa debajo de la línea. En consecuencia, la pareja (a, b) la escribiremos en lo sucesivo $\frac{a}{b}$

Algunos ejemplos nos ayudarán a familiarizarnos con los números racionales:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}, \ldots\ldots$$

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \frac{5}{15}, \frac{6}{18}, \ldots\ldots$$

$$\frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \frac{3}{12}, \frac{4}{16}, \frac{5}{20}, \frac{6}{24}, \ldots\ldots$$

$$\frac{1}{5}, \frac{2}{10}, \frac{3}{15}, \frac{4}{20}, \frac{5}{25}, \frac{6}{30}, \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{-1}{6}, \frac{-2}{12}, \frac{-3}{18}, \frac{-4}{24}, \frac{-6}{36}, \frac{-7}{42}, \ldots\ldots$$

Los números racionales que aparecen en una misma fila horizontal son equivalentes entre sí, representan el mismo número racional, o si se prefiere cada una de las filas que hemos escrito representan una clase de equivalencia, del conjunto Q. Decimos ahora, lo mismo que en el caso de los números enteros, el número de clases de equivalencia es infinito, puesto que la serie de los números racionales lo es. Por supuesto, cada una de las clases de equivalencia tiene infinitas fracciones equivalentes entre sí.

2.4. Representantes canónicos de los números racionales

Por comodidad, siempre expresaremos los números racionales, de la forma más sencilla posible, a estos representantes se les denomina *canónicos* y en definitiva, es un n.º racional cuyo numerador y denominador son

números primos entre sí. A este respecto conviene recordar tres ideas conocidas, suponemos, por todos los alumnos:

* Los dos términos de un número racional, se pueden multiplicar o dividir por un mismo número. Obteniendo otro número racional equivalente

$$\left.\begin{aligned}\frac{a}{b} &= \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \\ \frac{a}{b} &= \frac{a : n}{b : n}\end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} a \cdot b \cdot n &= a \cdot n \cdot b \\ a \cdot (b : n) &= (a : n) \cdot b\end{aligned}$$

* Todo número racional puede ser considerado con representantes con denominador positivo.

$$\frac{a}{-n} = \frac{(-1)\,a}{(-1)\,(-n)} = \frac{-a}{n}$$

* Dados dos números racionales siempre pueden tener unos representantes con el mismo denominador.

Sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes a $\frac{a}{b} = \frac{a\,d}{b\,d}$ y $\frac{c}{d} = \frac{c\,b}{d\,b}$

Esta operación se conoce como: reducir a común denominador

* Para obtener la forma canónica de un número racional, basta con simplificar dicha fracción dividiendo ambos términos por el máximo común divisor de los mismos.

Dos ejemplos para terminar este apartado:

— El número racional $\frac{1}{2}$ está representado por una fracción irreducible: los números 1 y 2 son primos entre sí.

— Dada la fracción $\frac{3}{9}$ podemos averiguar su fracción irreducible sin más que dividir el numerador y denominador por 3:

$$\frac{3}{9} = \frac{3 : 3}{9 : 3} = \frac{1}{3}$$

Es evidente que los números racionales $\frac{3}{9}$ y $\frac{1}{3}$ son equivalentes. Dejamos su comprobación como ejercicio para el alumno.

Ejercicios y problemas

1. Escribir las clases de equivalencia que definan a los números racionales:

$$-\frac{3}{2}\ ,\ 2,\ \frac{1}{3}$$

$-\frac{3}{2}$ es la fracción irreducible, luego para encontrar la clase de equivalencia basta multiplicar numerador y denominador por distintos números enteros:

$$-\frac{3}{2}\ ,\ -\frac{6}{4}\ ,\ -\frac{9}{6}\ ,\ -\frac{12}{8}\ ,\ -\frac{15}{10}\ \ldots$$

2 es lo mismo que $\frac{2}{1}$, que es una fracción irreducible. Siguiendo el mismo procedimiento:

$$\frac{2}{1}\ ,\ \frac{4}{2}\ ,\ \frac{6}{3}\ ,\ \frac{8}{4}\ ,\ \frac{10}{5}\ \ldots$$

Análogamente:

$$\frac{1}{3}\ ,\ \frac{2}{6}\ ,\ \frac{3}{9}\ ,\ \frac{4}{12}\ ,\ \frac{5}{15}\ \ldots$$

2. Escribir fracciones equivalentes a $\frac{12}{6}$ y $-\frac{21}{9}$ y decir qué número racional definen.

Multiplicaremos numerador y denominador por el mismo número y obtenemos:

$$\frac{12}{6}\ ,\ \frac{24}{12}\ ,\ \frac{36}{18}\ ,\ \frac{48}{24}\ \ldots$$

El número racional que definen lo averiguaremos hallando la fracción irreducible, para ello, dividimos numerador y denominador por el mismo número: $\frac{12}{6}$ dividimos por 6 y obtenemos $\frac{2}{1}$. Este es ya irreducible, luego define el número racional 2. Dividiendo por 6 los dos miembros de la primera fracción se obtiene $\frac{2}{1}$. Por tanto, define el número racional 2.

Analógamente para la segunda fracción:

$$-\frac{21}{9}\ ,\ -\frac{42}{18}\ ,\ -\frac{63}{27}\ ,\ -\frac{84}{36}\ ,\ \ldots$$

Su fracción irreducible es $-\frac{7}{3}$, luego define el número racional $-\frac{7}{3}$

3. OPERACIONES CON LOS NUMEROS RACIONALES

3.1. Suma de números racionales

Dados dos números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, vamos a definir una ley de composición interna que llamaremos suma, de manera que le hacemos corresponder otro número racional dado por la siguiente expresión:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a\,d + b\,c}{b\,d}$$

$\frac{a\ d\ +\ b\ c}{bd}$ es otro número racional, porque es un elemento de forma que su numerador, a d + b c, pertenece a Z y su denominador, b d, pertenece a Z*, es decir, es un número entero no nulo, puesto que b y d son distintos de cero.

Para que la expresión arriba escrita sea una auténtica ley de composición interna, es necesario que su resultado sea independiente de los representantes escogidos. Pasamos a demostrarlo: sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ dos números racionales y $\frac{a'}{b'}$ y $\frac{c'}{d'}$ otros dos números racionales equivalentes, respectivamente, a los dos primeros:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Longleftrightarrow a\ b' = a'\ b$$
$$\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'} \Longleftrightarrow c\ d' = c'\ d$$

Multiplicando la primera de estas expresiones por d d' y la segunda por b b' obtenemos:

$$a\ b'\ d\ d' = a'\ b\ d\ d'$$
$$c\ d'\ b\ b' = c'\ d\ b\ b'$$

sumando:

$$(a\ d\ +\ c\ b)\ b'\ d' = (a'\ d'\ +\ c'\ b')\ b\ d$$

obteniendo, finalmente:

$$\frac{a\ d\ +\ b\ c}{b\ d} = \frac{a'\ d'\ +\ b'\ c'}{b'\ d'}$$

Como consecuencia, podemos afirmar que es una auténtica ley de composición interna.

Un ejemplo:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$$
$$\frac{2}{5} = \frac{10}{25}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{3}{6} + \frac{10}{25}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{2}{5} &= \frac{1 \cdot 5 + 2 \cdot 2}{10} = \frac{5+4}{10} = \frac{9}{10} \\ \frac{3}{6} + \frac{10}{25} &= \frac{3 \cdot 25 + 10 \cdot 6}{6 \cdot 25} = \frac{75 + 60}{150} = \frac{135}{150} \end{aligned}\right\} \quad \frac{9}{10} = \frac{135}{150}$$

3.2. Propiedades de la suma de números racionales

Solamente vamos a enunciar las propiedades de la suma de números racionales, porque pensamos que son ya conocidas por los alumnos. Para simplificar utilizaremos números racionales con denominador común.

1. *Conmutativa*

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{b}{n} + \frac{a}{n}$$

En efecto:

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a + b}{n} = \frac{b + a}{n} = \frac{b}{n} + \frac{a}{n}$$

2. *Asociativa*

$$\left[\frac{a}{n} + \frac{b}{n}\right] + \frac{c}{n} = \frac{a}{n} + \left[\frac{b}{n} + \frac{c}{n}\right]$$

Es fácil de comprobar:

$$\left[\frac{a}{n} + \frac{b}{n}\right] + \frac{c}{n} = \frac{a + b}{n} + \frac{c}{n} = \frac{(a + b) + c}{n} = \frac{a + (b + c)}{n} = \frac{a}{n} + \frac{b + c}{n} = \frac{a}{n} + \left[\frac{b}{n} + \frac{c}{n}\right]$$

3. *Existencia de elemento neutro.* Dado $\frac{a}{n} \in Q$, queremos averiguar un elemento $\frac{e}{n} \in Q$, llamado elemento neutro, tal que:

$$\frac{a}{n} + \frac{e}{n} = \frac{a}{n}$$

esto es, $\frac{a + e}{n} = \frac{a}{n}$ luego $a + e = a \Rightarrow e = 0$

por tanto, el elemento neutro es $\frac{0}{n}$

4. *Existencia de elemento simétrico.* Recordando lo visto al estudiar el elemento simétrico de la suma de números enteros, podemos afirmar que, dado, un elemento del conjunto de los números racionales $\frac{a}{n}$, al elemento, también perteneciente a Q, $\frac{-a}{n}$, le llamaremos elemento simétrico o elemento opuesto del primero, y se verifica:

$$\frac{a}{n} + \frac{-a}{n} = \frac{0}{n}$$

Así, el elemento opuesto o simétrico de $\frac{2}{3}$ es $\frac{-2}{3}$

$$\frac{2}{3} + \frac{-2}{3} = \frac{0}{3}$$

Como consecuencia, y como hemos dicho en la suma de números enteros, la existencia de elemento simétrico, nos permite restar dos números racionales, sumando al minuendo el opuesto del sustraendo, puesto que todo número racional tiene su elemento simétrico o elemento opuesto, que también es un número racional.

3.3. Producto de números racionales

Dados dos números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ podemos definir una ley de composición interna que llamaremos producto de números racionales, por medio de la misma obtenemos otro número racional, de acuerdo con la siguiente expresión:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a\ c}{b\ d}$$

Para poder asegurar que es una auténtica ley de composición interna, hemos de comprobar que el resultado es independiente de los representantes escogidos. En efecto, supongamos que $\frac{a}{c}, \frac{b}{d}$ son elementos de Q y que $\frac{a'}{b'}$ y $\frac{c'}{d'}$ son elementos, respectivamente, equivalentes, tenemos:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$
$$\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$$

podemos escribir:

$$a\ b' = a'\ b$$

$$c\ d' = c'\ d$$

Multiplicando miembro a miembro:

$$a\ c\ b'\ d' = a'\ c'\ b\ d ; \frac{a\ c}{b\ d} = \frac{a'\ c'}{b'\ d'}$$

luego

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} \cdot \frac{c'}{d'}$$

Así, si tenemos los números racionales $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{6}, \frac{10}{25}$ sabemos que:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$$
$$\frac{2}{5} = \frac{10}{25}$$
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{6} \cdot \frac{10}{25}$$

puesto que:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5} \\ \frac{3}{6} \cdot \frac{10}{25} = \frac{30}{150} \end{array}\right\} \quad \frac{1}{5} = \frac{30}{150}$$

3.4. Propiedades del producto de números racionales

1. *Conmutativa*

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$$

En efecto:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\,c}{b\,d}=\frac{c\,a}{d\,b}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}$$

2. *Asociativa*

$$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f}=\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right)$$

Es fácil de comprobar:

$$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\frac{e}{f}=\frac{a\,c}{b\,d}\cdot\frac{e}{f}=\frac{(a\,c)\cdot e}{(b\,d)\cdot f}=\frac{a\,(c\,e)}{b\,(d\,f)}=\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right)$$

3. *Existencia de elemento neutro.* Al elemento neutro suele llamársele también elemento unidad, es fácil averiguar, que es un elemento de la forma $\frac{n}{n}$, en efecto, si $\frac{a}{n}$ es un elemento racional, se verifica:

$$\frac{a}{n}\cdot\frac{n}{n}=\frac{a\cdot n}{n\cdot n}=\frac{a}{n}$$

4. *Existencia de elemento simétrico.* Dado el número racional $\frac{a}{b}$, existe siempre su elemento simétrico o elemento inverso, que es otro número racional de la forma $\frac{b}{a}$, es evidente, que

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{a\,b}{b\,a}=1$$

siendo 1 el elemento neutro (recordar que 1 es equivalente al elemento $\frac{n}{n}$ considerado antes).

De esta definición de elemento simétrico surge un problema evidente: no todos los números racionales tienen simétrico, pensemos en el elemento neutro de la suma en el conjunto Q de los números racionales. El simétrico de $\frac{0}{n}$, según el criterio que acabamos de exponer es $\frac{n}{0}$, pero esta fracción no tiene sentido dentro del conjunto de los números racionales, habíamos establecido que las fracciones debían de tener el denominador distinto de cero.

La restricción surge por si sola, vamos a considerar el conjunto de los números racionales menos el elemento neutro de la suma. A este nuevo conjunto le llamamos Q^*

$$Q^* = Q - \left\{\frac{0}{n}\right\}$$

en este conjunto todos sus elementos tienen su correspondiente elemento simétrico. En cambio, en Q no todos sus elementos, como acabamos de ver tienen elemento simétrico.

Insistimos, con el fin de dejar suficientemente clara esta particularidad. El conjunto Q de los números racionales goza de las propiedades, respecto al producto: conmutativa, asociativa y elemento neutro. Mientras que el conjunto Q^*, antes definido, tiene respecto al producto las propiedades: conmutativa, asociativa, elemento neutro y elemento simétrico.

A la hora de establecer una estructura en Q respecto a las operaciones de suma y producto es muy importante la consideración del conjunto Q^*.

Hecha esta salvedad podemos asegurar que la división de números racionales es siempre posible: para dividir dos números racionales se multiplica el dividendo por el inverso del divisor:

$$\frac{3}{5} : \frac{4}{3} = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{20}$$

5. *Propiedad distributiva del producto respecto a la suma de números racionales.* De igual manera que escribimos cuando estudiamos los números enteros, tenemos:

$$\left(\frac{a}{n} + \frac{b}{n}\right) \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{n} \cdot \frac{c}{d} + \frac{b}{n} \cdot \frac{c}{d}$$

En efecto:

$$\left(\frac{a}{n} + \frac{b}{n}\right) \cdot \frac{c}{d} = \frac{a+b}{n} \cdot \frac{c}{d} = \frac{(a+b)\,c}{n\,d} = \frac{a\,c + b\,c}{n\,d} = \frac{a\,c}{n\,d} + \frac{b\,c}{n\,d} =$$

$$= \frac{a}{n} \cdot \frac{c}{d} + \frac{b}{n} \cdot \frac{c}{d}$$

4. ESTRUCTURA ALGEBRAICA DEL CONJUNTO DE LOS NUMEROS RACIONALES

En el conjunto Q de los números racionales hemos definido dos leyes de composición interna, dos operaciones que se denominan suma y producto de números racionales.

La suma de números racionales verifica las siguientes propiedades:

— Asociativa.

— Conmutativa.

— Elemento neutro: $\frac{0}{n}$

— Todo número racional tiene su elemento simétrico (elemento opuesto del número racional $\frac{a}{n}$ es $\frac{-a}{n}$

Por tanto, de acuerdo con lo visto en el tema 4 de la Unidad Didáctica 1, el conjunto Q de los números racionales respecto a la suma tiene estructura de *grupo conmutativo*.

(Q, +) es un grupo conmutativo.

El producto de números racionales cumple las siguientes propiedades:

— Asociativa.

— Conmutativa.

— Elemento neutro: $\frac{n}{n}$

Por tanto, el conjunto Q de los números racionales con el producto como ley de composición interna, tiene estructura de *semigrupo conmutativo* con elemento neutro.

(Q, ×) es un semigrupo conmutativo con elemento neutro.

Si ahora prescindimos, en el conjunto Q de los números racionales, del elemento $\frac{0}{n}$, o sea, del elemento neutro de Q respecto a la suma, tenemos el conjunto

$$Q^* = Q - \left\{\frac{0}{n}\right\}$$

La ley de composición interna producto verifica las siguientes propiedades en Q^*:

— Asociativa.

— Conmutativa.

— Elemento neutro: $\frac{n}{n}$

— Todo elemento de Q^* tiene su correspondiente elemento simétrico (elemento inverso) si $\frac{a}{b} \in Q^*$ su elemento inverso es $\frac{b}{a}$ que también pertenece a Q^*.

Luego, Q^* con el producto como ley de composición interna tiene estructura de grupo conmutativo:

(Q^*, ×) es un grupo conmutativo.

Además, hemos podido comprobar una propiedad que relaciona el producto y la suma de números racionales; podemos decir:

- El producto de números racionales es distributivo respecto a la suma.

Resumiendo: en el conjunto Q de los números racionales se han definido dos operaciones *suma* y *producto* de forma que:

- (Q, +) es un grupo conmutativo.
- (Q^*, ×) es un grupo conmutativo.
- El producto es distributivo respecto a la suma.

Estas tres consideraciones nos permiten afirmar que Q tiene estructura de cuerpo conmutativo.

$(Q, +, \times)$ es un cuerpo conmutativo.

5. ISOMORFISMO ENTRE Z Y Q

Establecemos una correspondencia biunívoca entre el conjunto Z de los números enteros y el conjunto Q' de los números racionales con denominador unidad, esto es, de la forma $\frac{a}{1}$. De manera que al número entero a le asociamos el número racional $\frac{a}{1}$. O sea:

$$a \longrightarrow \frac{a}{1} \text{ ó } f(a) = \frac{a}{1}$$

Sean, a y b dos números enteros, de acuerdo con esta correspondencia:

$$f(a) = \frac{a}{1}$$

$$f(b) = \frac{b}{1}$$

Consideremos en Z y Q' la ley de composición interna suma:

$$f(a + b) = \frac{a + b}{1} = \frac{a}{1} + \frac{b}{1} = f(a) + f(b)$$

Consideremos, ahora, como ley de composición interna el producto:

$$f(a \cdot b) = \frac{a \cdot b}{1} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} = f(a) \cdot f(b)$$

Como consecuencia, la correspondencia biunívoca así definida conserva la suma y el producto, es un *isomorfismo*. Si se prefiere, podemos decir: se ha sumergido el conjunto Z en el conjunto Q mediante la identificación $a = \frac{a}{1}$; Z es un subconjunto de Q.

6. ORDENACION EN EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS RACIONALES

Sea Q^+ el conjunto formado por todos los números racionales positivos; es evidente que Q^+ es un subconjunto de Q, es decir, $Q^+ \subset Q$.

Definimos en Q la siguiente relación binaria:

$$\text{Si} \quad a \in Q,\ b \in Q,\ a \leqslant b \iff b - a \in Q^+$$

aunque no lo vamos a demostrar, esta relación binaria es una relación de orden total, cuyo significado es claro: nos permite ordenar los números racionales.

Algunos ejemplos aclararán el significado de esta relación de orden definida en Q:

$3 \leqslant 5$ en efecto $5 - 3 = 2 \in Q^+$

$\frac{4}{2} \leqslant \frac{5}{2}$ en efecto $\frac{5}{2} - \frac{4}{2} = \frac{1}{2} \in Q^+$

$\frac{1}{2} \leqslant \frac{3}{4}$ en efecto $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{6-4}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \in Q^+$

$-\frac{3}{2} \leqslant \frac{2}{3}$ en efecto $\frac{2}{3} - \frac{-3}{2} = \frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{4+9}{6} = \frac{13}{6} \in Q^+$

CONCLUSIONES TEMA XII

CONJUNTO DE LOS NUMEROS RACIONALES	Sobre el conjunto $Z \times Z^*$ definimos la siguiente relación de equivalencia R: $\text{Si } (a, b) \in Z \times Z^* \quad \text{y} \quad (a', b') \in Z \times Z^*$ $(a, b) = (a', b') \iff a\,b' = a'\,b$ Al conjunto cociente engendrado por R en $Z \times Z^*$ se le llama conjunto de los números racionales: $Q = \frac{Z \times Z^*}{R}$
NUMERO RACIONAL	Es cada una de las clases de equivalencia engendrada por la relación de equivalencia R en $Z \times Z^*$. Es decir, cada uno de los elementos del conjunto cociente $\frac{Z \times Z^*}{R}$ Los números racionales vienen dados por pares ordenados de números enteros; al primero se le llama numerador y al segundo denominador. A su representación se le suele llamar fracción. Un mismo número racional puede expresarse por distintas fracciones.

<table>
<tr><td>REPRESENTANTES CANONICOS DE UN NUMERO RACIONAL</td><td colspan="3">Es la forma más sencilla de representar a los números racionales. Entonces el numerador y el denominador son números primos entre sí. Para obtener la forma canónica de un número racional, basta simplificar dicha fracción dividiendo ambos términos por el máximo común divisor de ambos.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">OPERACIONES EN Q</td><td rowspan="2">SUMA</td><td>DEFINICION</td><td>$\frac{a}{b} \in Q \quad \frac{c}{n} \in Q$
$\frac{a}{n} + \frac{c}{n} = \frac{a+c}{n}$</td></tr>
<tr><td>PROPIEDADES</td><td>Conmutativa.
Asociativa.
Elemento neutro: $\frac{0}{n}$
Todo número racional tiene simétrico.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">PRODUCTO</td><td>DEFINICION</td><td>$\frac{a}{b} \in Q \quad \frac{c}{d} \in Q$
$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$</td></tr>
<tr><td>PROPIEDADES</td><td>Conmutativa.
Asociativa.
Elemento neutro: $\frac{n}{n}$
Todo número racional distinto de $\frac{0}{n}$ tiene simétrico.</td></tr>
<tr><td>ESTRUCTURA ALGEBRAICA EN Q</td><td colspan="3">$(Q, +)$ es un grupo conmutativo.
$(Q, \times)$ es un semigrupo conmutativo con elemento neutro.
$(Q^*, \times)$ es un grupo conmutativo.
$(Q, +, \times)$ es un cuerpo conmutativo.</td></tr>
<tr><td>ORDENACION EN Q</td><td colspan="3">La relación ordinaria:
$\text{Si } a, b \in Q, a \leqslant b \iff b - a \in Q^+$
es una relación de orden total definida en Q.</td></tr>
</table>

EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. Dados los números racionales:

$$\frac{2}{3}\ ,\ \frac{-4}{5}\ ,\ \frac{10}{15}\ ,\ -\frac{6}{9}\ ,\ \frac{8}{-10}\ ,\ \frac{2}{-3}$$

averiguar cuáles son equivalentes.

2. Escribir las clases de equivalencia que definen los números racionales:

$$2,\ -\frac{2}{1}\ ,\ -3$$

3. Efectuar las siguientes operaciones:

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}-\frac{2}{7}\ ;\ \frac{2}{3}-\frac{4}{3}+\frac{2}{7}\ ;\ \frac{1}{5}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{3}:\frac{1}{4}$$

4. Demostrar que el elemento neutro de la suma es $\frac{0}{1}$

5. Demostrar que el elemento neutro del producto es $\frac{1}{1}$

6. Dada la expresión:

$$\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right)$$

comprobar la propiedad distributiva respecto a la suma.

7. En el conjunto Q se define la ley de composición interna siguiente:

$$a * b = a + b + 2ab$$

¿qué propiedades verifica?

8. Efectuar las siguientes operaciones:

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right) \times \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\right) \; ; \; \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right) \; : \; \left(2 - \frac{3}{5}\right)$$

$$\frac{1}{5} : 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right)$$

9. Ordenar de menor a mayor los siguientes números racionales:

$$2, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -2, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}$$

SOLUCION A LOS EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. $\frac{2}{3}$ R $-\frac{4}{5}$ $\quad 2 \cdot 5 \neq -4 \cdot 3$, no están relacionados

   $\frac{2}{3}$ R $\frac{10}{15}$ $\quad 2 \cdot 15 = 10 \cdot 3 = 30$, si están relacionados

   Análogamente con los restantes números racionales:

$$\frac{2}{3} \text{ R } \frac{10}{15} \qquad -\frac{4}{5} \text{ R } \frac{8}{-10} \qquad -\frac{6}{9} \text{ R } \frac{2}{-3}$$

2. El número racional 2 se puede escribir en forma de fracción $\frac{2}{1}$, multiplicando numerador y denominador por el mismo número obtenemos las clases de equivalencia:

$$\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{10}{5} \ \ldots$$

   Análogamente con los restantes números racionales:

$$-\frac{2}{1} = -\frac{4}{2} = -\frac{6}{3} = -\frac{8}{4} = -\frac{10}{5} \ \ldots$$

$$-\frac{3}{1} = -\frac{6}{2} = -\frac{9}{3} = -\frac{12}{4} = -\frac{15}{5} \ \ldots$$

3. Recordando que los números racionales tienen la propiedad asociativa, que la resta es equivalente a sumar su opuesto y que la división es equivalente a multiplicar por su inverso:

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} - \frac{2}{7} = \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{5}\right) + \left(-\frac{2}{7}\right) = \frac{10 + 12}{15} + \frac{-2}{7} =$$

$$= \frac{22}{15} + \frac{-2}{7} = \frac{154 - 30}{105} = \frac{124}{105}$$

$$\frac{2}{3} - \frac{4}{3} + \frac{2}{7} = \left(\frac{2}{3} + \frac{-4}{3}\right) + \frac{2}{7} = \frac{-2}{3} + \frac{2}{7} = \frac{-14 + 6}{21} = \frac{-8}{21}$$

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{5} + \frac{-1}{2}\right) + \frac{-1}{3} = \frac{2 - 5}{10} + \frac{-1}{3}$$

$$= \frac{-3}{10} + \frac{-1}{3} = \frac{-9 - 10}{30} = \frac{-19}{30}$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \qquad \frac{1}{3} : \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \times \frac{4}{1} = \frac{4}{3}$$

4. Supongamos que el elemento neutro es $\frac{e}{e'}$, por definición de elemento neutro:

$$\frac{a}{b} + \frac{e}{e'} = \frac{a}{b} \; ; \quad \frac{a}{b} + \frac{e}{e'} = \frac{a\,e' + b\,e}{b\,e'} = \frac{a}{b}$$

Por ser equivalentes:

$b(a\,e' + b\,e) = b\,e'\,a \qquad b\,a\,e' + b^2\,e = b\,e'\,a$
$b^2\,e = 0$ y como $b \neq 0$ $e = 0$

Por lo tanto el elemento neutro es de la forma $\frac{0}{n}$ y en particular $\frac{0}{1}$

5. Supongamos que el elemento neutro es $\frac{e}{e'}$, por definición de elemento neutro:

$$\frac{a}{b} \times \frac{e}{e'} = \frac{a}{b} \; ; \quad \frac{a\,e}{b\,e'} = \frac{a}{b}$$

y por ser equivalentes $a\,b\,e = a\,b\,e'$, por tanto $e = e'$ y el elemento neutro será $\frac{n}{n}$ y en particular $\frac{1}{1}$

6. $\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}\right)$

Efectuamos el primer miembro:

$$\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{3 + 8}{12}\right) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{11}{12}\right) = \frac{22}{36} = \frac{11}{18}$$

Efectuando el segundo miembro:

$$\left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{12} + \frac{4}{9} = \frac{18 + 48}{108} = \frac{66}{108} = \frac{11}{18}$$

El primer miembro es igual al segundo miembro.

BIBLIOTECA PUBLICA PTO. STA. MARIA

7. *Conmutativa*

$a * b = b * a$

primer miembro $a * b = a + b + 2ab$
segundo miembro $b * a = b + a + 2ab$ Es conmutativa

Asociativa

$(a * b) * c = a * (b * c)$

Primer miembro:

$$(a * b) * c = (a + b + 2ab) * c = (a + b + 2ab) + c + 2(a + b + 2ab) \cdot c = \\ = a + b + 2ab + c + 2ac + 2bc + 4abc$$

Segundo miembro:

$$a * (b * c) = a * (b + c + 2bc) = a + (b + c + 2bc) + 2a(b + c + 2bc) = \\ = a + b + c + 2bc + 2ab + 2ac + 4abc$$

Luego es asociativa.

Elemento neutro

Supongamos que sea e, por definición de elemento neutro

$$a * e = a ; \quad a * e = a + e + 2ae = a$$

$$e + 2ae = 0 ; \quad e(1 + 2a) = 0 ; \quad e = \frac{0}{1 + 2a} = 0$$

Por tanto si tiene elemento neutro y es el cero.

Elemento simétrico

Supongamos que el simétrico de a sea $\bar{a}$, por definición:

$$a * \bar{a} = 0 ; \quad a + \bar{a} + 2a\bar{a} = 0 ; \quad \bar{a}(1 + 2a) = -a ; \quad \bar{a} = \frac{-a}{1 + 2a} \in Q$$

Por lo tanto, tiene elemento simétrico.

8. $$\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right) \times \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{-2}{5}\right) \times \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\right) =$$

$$= \left(\frac{5 - 4}{10}\right) \times \left(\frac{3 + 8}{12}\right) = \frac{1}{10} \times \frac{11}{12} = \frac{11}{120}$$

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right) : \left(2 - \frac{3}{5}\right) = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right) : \left(\frac{2}{1} + \frac{-3}{5}\right) =$$

$$= \left(\frac{5 + 6}{15}\right) : \left(\frac{10 - 3}{5}\right) = \frac{11}{15} : \frac{7}{5} = \frac{11}{15} \times \frac{5}{7} = \frac{55}{105} = \frac{11}{21}$$

$$\frac{1}{5} : 2\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{5} : \frac{2}{1}\left(\frac{5+6}{15}\right) = \frac{1}{5} : \frac{2}{1} \times \left(\frac{11}{15}\right) =$$

$$= \frac{1}{5} : \frac{22}{15} = \frac{1}{5} \times \frac{15}{22} = \frac{15}{110} = \frac{3}{22}$$

9. Consideremos en primer lugar los números negativos:

$$-2 \leqslant -\frac{1}{3} \quad \text{ya que} \quad -\frac{1}{3} - \frac{-2}{1} = -\frac{1}{3} + \frac{2}{1} = \frac{6-1}{3} = \frac{5}{3} \in Q^+$$

Ahora los positivos:

$$2, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5} \qquad \frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{3}{5} < 2$$

$$\frac{2}{5} < \frac{1}{2} \quad \text{ya que} \quad \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{5-4}{10} = \frac{1}{10} \in Q^+$$

$$\frac{1}{2} < \frac{3}{5} \quad \text{ya que} \quad \frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{6-5}{10} = \frac{1}{10} \in Q^+$$

$$\frac{3}{5} < 2 \quad \text{ya que} \quad 2 - \frac{3}{5} = \frac{10-3}{5} = \frac{7}{5} \in Q^+$$

Por tanto:

$$-2 < -\frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{3}{5} < 2$$

TEMA XIII

ULTIMAS AMPLIACIONES DEL CONCEPTO DE NUMERO

ESQUEMA/RESUMEN

1. El número real.
   - 1.1. Expresión decimal de los números racionales.
   - 1.2. Tipos de números decimales.
   - 1.3. Representación de los números racionales.
   - 1.4. Ampliación de los números racionales.
   - 1.5. Definición de número real.
   - 1.6. Representación de los números reales.

2. El cuerpo de los números reales.
   - 2.1. Construcción axiomática del cuerpo de los números reales.
   - 2.2. Demostración de algunas propiedades de los números reales.

3. El número complejo.
   - 3.1. Ampliación del concepto de número real.
   - 3.2. Definición de número complejo.
   - 3.3. Igualdad de números complejos.
   - 3.4. Operar con números complejos.
     - 3.4.1. Generalidades previas.
     - 3.4.2. Operaciones sencillas con números complejos.

INSTRUCCIONES PARA EL ESTUDIO DEL TEMA

En los últimos temas hemos intentado familiarizar al estudiante con los números naturales, enteros y racionales. Ha sido nuestra intención que quedase claro el significado de los mismos y los procesos matemáticos que nos conducen a ellos.

Para completar el estudio de los números es necesario llegar a los números reales y a los números complejos, y a ellos hemos dedicado el presente tema. Lo hemos hecho de una manera muy elemental, prescindiendo de las auténticas definiciones, preocupados solamente de llegar a estos tipos de números intuitivamente y sin rigor matemático alguno. En algunas ocasiones, incluso, hemos abusado de las definiciones olvidándonos de los razonamientos que procuramos utilizar siempre.

Pretendemos que al estudiar este tema saque como consecuencia el alumno la necesidad de ampliar el concepto de número, conocido hasta ahora, para poder realizar cierto tipo de operaciones y que esta ampliación se realiza de la misma manera que en los temas anteriores, añadiendo a los números conocidos otros nuevos.

1. EL NUMERO REAL

1.1. Expresión decimal de los números racionales

Acabamos de estudiar que los números racionales están formados por pares ordenados de números enteros, de manera que el segundo sea distinto de cero. La forma habitual de representar los números racionales es utilizar una fracción, de forma que la primera componente del par ordenado, a que antes nos referimos, es el numerador de la misma y la segunda componente el denominador.

Una fracción es el cociente de los dos números enteros que la constituyen, es decir, el cociente entre el numerador y el denominador. Este cociente es un número decimal.

Veamos algunos ejemplos:

$$\frac{4}{2} = 2 \qquad \frac{10}{2} = 5 \qquad \frac{32}{8} = 4$$

$$\frac{17}{3} = 5{,}6666... \qquad \frac{10}{3} = 3{,}333... \qquad \frac{7}{3} = 2{,}333...$$

$$\frac{21}{4} = 5{,}25 \qquad \frac{15}{4} = 3{,}75 \qquad \frac{13}{8} = 1{,}625 \qquad \frac{64}{10} = 6{,}4$$

$$\frac{7}{22} = 0{,}3181818... \qquad \frac{4}{15} = 0{,}2666... \qquad \frac{159}{44} = 3{,}61363636...$$

De estos ejemplos podemos obtener algunas conclusiones que conviene recordar:

- Cuando el numerador de la fracción, que representa al número racional, es múltiplo del denominador, el cociente es exacto, entonces se puede considerar como un número decimal cuya parte decimal es cero. Recurriendo a los ejemplos anteriores:

$$\frac{4}{2} = 2{,}0 \qquad \frac{10}{2} = 5{,}0 \qquad \frac{32}{8} = 4{,}0$$

- Algunos números decimales se pueden escribir de diversas maneras:

$$5{,}25 = 5{,}250 = 5{,}2500 = 5{,}25000 = \ldots$$
$$3{,}75 = 3{,}750 = 3{,}7500 = 3{,}75000 = \ldots$$
$$2 = 2{,}0 = 2{,}00 = 2{,}000 = 2{,}0000 = \ldots$$

- El número o el grupo de números que se repiten en la parte decimal de un número decimal, se llama *período* y se suele escribir abreviadamente con un arco sobre la cifra o cifras que constituyen el mismo:

$5{,}666\ldots = 5{,}\widehat{6}$	el período está formado por 6.
$3{,}333\ldots = 3{,}\widehat{3}$	el período está formado por 3.
$3{,}613636\ldots = 3{,}6\widehat{136}$	el período está formado por 36.

De todo lo dicho podemos afirmar que un número racional se puede representar de dos maneras distintas:

i) en forma de fracción

ii) en forma de número decimal

Hemos visto que un mismo número racional puede tener varios representantes, el número decimal obtenido con cualquiera de los representantes es el mismo. Sea:

$$\frac{7}{8} = \frac{14}{16} = \frac{21}{24} = \frac{70}{80}$$

calculamos por el procedimiento habitual los correspondientes números decimales:

$$\frac{7}{8} = 0{,}875 \qquad \frac{14}{16} = 0{,}875 \qquad \frac{21}{24} = 0{,}875 \qquad \frac{70}{80} = 0{,}875$$

1.2. Tipos de números decimales

Si analizamos los ejemplos presentados en esta parte del tema que hemos desarrollado, podemos observar que hemos obtenido dos tipos de números decimales, unos que son números decimales

finitos y otros que son números decimales infinitos y periódicos, según procedan de números racionales cuyo denominador sea una potencia de 10 ó no. Vamos a presentar nuevos ejemplos para insistir en esta diferencia:

a) *Números racionales cuyo denominador es una potencia de 10*

$$\frac{4}{10} = 0{,}4 \qquad \frac{36}{100} = 0{,}36 \qquad \frac{12.345}{1.000} = 12{,}345$$

En algunas ocasiones el representante no tiene por denominador, en un principio, una potencia de 10, pero puede encontrarse una fracción equivalente que si lo tiene. Así, el número racional representado por la fracción $\frac{14}{25}$ no tiene el denominador de la forma que estamos analizando, pero se puede encontrar una fracción equivalente cuyo denominador si es potencia de 10, por ejemplo: $\frac{56}{100}$. De manera que:

$$\frac{14}{25} = \frac{56}{100}$$

y, por tanto, $\frac{56}{100} = 0{,}56$.

Esta circunstancia no siempre se da, si consideramos el número racional representado por la fracción $\frac{7}{3}$, no podemos encontrar una nueva fracción cuyo denominador sea una potencia de 10.

Repetimos lo dicho con anterioridad, cuando en la fracción que representa a un número racional el denominador es una potencia de 10, se obtiene un número decimal finito.

Por último, conviene tener presente que cualquier número decimal finito se puede transformar en número decimal infinito, basta ver los tres ejemplos siguientes:

$$0{,}32 = 0{,}32000...$$

$$4{,}724 = 4{,}724000...$$

$$1{,}02 = 1{,}02000...$$

b) *Números racionales cuyo denominador no es una potencia de 10*

$$\frac{13}{7} = 1{,}857142857142 ... = 1{,}\overbrace{857142} \qquad \frac{4}{15} = 0{,}2666 ... = 0{,}2\widehat{6}$$

$$\frac{7}{3} = 2{,}333 ... = 2{,}\widehat{3} \qquad \frac{159}{44} = 3{,}613636 ... = 3{,}61\widehat{36}$$

$$\frac{1}{3} = 0{,}333 ... = 0{,}\widehat{3} \qquad \frac{7}{15} = 0{,}4666 ... = 0{,}4\widehat{6}$$

Todos los números decimales obtenidos son periódicos de infinitas cifras.

Analizando los ejemplos presentados en este apartado, podemos observar que existen dos tipos de números decimales periódicos. Unos en los que el período comienza inmediatamente después de la coma y otros, en los que el período no comienza inmediatamente después de la coma. Los primeros se llaman *números decimales periódicos puros* y los segundos *números decimales periódicos mixtos.*

Son números decimales periódicos puros: $1,\overline{857142}$; $2,\widehat{3}$; $0,\widehat{3}$

Son números decimales periódicos mixtos: $3,61\widehat{36}$; $0,4\widehat{6}$; $0,2\widehat{6}$

Llegamos, finalmente, a una conclusión importante:

- Todo número racional se puede escribir como un número decimal periódico con infinitas cifras.

Ejercicios y ejemplos

1. Expresar en forma decimal los siguientes números enteros:

$$2\ ;\ 5\ ;\ -3\ ;\ -4\ ;\ 7$$

En primer lugar los escribimos en forma de fracción, como son números enteros el denominador será siempre 1. Obtenemos, por tanto:

$2 = \frac{2}{1} = 2,000... = 2,\widehat{0}$ $\qquad -3 = -\frac{3}{1} = -3,000... = -3,\widehat{0}$

$5 = \frac{5}{1} = 5,000... = 5,\widehat{0}$ $\qquad -4 = -\frac{4}{1} = -4,000... = -4,\widehat{0}$

$7 = \frac{7}{1} = 7,000... = 7,\widehat{0}$

2. Expresar en forma decimal los siguientes números racionales:

$$\frac{2}{3}\ ,\ -\frac{4}{7}\ ;\ \frac{5}{4}\ ;\ -\frac{8}{5}\ ;\ \frac{3}{7}$$

como están expresados en forma de fracción, tenemos que efectuar las correspondientes divisiones y obtenemos:

$\frac{2}{3} = 0,666... = 0,\widehat{6}$ $\qquad -\frac{8}{5} = -1,6000... = -1,6\widehat{0}$

$-\frac{4}{7} = -0,571428571428... = -0,\overline{571428}$

$\frac{5}{4} = 1,25000... = 1,25\widehat{0}$ $\qquad \frac{3}{7} = 0,428571428571... = 0,\overline{428571}$

3. Dados los siguientes números decimales: 2,05; 0,122; 3,44; 2,875; 3,1 escribirlos en forma de fracción.

Un número no varía si lo multiplicamos y dividimos por un mismo número. Multiplicamos por la unidad seguida de ceros hasta conseguir que el número sea entero:

$$2{,}05 \cdot \frac{100}{100} = \frac{205}{100} = \frac{41}{20}$$

$$0{,}122 \cdot \frac{1000}{1000} = \frac{122}{1000} = \frac{61}{500}$$

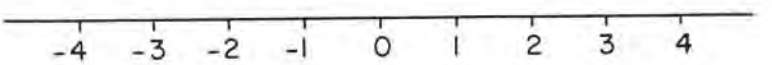
$$3{,}44 \cdot \frac{100}{100} = \frac{344}{100} = \frac{172}{50} = \frac{86}{25}$$

$$2{,}875 \cdot \frac{1000}{1000} = \frac{2875}{1000} = \frac{575}{200} = \frac{115}{40} = \frac{23}{8}$$

$$3{,}1 \cdot \frac{10}{10} = \frac{31}{10}$$

1.3. Representación de los números racionales

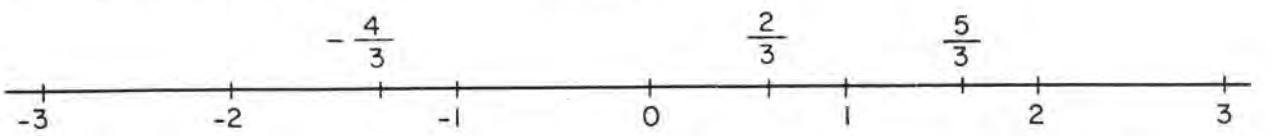
Ya sabemos que a ciertos puntos de una recta les podemos asociar un número entero, sin más que tomar sobre la misma un origen y una unidad, de manera que a la derecha del origen representaremos los números enteros positivos y a la izquierda, los números enteros negativos.



Sobre esta recta también se pueden representar los números racionales. Por ejemplo, si queremos representar el número racional $\frac{2}{3}$, basta dividir la primera unidad en tres partes y tomar dos de ellas.

Para representar, ahora, el número racional $\frac{5}{3}$, necesitamos dividir las dos primeras unidades en tres partes y tomar cinco de ellas.

Si se trata de un número racional negativo se sigue el mismo procedimiento, pero a la izquierda del punto tomado como origen. La representación del número racional $-\frac{4}{3}$ aparece en la figura siguiente, junto con la de los dos números racionales anteriores.



Es claro entonces, que se puede representar sobre la recta cualquier número racional, determinando sobre la misma una abscisa y, en consecuencia, un segmento, si procuramos que coincida el origen de la recta con el del segmento. Esto es, el extremo del segmento determina un punto sobre la recta que puede corresponder a un número racional, número que determina la medida del segmento.

1.4. Ampliación de los números racionales

Hemos estudiado que en el cuerpo de los números racionales siempre es posible realizar las cuatro operaciones siguientes: suma, resta, producto y división (siendo el divisor distinto de cero).

La potenciación de exponente natural, por ser un caso particular de la multiplicación, siempre es posible. Por el contrario, la radicación, operación inversa de la potenciación, sólo es posible si el radicando es una potencia de exponente igual al índice (o es un múltiplo de éste):

$$\sqrt[m]{b} = a \quad \text{si y sólo si} \quad b = a^m$$

siendo *a* y *b* dos números racionales y *m* un número natural. Por ejemplo, $\sqrt{4}$ esta operación es posible porque $\sqrt{4} = \sqrt{2^2}$, o sea, $\sqrt{4} = 2$ y $2^2 = 4$. También se puede realizar $\sqrt[3]{27}$ porque $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3}$, luego $\sqrt[3]{27} = 3$ y $3^3 = 27$.

Estamos ante una situación presentada en más de una ocasión en este curso. Si deseamos realizar siempre la operación de radicación, es necesario introducir unos nuevos números que contengan a los racionales; en otras palabras, es necesario ampliar el concepto de número racional.

Todavía podemos ilustrar este planteamiento con un ejemplo muy conocido: $\sqrt{2}$ no es un número racional, pues no existe ningún número racional cuyo cuadrado sea 2. Vamos a comprobar que, efectivamente, no existe un número racional cuyo cuadrado sea 2.

Supongamos qe existiera y que fuese $\frac{p}{q}$ su fracción irreducible. Se verificaría:

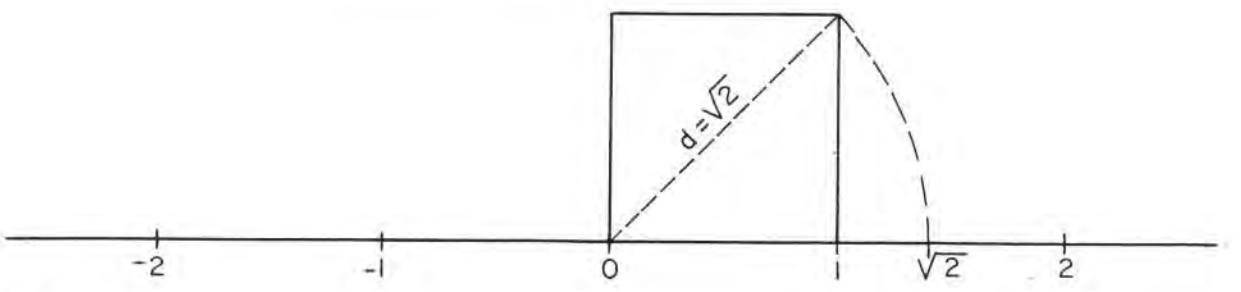
$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, 2 = \frac{p^2}{q^2}$$

pero siendo p primo con q también p^2 es primo con q^2, es decir,

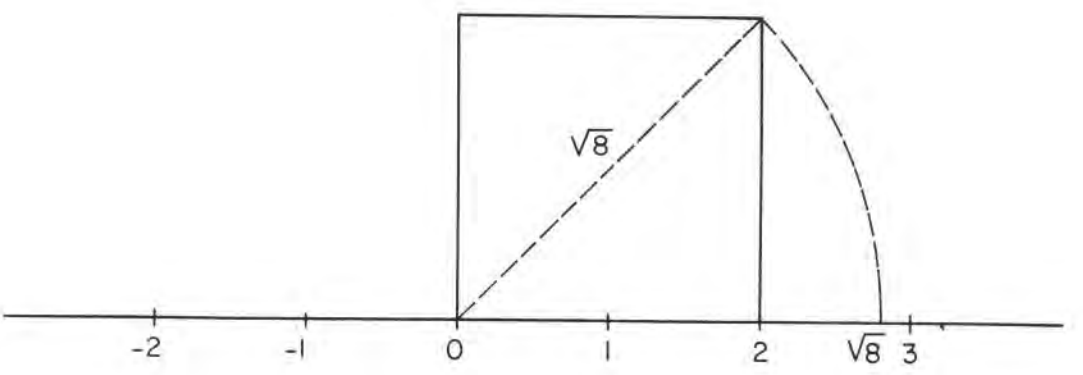
$$\frac{p^2}{q^2} \neq 2$$

Llegamos a un absurdo por suponer que $\sqrt{2}$ es un número racional. Ningún número racional es igual a $\sqrt{2}$. Por tanto, podemos decir que $\sqrt{2}$ es un número irracional. Si lo escribimos en forma decimal resulta 1,4142... de manera que, la parte decimal nunca formarán un período, es, en consecuencia, un número irracional.

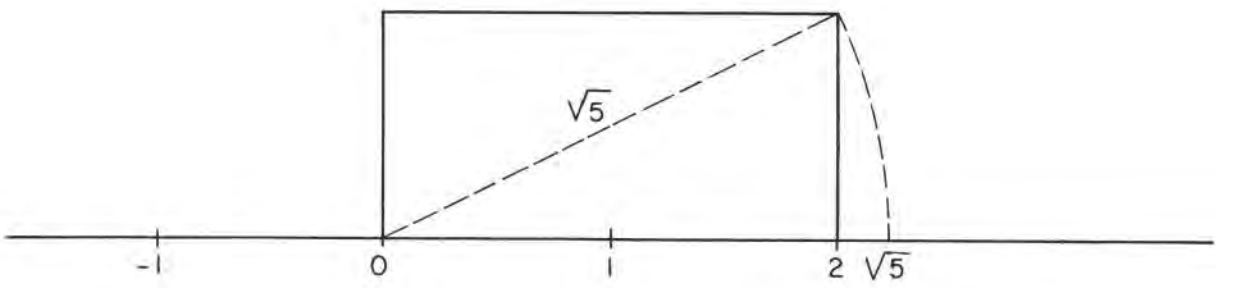
Se puede representar el número irracional $\sqrt{2}$ sobre una recta, aunque de forma diferente a la utilizada con los números racionales. En este caso, basta recordar que $\sqrt{2}$ es la diagonal de un cuadrado de lado unidad.



Análogamente podríamos representar sobre una recta el número irracional $\sqrt{8}$, con sólo recordar que es la diagonal de un cuadrado de lado igual a 2.



Por último, si tratamos de representar el número irracional $\sqrt{5}$, podemos seguir un procedimiento semejante: $\sqrt{5}$ es la diagonal de un rectángulo de lados 2 y 1. Tenemos, entonces, la siguiente representación:



De estas tres representaciones últimas que hemos realizado, se deduce de inmediato, que los números racionales no son suficientes para representar todos los puntos de una recta, es necesario emplear también, los números irracionales.

1.5. Definición de número real

Con el planteamiento realizado en este tema parece clara la necesidad de utilizar unos nuevos números, números resultantes de ampliar los conocidos números racionales. Así aparecen los *números reales*. Diremos que un número es real cuando se puede expresar con infinitas cifras decimales. Será racional cuando el número decimal es periódico y será irracional cuando el número decimal no es periódico.

Somos conscientes de que no hemos dado una auténtica definición de número real, el hacerlo nos hubiera llevado a realizar una serie de consideraciones previas que estimamos inadecuadas para este curso de Matemáticas Básicas, destinado fundamentalmente, a estudiantes de Letras.

Algunos ejemplos nos ayudarán a comprender el concepto de número real:

• $\frac{3}{4}$ es un número racional, su expresión decimal la averiguaremos de la forma habitual:

$$\frac{3}{4} = 0{,}75000... = 0{,}75\widehat{0}$$

por tanto, es un número real (racional).

• $\sqrt{9}$ también es un número racional pues $\sqrt{9} = 3 = 3{,}000 = 3{,}\widehat{0}$ luego es un número real.

Aprovechamos este ejemplo para indicar que no todo número que aparece bajo un signo radical es irracional:

• $\frac{2}{7}$ es un número real racional, hallamos su expresión decimal:

$$\frac{2}{7} = 0{,}285714285714... = 0{,}\widehat{285714}$$

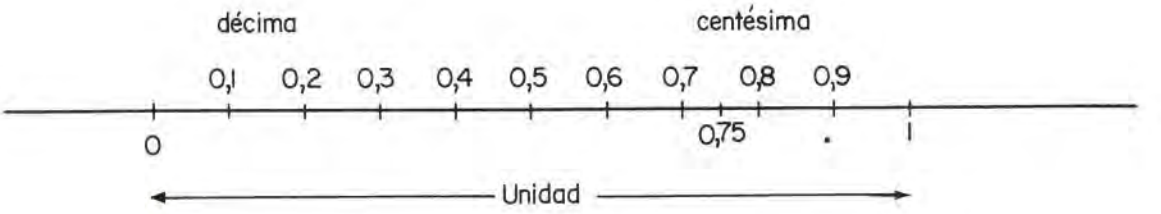
es decir, es un número real.

• $\sqrt{3}$ también es un número real, pero en esta ocasión es irracional, pues: $\sqrt{3} = 1{,}7320508...$ es una expresión decimal no periódica.

1.6. Representación de los números reales

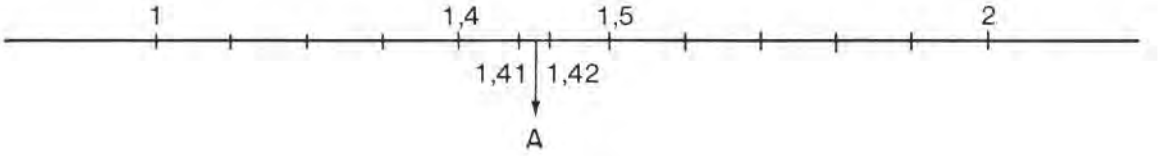
Todo número real se puede representar sobre una recta, aunque se utiliza distinto procedimiento según se trate de racionales o irracionales. Vamos a verlo por separado:

a) *Representación de los números racionales.* Habíamos visto que un número racional se puede representar por un número finito de cifras decimales. Supongamos que tratamos de representar el número real $\frac{3}{4}$, escrito en forma decimal resulta: 0,75. En la figura siguiente hemos hecho la representación del mismo.



El proceso seguido es fácil de imaginar: hemos dividido la unidad en diez partes iguales, por tanto, cada una representa una décima. Dividimos a continuación, cada una de las décimas en diez partes iguales, cada una de estas representa a una centésima. Como queremos representar el número 0,75 tomamos siete décimas y cinco centésimas de la octava décima.

b) *Representación de los números irracionales.* Como todo número irracional tiene infinitas cifras decimales, no podemos representarlo utilizando el procedimiento anterior. Como ejemplo, tratamos de representar $\sqrt{2}$ que expresado en forma decimal es igual a 1,41421...



Supongamos que el punto A representa a $\sqrt{2}$, como $\sqrt{2}$ = 1,41421... esto quiere decir que:

A es mayor que 1 y menor que 2
A es mayor que 1,4 y menor que 1,5
A es mayor que 1,41 y menor que 1,42
A es mayor que 1,414 y menor que 1,415

este proceso se puede prolongar todo lo que se quiera, se tiene por tanto una serie de intervalos de amplitud, una unidad, una décima, una centésima, ... Estos intervalos tienen un punto en común que llamaremos representación del número $\sqrt{2}$.

Ejercicios y ejemplos

1. Clasificar los siguientes números: 2 ; $\frac{3}{2}$; $-\frac{1}{4}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{7}$

Primero los escribimos en forma de fracción, de esta manera podemos observar si tienen cifras periódicas o no.

$2 = \frac{2}{1}$ = 2,000... $2,\widehat{0}$ es un número real racional

$\frac{3}{2}$ = 1,5000... = $1,5\widehat{0}$ es un número real racional

$-\frac{1}{4}$ = − 0,2500... = $-\ 0,25\widehat{0}$ es un número real racional

$\sqrt{5}$ = 2,23603... no es periódico, por tanto es un número real irracional

$\sqrt{7}$ = 2,6457... no es periódico, por tanto, es un número real irracional

2. De los siguientes números: $\sqrt[3]{27}$; $\sqrt{225}$; $\sqrt{21}$; $\sqrt{84}$; $\sqrt[3]{1331}$ ¿cuáles son irracionales?

Hemos dicho que si el radicando es una potencia cuyo exponente es múltiplo del índice de la raíz, el número es real racional. Analizaremos cada uno de los casos dados:

$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$ el número es racional.

$\sqrt{225} = \sqrt{3^2 \cdot 5^2} = \sqrt{(3 \cdot 5)^2} = 15$ el número es racional.

$\sqrt{21} = \sqrt{3 \cdot 7}$ el número es irracional.

$\sqrt{84} = \sqrt{2^2 \cdot 3.7} = 2\sqrt{21}$ el número es irracional.

$\sqrt[3]{1331} = \sqrt[3]{11^3} = 11$ el número es racional.

3. Dados los números $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ averiguar razonadamente entre qué dos números racionales se encuentran aproximando hasta las milésimas.

Como $\sqrt{5} = 2{,}23603$, podemos escribir:

$2 < \sqrt{5} < 3$

$2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$

$2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24$

$2{,}236 < \sqrt{5} < 2{,}237$

Análogamente con el segundo número:

$\sqrt{7} = 2{,}6457$

$2 < \sqrt{7} < 3$

$2{,}6 < \sqrt{7} < 2{,}7$

$2{,}64 < \sqrt{7} < 2{,}65$

$2{,}645 < \sqrt{7} < 2{,}646$

2. EL CUERPO DE LOS NUMEROS REALES

Acabamos de dar una definición de número real, por medio de la misma podemos distinguir entre números racionales y números irracionales. Para terminar estas breves nociones sobre el número real, vamos a mostrar el conjunto de los números reales, comprobando que tiene una estructura algebraica ya conocida.

Hemos desistido de construir el conjunto de los números reales como hicimos con el conjunto de los números enteros o con el conjunto de los números racionales, por la dificultad que encierra fundamentalmente, y además estimamos no imprescindible para los objetivos de estos primeros estudios matemáticos. Realizaremos una construcción axiomática, o sea, vamos a establecer el conjunto de los números reales enunciando unos axiomas que aparecen como ideas primitivas que no se demuestran.

2.1. Construcción axiomática del cuerpo de los números reales

De acuerdo con lo que acabamos de exponer vamos a enunciar los diez axiomas que nos permiten construir el conjunto R de los números reales.

Antes de enunciar estos axiomas es necesario prefijar dos ideas:

a) Los números reales existen.

b) La existencia de dos operaciones:

i) Suma: dados dos números reales x, y cualesquiera, podemos asociar otro número real llamado suma que representaremos: $x + y$.

ii) Producto: dados dos números reales x, y cualesquiera, le podemos asociar otro número real llamado producto que representaremos: $x \cdot y$.

Axioma 1. Si *x*, *y* son dos números reales cualesquiera, se verifica:

$$x + y = y + x$$
$$x \cdot y = y \cdot x$$

Axioma 2. Si *x*, *y*, *z* son tres números reales cualesquiera, se verifica:

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$
$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

Axioma 3. Existen dos números reales que son el *0* y el *1* tales que para cualquier número real *x* se verifica:

$$0 + x = x$$
$$1 \cdot x = x$$

Axioma 4. Si *x* es un número real cualquiera, siempre existe otro número real *y* tal que:

$$x + y = y + x = 0$$

Axioma 5. Para todo número real *x* distinto de 0 existe siempre otro número real *y*, tal que:

$$x \cdot y = y \cdot x = 1$$

Axioma 6. Si *x*, *y*, *z* son tres números reales cualesquiera, siempre se verifica que:

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

Axioma 7. Si *x*, *y* son dos números reales positivos, siempre podemos decir que:

$x + y$ es un número real positivo
$x \cdot y$ es un número real positivo

Axioma 8. Dado un número real cualquiera *x* distinto de cero, se verifica una de las dos cosas siguientes:

$$x \in R^+$$
o
$$-x \in R^+$$

pero no ambas cosas a la vez, siendo R^+ el conjunto de los números reales positivos ($R^+ \subset R$).

Axioma 9.

$$0 \notin R^+$$

Axioma 10. Todo conjunto de números reales acotado superiormente posee un extremo superior.

Algunos de estos axiomas recordarán al alumno propiedades ya conocidas y desarrolladas en repetidas ocasiones. Así, el Axioma 1 es la propiedad conmutativa; el Axioma 2 supone la propiedad asociativa; el Axioma 3 refleja la existencia de elemento neutro; los Axiomas 4 y 5 muestran la exis-

tencia de elementos simétricos para la suma y el producto de números reales, respectivamente; por último el Axioma 6 implica la propiedad distributiva.

Cuando sobre un conjunto se han definido dos operaciones que cumplen las propiedades reflejadas en los Axiomas 1 al 6 se dice que tiene estructura de cuerpo. Por tanto, mediante los seis primeros Axiomas anteriores podemos asegurar que el conjunto R de los números reales tiene estructura de cuerpo.

Los Axiomas 7, 8 y 9 permiten asegurar que el conjunto R de los números reales es un cuerpo ordenado, esto es, dados dos números reales cualesquiera, podemos averiguar cual es mayor. Expresado de otra manera: Si *x*, *y* son números reales: $x < y$ si $y - x$ es un número real positivo.

Acabamos de enunciar una relación binaria de orden total, semejante a la presentada en el conjunto de los números enteros.

2.2. Demostración de algunas propiedades de los números reales

Consideramos interesante que, a modo de ejercicio, aprendamos a demostrar algunas propiedades de los números reales, tomando como punto de partida los axiomas enunciados en el apartado anterior.

Ley de simplificación. $a + c = b + c \Rightarrow a = b$.

Demostración: Según el axioma 4, $\forall\, c \in R$ existe un $x \in R$ tal que:

$$c + x = 0; \text{ luego:}$$

$$(a + c) + x = (b + c) + x \Rightarrow a + (c + x) = b + (c + x) \Rightarrow$$

Axioma 2

$$\Rightarrow a + 0 = b + 0$$

Axioma 4

$$\Rightarrow a = b$$

Axioma 3

Diferencia o resta de números reales. Dados dos números reales *a* y *b*, existe otro número real *x* tal que $a + x = b$; al número real *x* le llamaremos diferencia o resta de *b* y *a*, es decir, $x = b - a$.

Demostración: Según el Axioma 4 existe un número real y tal que $a + y = 0$. Tomemos $x = y + b$

$$a + x = a + (y + b) = (a + y) + b = 0 + b = b$$

Axioma 2 Axioma 4 Axioma 3

División de números reales. Dados dos números reales *a* y *b* existe otro número real *x* tal que $a \cdot x = b$, al número real x se le llama cociente entre *b* y *a*, es decir,

$$x = \frac{b}{a}$$

Demostración: De acuerdo con el Axioma 5 existe un número real *y* tal que $a \cdot y = 1$. Tomemos: $x = y \cdot b$

$$a \cdot x = a(y \cdot b) = (a \cdot y) \cdot b = 1 \cdot b = b$$
$$\text{Axioma 2} \quad \text{Axioma 5} \quad \text{Axioma 3}$$

Veamos para terminar, algunos teoremas relacionados con la ordenación de los números reales:

Teorema 1. Si $a < b$ se verifica que $a + c < b + c$ siendo *a, b* y *c* números reales.

Demostración: Llamaremos $a + c = x$

$$b + c = y$$

probaremos que $x < y$, es decir, $y - x \in R^+$

$$y - x = b + c - a - c = b + c - c - a = b + 0 - a = b - a \in R^+$$
$$\text{Axioma 1}$$

ya que por ser $a < b$ siempre $b - a \in R^+$

Teorema 2. Si $a < b$ y $c > 0$ se verifica que $a \cdot c < b \cdot c$ siendo *a, b, c* números reales.

Demostración: Por ser $a < b$ se verifica $b - a > 0$

es decir, $b - a \in R^+$

por ser $c > 0$ $c \in R^+$ y por el Axioma 7

$$(b - a) \cdot c \in R^+$$

$$(b - a) \cdot c = b \cdot c - a \cdot c \in R^+ \text{ luego } a \cdot c < b \cdot c$$

3. EL NUMERO COMPLEJO

3.1. Ampliación del concepto de número real

Con los números reales no podemos realizar todo tipo de operaciones, por eso, estamos ante un proceso semejante al realizado en otras ocasiones a lo largo de esta Unidad Didáctica, necesitamos ampliar el concepto de número real. Recordaremos que los números enteros fueron consecuencia de la ampliación de los números naturales, lo mismo sucedió con los números racionales obtenidos a partir de los números enteros. En todos los casos presentados, en este sentido, hemos hecho lo mismo, hemos construido otros números que nos han permitido resolver operaciones imposibles de resolver con los números de partida, estando incluidos estos en los nuevos. Ahora vamos a seguir un procedimiento semejante.

Con los números reales se pueden realizar las cuatro operaciones fundamentales: suma, resta, producto y división. No ocurre lo mismo con la radicación. Si el radicando es positivo siempre se puede efectuar la raíz, como hemos visto en algunas ocasiones. No sucede lo mismo si el radicando es negativo; distingamos dos casos:

1. Si la raíz es de índice impar, por ejemplo:

$$\sqrt[3]{-27} = -3 \text{ puesto que } (-3)(-3)(-3) = -27$$

luego en este caso, la operación se puede efectuar.

2. Si la raíz es de índice par, la radicación no se puede efectuar. No podemos realizar la operación $\sqrt{-4}$, no hay ningún número real que al elevarlo al cuadrado nos de un número real negativo.

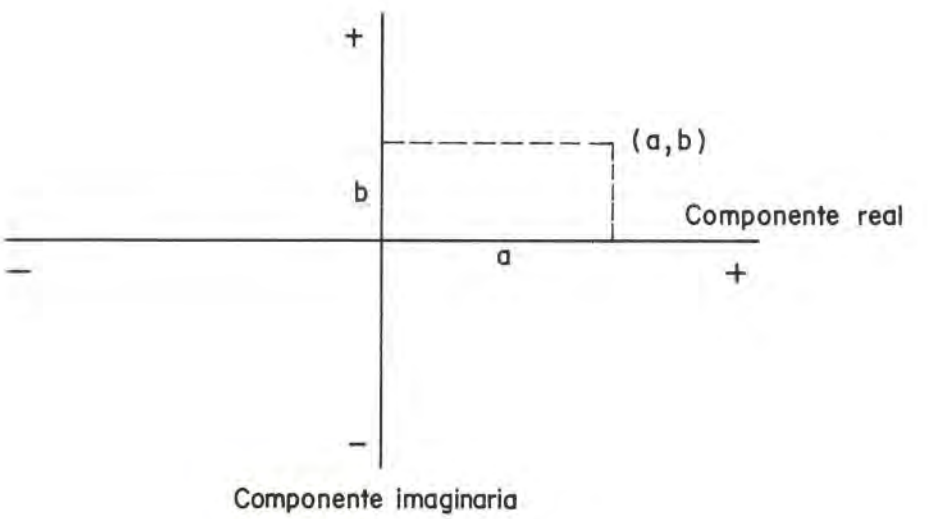
Luego es necesario definir nuevos números que permitan la realización de este tipo de operaciones, estos números van a ser los números complejos.

3.2. Definición de número complejo

Número complejo (*) es un par ordenado (a, b) de números reales, por tanto, un número complejo es un elemento del conjunto R × R, siendo R el conjunto de los números reales.

Los números reales *a* y *b* se llaman componentes del número complejo (a, b). A la primera componente *a* se le suele llamar componente real y a la segunda componente, *b* se la denomina componente imaginaria.

Es normal, en la representación gráfica de los números complejos utilizar un par de ejes ortogonales, de manera que en el eje horizontal se representa la componente real, mientras que el eje vertical se destina a la componente imaginaria. De esta manera todo número complejo está representado por un punto del plano.



Puede ocurrir que alguna de las componentes del número complejo sea nula. Si lo es la segunda, el número complejo será de la forma (a, 0), los números complejos de esta forma son números reales. Si por el contrario, la primera componente es nula, el número complejo será de la forma (0, b), a este tipo de complejos se les llama imaginarios puros.

(*) Por los mismos motivos que en el caso de los números reales no vamos a hacer un estudio detallado.

Por ejemplo, los números (3, 0), (−2, 0), (1, 0) son complejos que corresponden al primer tipo, mientras que (0, −1), (0, 3), (0, −7) corresponden al segundo caso.

Al complejo (1, 0) se le llama unidad real, mientras que al número complejo (0, 1) unidad imaginaria. Esta unidad imaginaria se representa por la letra i que vale $\sqrt{-1}$, es decir, $i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$.

De esta manera, recordando una raiz de radicando negativo e índice par, podemos escribir:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = \pm 2\,i = \pm 2\,(0, 1) = (0, \pm 2)$$

vemos, pues, que el problema de resolver este tipo de raíces queda solucionado con los números complejos.

3.3. Igualdad de números complejos

Dados dos números complejos (a, b) y (c, d) diremos que son iguales, cuando y sólo cuando, sean iguales sus partes reales y sus partes imaginarias. Es decir:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

luego, la igualdad de números complejos implica dos igualdades, una referida a la parte real o primera componente de los mismos y la otra referente a la parte imaginaria o segunda componente de los mismos.

Un ejemplo: Averiguar los valores que deben tomar x e y para que el número complejo $(2x + 1, y - 1)$ sea igual al número complejo (3,2).

Como se tiene que verificar que:

$$(3,2) = (2x + 1, y - 1)$$

podemos establecer las dos igualdades siguientes:

$$3 = 2x + 1$$
$$2 = y - 1$$

De la primera deducimos:

$$3 - 1 = 2x \qquad 2 = 2x \qquad x = 1$$

Análogamente de la segunda igualdad:

$$2 = y - 1 \qquad y = 2 + 1 = 3$$

3.4. Operar con números complejos

3.4.1. Generalidades previas

Antes de definir algunas operaciones con los números complejos indicaremos que dado un número complejo (*a*, *b*) lo podemos escribir de la siguiente forma: *a* + *b* i. Donde i es la unidad imaginaria ya definida, *a* es la parte real y *b* la parte imaginaria del número complejo. Un número complejo escrito así se dice está expresado en *forma binómica*.

Si queremos expresar el número complejo (4, − 7) en forma binómica escribiremos 4 − 7 i. Se trata de escribir en forma binómica el número complejo (− 5, 3), lo expresamos así: −5 + 3i.

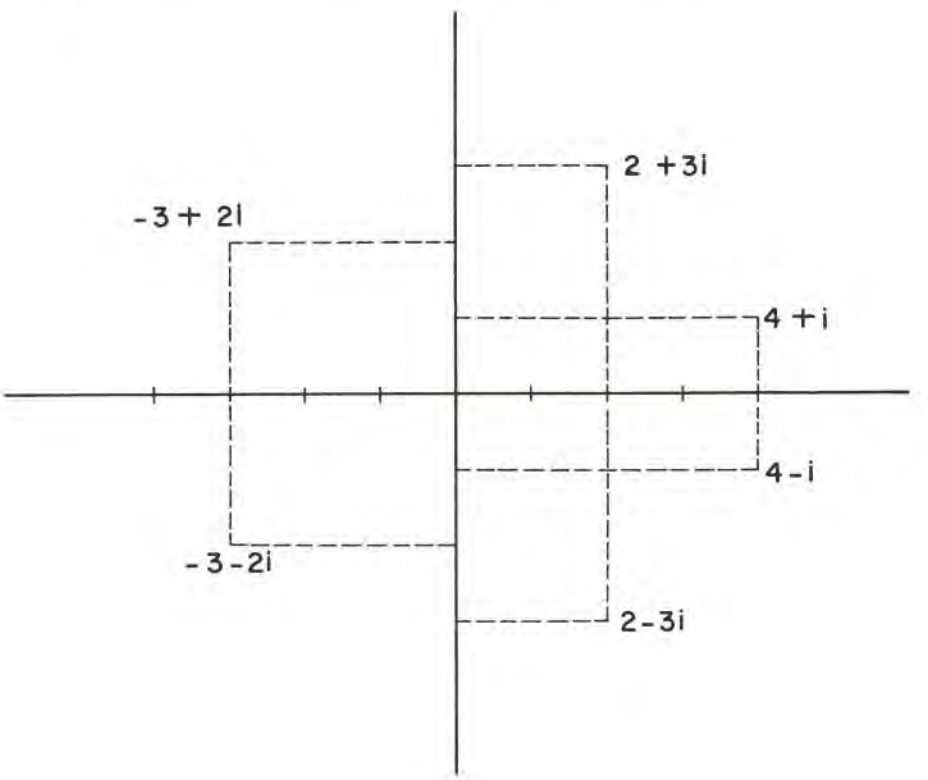
Dado un número complejo a + bi llamamos número complejo conjugado a otro número complejo cuya parte real es la misma y cuya parte imaginaria ha cambiado de signo. Así:

a + bi su conjugado es a − bi
a − bi su conjugado es a + bi
−a + bi su conjugado es −a − bi

Veamos algunos ejemplos:

10 + 2i su conjugado es 10 − 2i
1 − 3i su conjugado es 1 + 3i
−6 + 5i su conjugado es −6 − 5i

En la figura siguiente representamos los números complejos 2 + 3i; 4 − i; −3 + 2i y sus respectivos conjugados, es decir, los números complejos 2 − 3i, 4 + i y −3 −2i.



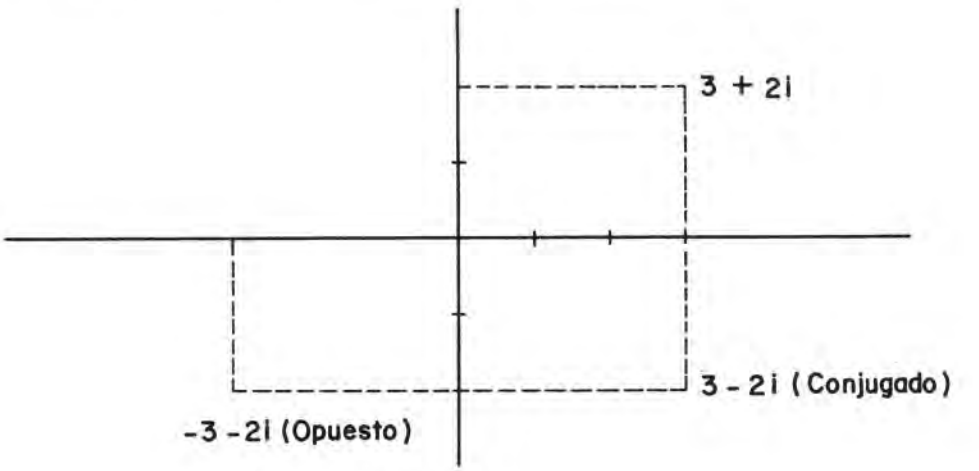
Dado el número complejo a + bi llamaremos número complejo opuesto de éste al número −a − − bi, es decir, es otro número complejo cuya parte real e imaginaria tiene signo contrario. Así:

a + bi su opuesto es −a −bi
−a + bi su opuesto es a − bi

Ejemplos:

7 + 2i su opuesto es −7 − 2i
−3 + 5i su opuesto es 3 − 5i

Es importante no confundir el opuesto y el conjugado de un número complejo dado. En la figura siguiente, representamos el conjugado y opuesto del número complejo: 3 + 2i.



3.4.2. Operaciones sencillas con números complejos

Suma de dos números complejos. Dados los números complejos a + bi y c + di, la suma la definimos de la siguiente forma:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)\,i$$

por tanto, al sumar dos números complejos obtenemos otro número complejo.

Algunos ejemplos nos ayudarán a entender esta definición:

$$(2 + 3i) + (1 + 2i) = (2 + 1) + (3 + 2)\,i = 3 + 5i$$
$$(7 - 2i) + (4 - 2i) = (7 + 4) + (-2 - 2)\,i = 11 - 4i$$

Se generaliza fácilmente a varios números complejos:

$$(2 + 3i) + (4 - i) + (3 + 2i) = (2 + 4 + 3) + (3 - 1 + 2)\,i = 9 + 4i$$

Diferencia de dos números complejos. Dados los números complejos a + bi y c + di, la diferencia del primero menos el segundo se obtiene sumando al primero el opuesto del segundo número complejo:

$$(a + bi) - (c + di) = (a + bi) + (-c - di) = (a - c) + (b - d)\,i$$

Varios ejemplos nos aclaran lo dicho:

$$(10 + i) - (3 + 7i) = (10 + i) + (-3 - 7i) = (10 - 3) + (1 - 7)\,i = 7 - 6i$$
$$(-7 - 2i) - (1 - i) = (-7 - 2i) + (-1 + i) = (-7 - 1) + (-2 + 1)\,i = -8 - i$$
$$(1 + i) - (-2 - 3i) = (1 + i) + (2 + 3i) = (1 + 2) + (1 + 3)\,i = 3 + 4i$$

Por último, una operación combinando la suma y la diferencia de números complejos:

$$(3 + 3i) + (1 + 2i) - (3 + 2i) = (3 + 3i) + (1 + 2i) + (-3 - 2i) =$$
$$= (3 + 1 - 3) + (3 + 2 - 2)\,i = 1 + 3i$$

Producto de dos números complejos. Dados dos números complejos a + bi y c + di, llamamos producto de los mismos a otro número complejo definido así:

$$(a + b\,i) \cdot (c + d\,i) = (ac - bd) + (ad + bc)\,i$$

Aplicamos esta definición al siguiente producto:

$$(3 + 2i) \cdot (1 + 4i) = (3 - 8) + (12 + 2)\,i = -5 + 14i$$

Cociente de dos números complejos. Para averiguar el cociente del número a + bi entre c + d i, basta multiplicar ambos números por el complejo conjugado del segundo (denominador).

$$\frac{a + b\,i}{c + d\,i} = \frac{(a + b\,i)(c - d\,i)}{(c + d\,i)(c - d\,i)} = \frac{(a\,c + b\,d) + (b\,c - a\,d)\,i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\,i$$

por tanto, el resultado es otro número complejo.

Un ejemplo:

$$\frac{2 + 3i}{1 + 4i} = \frac{(2 + 3i)(1 - 4i)}{(1 + 4i)(1 - 4i)} = \frac{(2 + 12) + (3 - 8)\,i}{1 + 16} = \frac{14}{17} - \frac{5}{17}\,i$$

NOTAS ACLARATORIAS Y COMPLEMENTARIAS

Al presentar los diez axiomas que nos han permitido construir el conjunto R de los números reales, no hemos hecho ningún comentario sobre el último axioma, el axioma 10. Aunque supone salirnos del nivel establecido, podemos adelantar a modo de información, que este axioma permite asegurar que el conjunto R de los números reales es *completo*.

CONCLUSIONES TEMA XIII

<table>
<tr><td rowspan="2">NUMEROS REALES
Están formados por los números racionales y los irracionales</td><td>NUMEROS RACIONALES</td><td>Todo número racional se puede expresar en forma decimal sin más que dividir el numerador por el denominador de la fracción que lo representa.

El número decimal resultante puede considerarse de infinitas cifras, de las cuales todas o algunas se repiten.

Las cifras que se repiten se llaman períodos.</td></tr>
<tr><td>NUMEROS IRRACIONALES</td><td>Son aquellos que expresados en forma decimal, tienen infinitas cifras siempre distintas.</td></tr>
<tr><td>CONSTRUCCIÓN AXIOMATICA DEL CONJUNTO DE LOS NUMEROS REALES</td><td colspan="2">Axioma 1. $X, Y \in R ; X + Y = Y + X ; X \cdot Y = Y \cdot X$

Axioma 2. $X, Y, Z \in R ; X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$
$X \cdot (Y \cdot Z) = (X \cdot Y) \cdot Z$

Axioma 3. Si $0, 1, X \in R ; 0 + X = X ; 1 \cdot X = X$

Axioma 4. Si $X \in R$, existe $Y \in R$ tal que: $X + Y = Y + X = 0$

Axioma 5. Si $X \in R$ y $X \neq 0$ existe $Y \in R$ tal que: $X \cdot Y = Y \cdot X = 1$

Axioma 6. $X, Y, Z \in R ; X \cdot (Y + Z) = (X \cdot Y) + (X \cdot Z)$

Axioma 7. Si $X, Y \in R^+$ siempre se verifica:
$X + Y \in R^+$
$X \cdot Y \in R^+$

Axioma 8. $X \in R$ y $X \neq 0$ se verifica una de las dos cosas siguientes:
$X \in R^+ \quad$ ó $\quad -X \in R^+$

Axioma 9. $0 \notin R^+$

Axioma 10. Todo conjunto de números reales acotado superiormente posee un extremo superior.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="2">NUMEROS COMPLEJOS</td><td>DEFINICIONES</td><td>Par ordenado de números reales (a, b)
a = componente real
b = componente imaginaria

(0, b): Número complejo imaginario puro.
(a, 0): Número complejo real.
(1, 0): Unidad real.
(0, 1) = i: Unidad imaginaria
$i = \sqrt{-1}$

Forma binómica del complejo (a, b) = a + b i
Conjugado de a + b i a − b i
Opuesto de a + b i − a − b i</td></tr>
<tr><td>OPERACIONES SENCILLAS CON NUMEROS COMPLEJOS</td><td>Suma:
$(a + b\,i) + (c + d\,i) = (a + c) + (b + d)\,i$

Resta:
$(a + b\,i) - (c + d\,i) = (a - c) + (b - d)\,i$

Producto:
$(a + b\,i) \times (c + d\,i) = (a\,c - b\,d) + (a\,d + b\,c)\,i$

Cociente:
$\frac{a + b\,i}{c + d\,i} = \frac{(a + b\,i)(c - d\,i)}{(c + d\,i)(c - d\,i)} =$

$= \frac{a\,c + b\,d}{c^2 + d^2} + \frac{b\,c - a\,d}{c^2 + d^2}\,i$</td></tr>
</table>

EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. Escribir en forma decimal los siguientes números racionales:

$$2\ ;\ \frac{3}{2}\ ;\ \frac{4}{7}\ ;\ -3\ ;\ -\frac{4}{2}$$

2. Escribir en forma de fracción los siguientes números decimales:

$$3{,}5\ ;\ 0{,}024\ ;\ 2{,}34\ ;\ 0{,}15$$

3. Ordenar de menor a mayor los siguientes números racionales:

$$-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{4}\ ;\ -\frac{4}{2}\ ;\ \frac{6}{3}\ ;\ \frac{3}{4}$$

4. Demostrar que $\sqrt{3}$ es un número irracional.

5. ¿Por qué no es correcto el siguiente razonamiento?

$$\sqrt{4} = \frac{p}{q}\ ;\ \frac{p^2}{q^2} = 4\ ;\ p^2 = 4q^2 \quad \text{esto implica que } p = \dot{4} = 4n$$

$$p^2 = 16n^2\ ,\ q^2 = \frac{p^2}{4} = \frac{16n^2}{4} = 4n^2 \quad \text{esto implica que } q = \dot{4} = 4m$$

$$\sqrt{4} = \frac{p}{q} = \frac{4n}{4m} \quad \text{reducible, por tanto } \sqrt{4} \text{ es irracional.}$$

6. Clasificar los siguientes números:

$$\frac{3}{2} \; ; \; -\frac{1}{2} \; ; \; \frac{1}{3} \; ; \; \sqrt{2}$$

7. De los siguientes números,

$$\frac{3}{7} \; ; \; \sqrt{3} \; ; \; \sqrt[3]{-27} \; ; \; \sqrt[4]{-16} \; ; \; \sqrt[2]{-4}$$

¿Cuáles no son reales?

8. Representar gráficamente los siguientes números complejos:

$$(2, 0) \; (0, 1) \; (-3, 2) \; (-4, 1) \; (2, 1)$$

9. Averiguar la parte real e imaginaria de los siguientes números complejos:

$$(2, 0) \; (0, -1) \; (0, 0) \; (-2, -2)$$

10. De los siguientes números complejos indicar cuáles son reales y cuáles imaginarios puros:

$$(2, 0) \; (1, 1) \; (0, 2) \; (-3, 0) \; (-1, -1) \; (0, -1)$$

11. Calcular: i^3, i^4, i^5, i^6, i^7, i^8, partiendo de que $i = \sqrt{-1}$ e $i^2 = -1$.

12. Apoyándonos en los resultados obtenidos en el ejercicio anterior, calcular:

$$i^{85}; \; i^{30}; \; i^{47}; \; i^{44}$$

13. Calcular: $\sqrt{-16}$; $\sqrt{-81}$; $\sqrt{-9}$

14. Efectuar las siguientes operaciones:

a) $(2, 3) + (1, 4) - (2, 2)$

b) $(1, 0) - (3, -1) + (2, 4)$

c) $(3, 1) - (-2, 4) + (3, -1)$

15. Realizar las siguientes operaciones:

a) $(2 + 3i) \cdot (-1 + 4i)$

b) $(1 + 3i) : (2 + i)$

c) $(1 - 4i) : (3 + 2i)$

16. Dados los números complejos: (1, 3), (2, 4), (5, y), (x, 3), (1, −4). Calcular x, y para que se verifique que:

$$(1, 3) - (2, 4) + (5, y) = (x, 3) - (1, -4)$$

17. Calcular el valor de x para que el producto de los números complejos $(x, 3) \cdot (2, 4)$ sea imaginario puro.

18. Con los mismos números dados en el problema anterior, calcular x para que el cociente sea real.

19. ¿Cuánto vale el producto de un número complejo por su conjugado? Aplíquelo al número complejo $(2, -3)$.

20. ¿Cuánto vale el cociente de un complejo por su opuesto? Aplíquelo al número complejo $(-2, 3)$.

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. 2 por ser entero, en forma decimal será: 2,000... = $2,\widehat{0}$

   $\frac{3}{2}$ hacemos la división y obtenemos: 1,5000... = $1,5\widehat{0}$

   $\frac{4}{7}$ hacemos la división y obtenemos: 0,571428 57... = $0,\widehat{571428}$

   − 3 por ser entero, será: − 3,000... = − $3,\widehat{0}$

   $-\frac{4}{2}$ hacemos la división y obtenemos: − 2,000... = $-2\widehat{0}$

2. Para ello no tenemos más que multiplicar y dividir por la unidad seguida de ceros:

   3,5 multiplicando y dividiendo por 10 obtendremos $\frac{35}{10}$

   0,024 multiplicando y dividiendo por 1.000 obtendremos $\frac{24}{1.000}$

   2,34 multiplicando y dividiendo por 100 obtendremos $\frac{234}{100}$

   0,15 multiplicando y dividiendo por 100 obtendremos $\frac{15}{100}$

3. Escribimos los números en forma decimal:

$$-\frac{1}{2} = -0,5\ ;\ \frac{2}{3} = 0,\widehat{6}\ ;\ \frac{1}{4} = 0,25\ ;\ -\frac{4}{2} = -2\ ;\ \frac{6}{3} = 2\ ;\ \frac{3}{4} = 0,75$$

Luego de menor a mayor serán:

$-2;\ -0,5\ ;\ 0,25\ ;\ 0,\widehat{6}\ ;\ 0,75\ ;\ 2$. Por tanto:

$$-\frac{4}{2} < -\frac{1}{2} < \frac{1}{4} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{6}{3}$$

4. Vamos a demostrar que no hay ningún número racional que al elevarlo al cuadrado resulte 3. Efectivamente, ningún entero elevado al cuadrado da 3; veamos que tampoco ninguna fracción al elevarla al cuadrado dará 3. Supongamos que sí y que es $\frac{p}{q}$, esta fracción debe ser irreducible. Veremos que no lo es, y, por tanto, no existe dicha fracción.

$\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ elevando al cuadrado: $3 = \frac{p^2}{q^2}$; $p^2 = 3\,q^2$

si p^2 es múltiplo de 3, p también lo es; luego $p = \dot{3} = 3n$

$p^2 = 9\,n^2$, luego $9\,n^2 = 3\,q^2$ y $q^2 = \frac{9\,n^2}{3} = 3\,n^2$, siendo q^2 múltiplo de 3 al igual que q. Por tanto, $q = \dot{3} = 3\,n'$. Así es que:

$$\sqrt{3} = \frac{p}{q} = \frac{3n}{3n'}$$

y la fracción no es irreducible, como consecuencia, no existe.

Es, por tanto, $\sqrt{3}$ irracional.

5. El razonamiento falla cuando se dice: Si $p^2 = 4\,q^2$, implica ser p múltiplo de 4.

Efectivamente, si p es 6, $p^2 = 36 = 4 \cdot 9 = \dot{4}$; por el contrario, p sería 6 y no sería múltiplo de 4.

6. Las ponemos en forma decimal:

$\frac{3}{2} = 1,50... = 1,5\widehat{0}$ por ser periódico, será real racional.

$-\frac{1}{2} = -0,50\ ... = -0,5\widehat{0}$ por tanto, real racional

$\frac{1}{3} = 0,33... = 0,\widehat{3}$ por tanto, real racional

$\sqrt{2} = 1,41421...$ como no es periódico, será real irracional.

7. No serán reales los que no se puedan escribir en forma decimal

$\frac{3}{7} = 0{,}428571428... = 0{,}\widehat{428571}$ es real

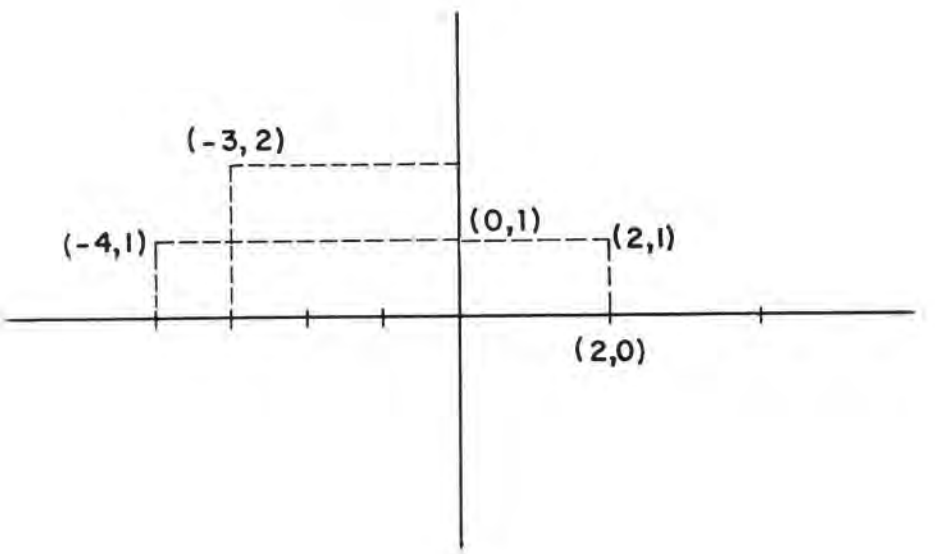
$\sqrt{3} = 1{,}732...$ es real

$\sqrt[3]{-27} = -3{,}000... = -3'\hat{0}$ es real

$\sqrt[4]{-16}$ no hay ningún número real que elevado a 4 resulte negativo, luego no es real.

$\sqrt[2]{-4}$ por la misma razón no es real, pues ningún número real elevado al cuadrado nos da negativo.

8.



9. (2,0): Parte real 2; parte imaginaria 0

(0, − 1): Parte real 0; parte imaginaria −1

(0, 0): Parte real 0; parte imaginaria 0

(−2, −2): Parte real −2; parte imaginaria −2

10.

Reales	Imaginarios puros
(2, 0)	(0, 2)
(−3, 0).	(0, −1)

11. Teniendo en cuenta que $i = \sqrt{-1}$; $i^2 = -1$

$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$
$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$
$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$
$i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = i^2 = -1$
$i^7 = i^6 \cdot i = -1 \cdot i = -i$
$i^8 = i^7 \cdot i = i \cdot -i = -i^2 = 1$

12. Observaremos que cada cuatro potencias se van repitiendo, es decir:

$i = i^5 = i^9 = i^{13}$... (i elevado a múltiplo de 4 más 1)
$i^2 = i^6 = i^{10} = i^{14}$... (i elevado a múltiplo de 4 más 2)
$i^3 = i^7 = i^{11} = i^{15}$... (i elevado a múltiplo de 4 más 3)
$i^4 = i^8 = i^{12} = i^{16}$... (i elevado a un múltiplo de 4)

i^{85} dividiremos $\begin{array}{r|l} 85 & 4 \\ \hline 05 & 21 \\ 1 & \end{array}$ por tanto $85 = 4 \cdot 21 + 1 = \dot{4} + 1$

$i^{85} = i^{\dot{4}+1} = i$ de igual forma con los demás, obtenemos:
$i^{30} = i^{\dot{4}+2} = i^2 = -1$
$i^{47} = i^{\dot{4}+3} = i^3$
$i^{44} = i^{\dot{4}} = i^4 = 1$

13. $\sqrt{-16} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1} = \pm 4i = \pm 4\,(0,1) = (0, \pm 4)$
$\sqrt{-81} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{-1} = \pm 9i = \pm 9\,(0,1) = (0, \pm 9)$
$\sqrt{-9} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = \pm 3i = \pm 3\,(0,1) = (0, \pm 3)$

14. Escribamos los complejos en forma binómica y apliquemos las difiniciones dadas:

a) $(2,3) + (1,4) - (2,2) = (2 + 3i) + (1 + 4i) - (2 + 2i) = (2 + 3i) + (1 + 4i) + (-2 - 2i) = (2 + 1 - 2) + (3 + 4 - 2)\,i = 1 + 5i$

b) $(1,0) - (3, -1) + (2,4) = (1 + 0i) - (3 - i) + (2 + 4i) = (1 + 0i) + (-3 + i) + (2 + 4i) = (1 - 3 + 2) + (0 + 1 + 4)\,i = 0 + 5i = 5i$

c) $(3,1) - (-2,4) + (3, -1) = (3 + i) - (-2 + 4i) + (3 - i) = (3 + i) + (2 - 4i) + (3 - i) = (3 + 2 + 3) + (1 - 4 - 1)\,i = 8 - 4\,i$

15.

a) $(2,3) \times (-1, 4) = (2 + 3i)(-1 + 4i) = -2 + 8i - 3i + 12i^2 = (-2 - 12) + (8 - 3)\,i = -14 + 5i$

b) $\dfrac{(1, 3)}{(2, 1)} = \dfrac{(1 + 3i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \dfrac{2 - i + 6i - 3i^2}{4 - 2i + 2i - i^2} = \dfrac{(2 + 3) + (6 - 1)\,i}{4 + 1} = \dfrac{5}{5} + \dfrac{5i}{5} = 1 + i$

c) $\dfrac{(1, -4)}{(3, +2)} = \dfrac{(1 - 4i)(3 - 2i)}{(3 + 2i)(3 - 2i)} = \dfrac{3 - 2i - 12i + 8i^2}{9 - 6i + 6i - 4i^2} = \dfrac{(3 - 8) - (2 + 12)\,i}{9 + 4} = \dfrac{-5}{13} - \dfrac{14}{13}\,i$

BIBLIOTECA PUBLICA PTO. STA. MARIA

16. Efectuamos el 1er miembro:

$$(1 + 3i) - (2 + 4i) + (5 + yi) = (1 + 3i) + (-2 - 4i) + (5 + yi) = (1 - 2 + 5) +$$
$$(3 - 4 + y)\, i = 4 + (-1 + y)\, i$$

Efectuamos el 2.° miembro:

$$(x + 3i) - (1 - 4i) = (x + 3i) + (-1 + 4i) = (x - 1) + (3 + 4)i = (x - 1) + 7i$$

igualando:

$4 + (-1 + y)\, i = (x - 1) + 7i$ luego: $\begin{cases} 4 = x - 1 & x = 4 + 1 = 5 \\ -1 + y = 7 & y = 7 + 1 = 8 \end{cases}$

17. Calculamos el producto:

$$(x + 3i) \cdot (2 + 4i) = 2x + 4xi + 6i + 12i^2 = (2x - 12) + (4x + 6)\, i$$

si este producto ha de ser imaginario puro, la parte real que es $2x - 12$ ha de ser cero, por tanto,

$$2x - 12 = 0\ ;\ 2x = 12\ ;\ x = \frac{12}{2} = 6$$

por tanto $x = 6$

18. Calculemos ahora el cociente:

$$\frac{x + 3i}{2 + 4i} \cdot \frac{2 - 4i}{2 - 4i} = \frac{2x - 4xi + 6i - 12i^2}{4 - 8i + 8i - 16i^2} = \frac{(2x + 12) + i\,(6 - 4x)}{4 + 16} = \frac{2x + 12}{20} + \frac{6 - 4x}{20}\, i$$

si ha de ser real, la parte imaginaria valdrá cero, por tanto:

$$\frac{6 - 4x}{20} = 0\ :\ 6 - 4x = 0 \cdot 20 = 0\ ;\ 4x = 6\ :\ x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

19. Sea el complejo $(a + b\, i)$, su conjugado será $(a - b\, i)$ y efectuamos el producto: $(a + b\, i)(a - -b\, i) = a^2 - a\, b\, i + b\, a\, i - b^2\, i^2 = a^2 + b^2$

por tanto su producto siempre es un número real.

Aplicación: $(2 - 3i)(2 + 3i) = 4 + 6i - 6i - 9i^2 = 4 + 9 = 13$, es por tanto real.

20. Sea (a + bi), su opuesto será (– a – bi), efectuamos el cociente:

$$\frac{a + bi}{-a - b\,i} \cdot \frac{-a + bi}{-a + b\,i} = \frac{-a^2 + a\,b\,i - b\,a\,i + b^2i^2}{a^2 - a\,b\,i + b\,a\,i - b^2i^2} = \frac{-a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = -1$$

Por tanto, es siempre el número real – 1.

Aplicación:

$$\frac{-2 + 3i}{+2 - 3i} \cdot \frac{2 + 3i}{2 + 3i} = \frac{-4 - 6i + 6i + 9i^2}{4 + 6i - 6i - 9i^2} = \frac{-4 - 9}{4 + 9} = \frac{-13}{13} = -1$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE
EDUCACION A DISTANCIA

MATEMATICAS BASICAS

UNIDAD DIDACTICA/4

Preparado por los profesores:
C. Herrera González
J. R. Marco Franco
J. Summers Gámez

TEMA XIV

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

ESQUEMA/RESUMEN

1. Expresiones algebraicas.
   - 1.1. Monomios.
     - 1.1.1. Suma de monomios.
     - 1.1.2. Producto de monomios.
     - 1.1.3. Cuadrado y cubo de un monomio.
     - 1.1.4. Cociente de dos monomios.
   - 1.2. Polinomios.
     - 1.2.1. Suma de polinomios.
     - 1.2.2. Diferencia de dos polinomios.
     - 1.2.3. Producto de un polinomio por un monomio.
     - 1.2.4. Producto de dos polinomios.
     - 1.2.5. División de un polinomio por un monomio.
     - 1.2.6. División de dos polinomios.
     - 1.2.7. División de un polinomio por $x - a$
2. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de expresiones algebraicas.
   - 2.1. Descomposición en factores.
   - 2.2. M. c. d. de expresiones algebraicas.
   - 2.3. M. c. m. de expresiones algebraicas.
3. Fracciones algebraicas.
   - 3.1. Definiciones y generalidades.
   - 3.2. Operaciones con fracciones algebraicas.
     - 3.2.1. Suma de fracciones.
     - 3.2.2. Producto de fracciones algebraicas.
     - 3.2.3. Cociente de fracciones algebraicas.
4. Notas aclaratorias y complementarias.

INSTRUCCIONES PARA EL ESTUDIO DEL TEMA

El propósito de este tema y de los siguientes de la Unidad Didáctica que ahora empezamos es familiarizar a nuestros alumnos con las ideas fundamentales del Algebra Elemental.

Pensamos que los contenidos que ahora presentamos deben ser conocidos para la mayoría de los alumnos. Pretenden ser un recordatorio propicio para adquirir rapidez y facilidad de cálculo, fundamentales para estudios posteriores. Por ello se han intercalado muchos ejercicios y ejemplos tipo resueltos con sumo detalle, siendo muy variado el número de ejercicios de autocomprobación que figuran al final de cada tema, en cuyas soluciones hemos tratado de ser suficientemente meticulosos para conseguir una autocomprobación efectiva. A pesar del número recomendamos la realización de todos estos ejercicios.

Después de estas consideraciones generales a toda la Unidad Didáctica, nos vamos a referir al presente tema, que pretende de una manera muy sencilla exponer el concepto de expresión algebraica y aprender a realizar las operaciones fundamentales de acuerdo con el planteamiento que acabamos de exponer.

En las «Notas aclaratorias y complementarias» tratamos de relacionar lo explicado en el tema con las nociones de álgebra de conjuntos, estudiadas en la Unidad Didáctica número 1. Adoptando de esta manera una solución de compromiso, dada la finalidad de este Curso de Matemáticas Básicas, hemos preferido perder rigor matemático con el fin de conseguir una mayor eficacia.

1. EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Hemos representado en algunas ocasiones los números racionales por letras. Nos preocupa ahora generalizar tales representaciones, procediendo al estudio sistemático de expresiones que contienen letras y números sometidos a las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación.

En un principio lo que acabamos de decir, nos puede servir para dar una primera definición de expresión algebraica. Entendemos por expresión algebraica a un conjunto de letras y números, ligados entre sí por las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación.

Algunos ejemplos:

$$4ax^3 - 5bx, \quad 3x^2yz^2, \quad \frac{x^3 - 27}{x - 3}, \quad \sqrt{2x^2 + x - 1}$$

$$\frac{2a}{5x + 3}, \quad 5x^2 + \sqrt{3x + 1}, \quad -x\sqrt{7} + \frac{2x + 1}{x - 1}$$

se puede adivinar la gran variedad de expresiones algebraicas existentes.

Valor numérico de una expresión algebraica, para un conjunto de valores atribuidos a sus letras, es el número que resulta al reemplazar cada letra por su valor y efectuar las operaciones indicadas.

Así, para $a = -1$ y $b = 2$ la expresión $\frac{a^2 b + 3ab}{a + b}$ tiene el valor numérico

$$\frac{(-1)^2\, 2 + 3\,(-1) \cdot 2}{-1 + 2} = -4$$

Habitualmente entendemos por expresiones equivalentes aquellas que adquieren igual valor numérico, al dar a sus letras cualquier conjunto de valores, el mismo para ambas expresiones. Según esto, las expresiones $\frac{2a^4b^6}{a^2b^3}$ y $2a^2b^3$ son equivalentes cualesquiera que sean los valores dados a *a* y *b*.

Nos preocupan ahora las operaciones con expresiones algebraicas, se han de definir de manera que al sustituir las letras por números, la expresión algebraica resultante de la operación conserve el mismo valor numérico que el resultado de operar con los de los datos.

La suma, producto, cociente, etc., de expresiones algebraicas es otra expresión cuyo valor numérico es la suma producto, cociente, etc., respectivamente, de los valores numéricos de los datos, para todo sistema de valores de sus letras. Esto requiere, como consecuencia, que dichas operaciones han de satisfacer idénticas propiedades o leyes que las operaciones con números racionales.

Para empezar, vamos a estudiar dos expresiones algebraicas sencillas: monomios y polinomios, y sus aplicaciones.

1.1. Monomios

Monomio es una expresión algebraica cuyas letras están sometidas únicamente a la operación de multiplicar*.

Algunos ejemplos:

$$\frac{5}{7}a^3b^2c^3, \frac{3}{2}a^2b, -\frac{7}{4}a^4b^3x^2, \frac{4}{3}a^2b^2, \quad -7x^2y^2(-3)x^3y^3(-7), \quad 4x^2y^3(-7)\times(-5)x^2y^3$$

Normalmente, por comodidad, un monomio se escribe agrupándolo de una forma ordenada, sin más que cambiar el orden de los factores, reemplazando, si es necesario, varios de ellos por su producto indicado. Un ejemplo, nos ayudará a comprender lo dicho: sea el monomio utilizado antes:

$$-7x^2y^2(-3)x^3y^3(-7)$$

colocamos juntos todos los factores numéricos por una parte y todas las letras, por otra:

$$(-7)(-3)(-7)x^2y^2x^3y^3$$

operando los factores indicados:

$$-147x^5y^5$$

De esta manera el monomio ha sido reducido a un *coeficiente numérico* y a una parte *literal*. En el caso que acabamos de considerar, tenemos:

Coeficiente: -147
Parte literal: x^5y^5

---

* Recordar que la potenciación es un caso particular de la multiplicación o producto.

El coeficiente numérico no siempre aparece de una forma explícita, así:

$a^2 b^3 c^4$ tiene por coeficiente + 1
$-a^2 b c$ tiene por coeficiente − 1

Dos monomios son semejantes cuando tienen la misma parte literal. Los monomios

$$\frac{7}{2} x^2 y^3 z^4, \quad -\frac{3}{5} x^2 y^3 z^4, \quad \frac{7}{4} x^2 y^3 z^4, \quad \sqrt{2}\, x^2 y^3 z^4$$

son monomios semejantes.

Grado de un monomio respecto a una letra es el exponente de esta letra en el monomio. Consideremos el monomio:

$$7 a^3 b^2 c$$

respecto a la letra *a* es de tercer grado o su grado es 3.
respecto a la letra *b* es de segundo grado o su grado es 2.
respecto a la letra *c* es de primer grado o su grado es 1.

Grado de un monomio es la suma de los grados de cada una de sus letras. El grado del monomio anterior es 3 + 2 + + 1 = 6.

1.1.1. Suma de monomios

La suma algebraica* se realiza sumando «o restando» sus coeficientes y el resultado se multiplica por la parte literal. Por lo tanto, la suma resultante es otro monomio que se diferencia de los monomios sumados en su coeficiente.

Consideremos la siguiente suma de monomios:

$$\frac{7}{2} a^2 b^3 - 6 a^2 b^3 + \frac{1}{2} a^2 b^3 - 3 a^2 b^3$$

según lo dicho, sumamos los coeficientes y no variamos la parte literal:

$$\left(\frac{7}{2} - 6 + \frac{1}{2} - 3\right) a^2 b^3 = -5 a^2 b^3$$

Otro ejemplo:

$$\frac{2}{5} a x - \frac{3}{4} a x + \frac{1}{2} a x - \frac{3}{10} a x = \left(\frac{2}{5} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{3}{10}\right) a x = \frac{-3}{20} a x$$

Si los monomios no son semejantes la suma no nos puede proporcionar otro monomio. Así, la suma

$$3 x + \frac{1}{2} x^2 y + 3 a b$$

no se puede realizar, en el sentido visto antes, pues no son monomios semejantes.

---

* En el apartado 1.2.2. se aclara el concepto de suma algebraica.

1.1.2. Producto de monomios

El producto de dos monomios es otro monomio, que tiene por coeficiente el producto de los coeficientes y la parte literal está formada por las letras contenidas en los dos monomios, cada una de ellas con un exponente que es la suma de sus exponentes en cada uno de los factores.

Veamos un ejemplo: Tratamos de calcular el siguiente producto:

$$(4\,x^2\,y^3)\cdot\left(\frac{3}{4}\,x\,y^3\right)$$

también puede escribirse este producto sin utilizar los paréntesis:

$$4\,x^2\,y^3\cdot\frac{3}{4}x\,y^3$$

su producto es

$$4\cdot\frac{3}{4}x^2\,x\,y^3\cdot y^3 = 3\,x^3\,y^6$$

Observemos que el grado del monomio producto es igual a la suma de los grados de los monomios factores. En el producto que acabamos de averiguar, el grado del primer monomio es 5 y en el segundo monomio el grado es 4, lógicamente el grado del monomio producto es 4 + 5 = 9 como se puede comprobar.

Esta norma que acabamos de exponer para multiplicar monomios, se puede generalizar inmediatamente, al producto de varios monomios, como ponemos de manifiesto en el siguiente ejemplo:

$$\left(\frac{3}{5}\,a^2\,b\right)\cdot\left(-\frac{10}{9}\,a\,b\,x^2\right)\cdot\left(-\frac{2}{15}\,a\,b\,x^2\right)=$$

$$=\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{10}{9}\right)\cdot\left(-\frac{2}{15}\right)\,a^2b\,abx^2\,abx^2=\frac{4}{45}a^4\,b^3\,x^4$$

1.1.3. Cuadrado y cubo de un monomio

Como consecuencia de lo visto en el párrafo anterior, podemos obtener el cuadrado y el cubo de un monomio. En definitiva, se trata de un producto de dos o tres factores iguales, según sea el cuadrado o el cubo. Con unos ejemplos, esperamos dejarlo lo suficientemente claro:

$$(6\,a\,b)^2 = (6\,a\,b)\cdot(6\,a\,b) = 3\,6\,a^2\,b^2$$

$$(16\,x^3\,y\,z^4)^2 = (16\,x^3\,y\,z^4)\cdot(16\,x^3\,y\,z^4) = 256\,x^6\,y^2\,z^8$$

$$\left(-\frac{2}{3}\,a^2\,b^3\,c^4\right)^2=\left(-\frac{2}{3}\,a^2\,b^3\,c^4\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\,a^2\,b^3\,c^4\right)=\frac{4}{9}a^4\,b^6\,c^8$$

$$(6\,a^2\,b)^3 = (6\,a^2\,b)\cdot(6\,a^2\,b)\cdot(6\,a^2\,b) = 216\,a^6\,b^3$$

$$\left(\frac{3}{4}\,a\,x^2\right)^3=\left(\frac{3}{4}\,a\,x^2\right)\left(\frac{3}{4}\,a\,x^2\right)\left(\frac{3}{4}\,a\,x^2\right)=\frac{27}{64}\,a^3\,x^6$$

$$\left(-\frac{4}{5}\ a\ b\ c^4\right)^3 = \left(-\frac{4}{5}\ a\ b\ c^4\right)\left(-\frac{4}{5}\ a\ b\ c^4\right)\left(-\frac{4}{5}\ a\ b\ c^4\right) =$$

$$= -\frac{64}{125}\ a^3\ b^3\ c^{12}$$

1.1.4. Cociente de dos monomios

El cociente de dos monomios es otro monomio cuyo coeficiente es igual al cociente de los coeficientes del dividendo y del divisor, siendo el exponente de una letra en el monomio cociente el exponente del dividendo disminuido en su exponente en el divisor.

Veamos algunos ejemplos:

$$50\ a^4\ x^5 : 5\ a^2\ x^3 = \frac{50}{5}\ a^2\ x^2 = 10\ a^2\ x^2$$

$$(4\ x^2\ y^3 : z^4) : (-6\ x\ y^2\ z^3) = -\frac{4}{6}\ x\ y\ z = -\frac{2}{3} x\ y\ z$$

En ocasiones el cociente de dos monomios se suele expresar así:

$$\frac{-\frac{4}{5}\ a^2\ x^5\ y}{\frac{2}{3}\ a^2\ x^3} = -\left(\frac{4}{5} : \frac{2}{3}\right) a^{2-2} \cdot x^{5-3} \cdot y = -\frac{6}{5} x^2\ y$$

Analizando estos ejemplos podemos afirmar que el cociente de dos monomios es otro monomio siempre que el dividendo contenga todas las letras del divisor con exponentes iguales o mayores.

En ninguno de los ejemplos siguientes se reduce a un monomio los cocientes indicados:

$$\frac{10\ a^4\ x^3}{5\ a^2\ x\ y^2} = \frac{10\ a^2\ x^2}{5\ y^2} = 2\ \frac{a^2\ x^2}{y^2}$$

$$\frac{12\ a^3\ x^2}{7\ a^2\ x^3} = \frac{12}{7}\ \frac{a}{x}$$

Ejercicios y ejemplos

1. Calcular el valor numérico de la siguiente expresión algebraica:

$$\frac{x^2 - x\ y}{x^2 - 2\ x\ y + y^2}$$

cuando $x = 7$ e $y = -2$.

Basta sustituir las letras por sus correspondientes valores:

$$\frac{7^2 - 7\ (-2)}{7^2 - 2 \cdot 7\ (-2) + (-2)^2} = \frac{49 + 14}{49 + 28 + 4} = \frac{63}{81} = \frac{7}{9}$$

2. Comprobar que cuando a = − 5 y b = + 3 las expresiones algebraicas siguientes tienen el mismo valor

$$a^2 - a\,b + b^2,\ \frac{a^3 + b^3}{a + b},\ (a + b)^2 - 3\,a\,b$$

En efecto, sustituyendo los valores de a y b obtenemos:

$$a^2 - a\,b + b^2 = (-5)^2 - (-5)\cdot 3 + 3^2 = 25 + 15 + 9 = 49$$

$$\frac{a^3 + b^3}{a + b} = \frac{(-5)^3 + 3^3}{-5 + 3} = \frac{-125 + 27}{-2} = 49$$

$$(a + b)^2 - 3\,a\,b = (-5 + 3)^2 - 3\,(-5)\cdot 3 = 4 + 45 = 49$$

3. Efectuar la siguiente suma: $-\frac{5}{4}a^3\,b^2\,x + \frac{5}{2}a^3\,b^2\,x - \frac{4}{7}a^3\,b^2\,x$

$$-\frac{5}{4}a^3\,b^2\,x + \frac{5}{2}a^3\,b^2\,x - \frac{4}{7}a^3\,b^2\,x = \left(-\frac{5}{4} + \frac{5}{2} - \frac{4}{7}\right)a^3\,b^2\,x = \frac{19}{28}a^3\,b^2\,x$$

4. ¿Cuál es el grado del monomio $-\frac{9}{3}a^5\,x^2\,y^3$?

Respecto a la letra *a* es: 5
Respecto a la letra *x* es: 2
Respecto a la letra *y* es: 3

El grado del monomio es: 5 + 2 + 3 = 10

5. Efectuar el siguiente producto: $\left(\frac{11}{3}\,a\,b^3\,x^2\right)\cdot\left(-\frac{6}{5}\,a^3\,b^2\right)$

$$\left(\frac{11}{3}\,a\,b^3\,x^2\right)\cdot\left(-\frac{6}{5}\,a^3\,b^2\right) = -\frac{11}{3}\cdot\frac{6}{5}\,a\,a^3\,b^3\,b^2\,x^2 = \frac{-22}{5}a^4\,b^5\,x^2$$

6. Efectuar el producto de los tres monomios siguientes:

$$\left(\frac{3}{5}\,a^2\,b\right)\left(-\frac{10}{9}\,a\,b\,x^2\right)\left(-\frac{2}{15}\,a\,b\,x^2\right)$$

$$\left(\frac{3}{5}\,a^2\,b\right)\cdot\left(-\frac{10}{9}\,a\,b\,x^2\right)\left(-\frac{2}{15}\,a\,b\,x^2\right) =$$

$$= \frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{10}{9}\right)\cdot\left(-\frac{2}{15}\right)a^4\,b^3\,x^4 = \frac{4}{45}a^4\,b^3\,x^4$$

7. Calcular el cociente siguiente: $15\ a^4\ b^2 : 3\ a\ b$

$$\frac{15\ a^4\ b^2}{3\ a\ b} = \frac{15}{3}\ a^{4-1}\ b^{2-1} = 5\ a^3\ b$$

8. Averiguar el cociente de los siguientes monomios:

$$9\ a^3\ b^4\ c^2 : -\ 12\ a\ b^2\ c^3$$

$$\frac{9\ a^3\ b^4\ c^2}{-12\ a\ b^2 c^3} = -\frac{9}{12}\ \frac{a^2\ b^2}{c} = -\frac{3}{4}\ \frac{a^2\ b^2}{c}$$

Observemos que en este caso no obtenemos un monomio, los dos monomios dados no cumplen la condición de divisibilidad expuesta en el párrafo 1.1.4.

1.2. Polinomios

En un principio, entendemos por polinomio una suma algebraica de varios monomios. Cada uno de ellos constituye un término del polinomio.

Así, las siguientes expresiones algebraicas:

$$5\ a^2\ b - 2\ a\ b^2 - \frac{1}{2}\ a^2\ x + 3\ b$$
$$7\ x^3 + 2\ x^4 + 3\ x - 2\ x^2$$
$$4\ x^2\ y\ z - \frac{1}{2}\ x\ y^2\ z - 4\ a^2\ b$$

son polinomios.

Habitualmente, hay polinomios que reciben nombres especiales: al polinomio que tiene dos términos se le llama *binomio* y si tiene tres términos se llama *trinomio*.

Son binomios las siguientes expresiones:

$$3x^2 + 2y,\quad \frac{1}{2}\ x^2\ y - 3a^2\ b,\quad -5\ x - 3$$

Y son trinomios las expresiones algebraicas que escribimos a continuación:

$$2x^2 + 3x - 1,\quad 4a - 2b - 3c,\quad 2a^2\ b - 4a\ b^2 - \frac{1}{2}$$

De lo dicho se desprende que un polinomio está formado por monomios unidos por los signos + y −. Se toma como norma escribirlo en forma reducida, esto es, realizando la suma de los monomios semejantes que en él figuran.

Supongamos el polinomio: $4x^2\ a - 3xa - 7x^2\ a + 3 - 2xa + a - 3xa - 5$ sumando los monomios semejantes que en él aparecen, podemos escribir:

$$(4 - 7)\ x^2\ a + (-3 - 2 - 3)\ x\ a + (3 - 5) + a = -3x^2\ a - 8xa - 2 + a$$

El polinomio así obtenido es equivalente al polinomio propuesto, pero no contiene términos semejantes. Muchas veces la operación que acabamos de hacer se conoce con el nombre de *reduc-*

ción de términos semejantes, o más brevemente, obtención del polinomio reducido. En adelante, consideraremos y escribiremos los polinomios sin términos semejantes, o sea, polinomios reducidos.

Grado de un polinomio, respecto a una letra es el grado del término de mayor grado respecto a esta letra. El polinomio:

$$3x^5 y^4 - 3x^3 y^2 - 2xy^6$$

es de quinto grado respecto a la x y de sexto grado respecto a la y.

Cuando no se indican las letras respecto a las cuales se expresa el grado, se entiende que nos referimos a todas ellas. Así, podemos decir que el grado del polinomio anterior es 9.

Cuando un polinomio tiene todos los monomios que lo integran del mismo grado diremos que es un polinomio homogéneo. El polinomio siguiente:

$$\frac{2}{3} x^3 y + x^2 y^2 - 3xy^3$$

es homogéneo, todos los monomios tienen de grado 4.

Por comodidad y motivos que veremos posteriormente, los polinomios suelen presentarse ordenados, con esto queremos decir que los exponentes de una letra aparecen ordenados en orden creciente o decreciente. Así el polinomio

$$3a^3 b + 2a^2 b^2 - ab^3$$

está ordenado en orden creciente respecto a la letra b y en orden decreciente respecto a la letra a.

Si consideramos ahora el polinomio

$$7x^4 + 2x^3 - 3x^2 - x + 1$$

podemos afirmar que está escrito en orden decreciente respecto a la única letra o variable x, sería el mismo polinomio si lo presentamos escrito en orden creciente:

$$1 - x - 3x^2 + 2x^3 + 7x^4$$

Un polinomio es completo si contiene un término de cada grado desde el mayor hasta el de grado cero*. En el caso de que no suceda esto diremos que el polinomio es incompleto. Algunos ejemplos nos ayudarán a comprender lo dicho:

Polinomios completos:

$$7x^3 - 3x^2 + 2x - 1$$

$$7x^2 - 2x - 1$$

Polinomios incompletos:

$$7x^6 - 3x^2 + 2x - 1$$

* Un término de grado cero corresponde al término independiente de la letra (basta recordar que cualquier letra con exponente cero es uno).

faltan los términos en x^5, x^4 y x^3, es, por lo tanto, un polinomio incompleto de sexto grado.

$$3x^3 - x$$

faltan los términos en x^2 y término de grado cero, llamado también término independiente.

1.2.1. Suma de polinomios

La suma de varios polinomios es otro polinomio formado por todos los términos de estos polinomios.

Busquemos la suma de los siguientes polinomios:

$$7x^3 + 2x^2 - 5x - 1,\ 3x^2 - 1,\ 4x^4 - 3x^2 - 2x - 1,\ -x^3 - x^2 - x + 10$$

$$(7x^3 + 2x^2 - 5x - 1) + (3x^2 - 1) + (4x^4 - 3x^2 - 2x - 1) + (-x^3 - x^2 - x + 10)$$

$$7x^3 + 2x^2 - 5x - 1 + 3x^2 - 1 + 4x^4 - 3x^2 - 2x - 1 - x^3 - x^2 - x + 10$$

reduciendo términos semejantes, obtenemos la suma de estos cuatro polinomios:

$$4x^4 + 6x^3 + x^2 - 8x + 7$$

1.2.2. Diferencia de dos polinomios

Para restar un polinomio de otro dado basta sumarle el polinomio simétrico, obtenido cambiando los signos de cada uno de sus términos.

Calculamos la diferencia entre los polinomios:

$$2x^3 - x^2 + x - 1 \quad y \quad 4x^2 - 2x - 10$$

averiguamos en primer lugar el simétrico del segundo polinomio:

$$-4x^2 + 2x + 10$$

según lo indicado podemos escribir:

$$(2x^3 - x^2 + x - 1) - (4x^2 - 2x - 10) = (2x^3 - x^2 + x - 1) +$$

$$+(-4x^2 + 2x + 10) = 2x^3 - x^2 + x - 1 - 4x^2 + 2x + 10 =$$

$$= 2x^3 - 5x^2 + 3x + 9$$

Dados varios polinomios se puede realizar la llamada suma algebraica de polinomios que consiste, en definitiva, en combinar adecuadamente las operaciones de suma y resta de polinomios.

A continuación escribimos y realizamos una suma algebraica:

$$(3x^3 - x^2 - x + 7) - (2x^2 - x - 7) + (4x^3 - 2x^2 - 7x + 2)$$

para simplificar y evitar confusiones podemos esquematizar esta operación colocando ordenadamente los polinomios:

$$\begin{array}{r} 3\,x^3 - x^2 - x + 7 \\ -2x^2 + x + 7 \\ \hline 4\,x^3 - 2x^2 - 7x + 2 \\ \hline 7\,x^3 - 5x^2 - 7x + 16 \end{array} \longrightarrow \textit{Resultado}$$

De esta manera la reducción de los términos es inmediata y se obtiene el resultado ya ordenado. Obsérvese que el segundo polinomio lo hemos colocado con el signo de sus coeficientes cambiados, hemos colocado directamente el polinomio simétrico.

1.2.3. Producto de un polinomio por un monomio

No tiene ninguna dificultad siguiendo las normas presentadas en el apartado 1.1.2: tenemos que multiplicar cada uno de los monomios que integran el polinomio por el monomio. Obtenemos otro polinomio de grado igual a la suma de los grados de los factores.

Calculemos el siguiente producto:

$$(2\,a\,x^2 + 5\,b\,x - 4\,c) \cdot (-4\,a\,b\,x^4)$$

por comodidad lo escribiremos así:

$$\begin{array}{r} 2\,a\,x^2 + 5\,b\,x - 4\,c \\ -4\,a\,b\,x^4 \\ \hline -8\,a^2b\,x^6 - 20\,a\,b^2\,x^5 + 16\,a\,b\,c\,x^4 \end{array}$$

1.2.4. Producto de dos polinomios

Es una generalización del caso anterior. Vamos a estudiarlo realizando dos ejemplos.

Calculemos el siguiente producto:

$$(4\,x^2 - x\,y + 2\,y^2) \cdot (3\,x - y)$$

$$\begin{array}{r} 4\,x^2 - x\,y + 2\,y^2 \\ 3\,x - y \\ \hline 12\,x^3 - 3\,x^2\,y + 6\,x\,y^2 \\ -4\,x^2\,y + x\,y^2 - 2\,y^3 \\ \hline 12\,x^3 - 7\,x^2\,y + 7\,x\,y^2 - 2\,y^3 \end{array} \longrightarrow \textit{Resultado}$$

El segundo ejemplo consiste en realizar el producto:

$$(9\,x^2 - 3\,x\,y + y^2) \cdot (9\,x^2 + 5\,x\,y - y^2)$$

$$
\begin{array}{l}
9\,x^2 - 3\,x\,y + y^2 \\
9\,x^2 + 5\,x\,y - y^2 \\
\hline
81\,x^4 - 27\,x^3\,y + 9\,x^2\,y^2 \\
\qquad 45\,x^3\,y - 15\,x^2\,y^2 + 5\,xy^3 \\
\qquad\qquad - 9\,x^2\,y^2 + 3\,xy^3 - y^4 \\
\hline
81\,x^4 + 18\,x^3\,y - 15\,x^2\,y^2 + 8\,xy^3 - y^4 \longrightarrow \textit{Resultado}
\end{array}
$$

Analizando estos ejemplos llegamos a las siguientes conclusiones:

- El término del producto que resulta de multiplicar los términos de mayor grado de ambos factores no tiene semejante, y, por tanto, no puede reducirse.

- Tampoco tiene semejante ni puede reducirse el término del producto que procede de multiplicar los términos de menor grado de ambos factores.

- El producto tendrá por lo menos dos términos, y como máximo, tantos como indique el producto de los números de términos del multiplicando y multiplicador.

- El grado del producto es la suma de los grados de los factores.

Si bien hemos considerado productos de dos factores, de dos polinomios, no hay inconveniente para aumentar el número de factores. Vamos a realizar el producto de tres polinomios.

$$(a^2 + ab + b^2) \cdot (a - b) \cdot (a + b)$$

Multiplicamos los dos primeros polinomios y el resultado lo multiplicamos por el tercer polinomio:

$$
\begin{array}{l}
a^2 + a\,b + b^2 \\
a - b \\
\hline
a^3 + a^2\,b + ab^2 \\
\quad - a^2\,b - ab^2 - b^3 \\
\hline
a^3 \qquad\qquad - b^3 \longrightarrow \text{Producto de los dos primeros polinomios} \\
a + b \\
\hline
a^4 \qquad\qquad - ab^3 \\
\qquad a^3\,b \qquad\qquad - b^4 \\
\hline
a^4 + a^3\,b \quad - ab^3 - b^4 \longrightarrow \textit{Resultado}
\end{array}
$$

1.2.5. División de un polinomio por un monomio

Para dividir un polinomio por un monomio se divide cada término del polinomio por el monomio y se suman los cocientes parciales.

Averiguamos el siguiente cociente:

$$(8\,a^5\,b - 5\,a^4\,b^2 + 14\,a^3\,b^5) : (-4\,a^3\,b)$$

Calculamos los cocientes parciales:

$$8\ a^5\ b : -4\ a^3\ b = -2\ a^2$$
$$-5\ a^4\ b^2 : -4\ a^3\ b = \frac{5}{4} a\ b$$
$$14\ a^3\ b^5 : -4\ a^3\ b = \frac{-14}{4} b^4$$

El cociente pedido es: $-2\ a^2 + \frac{5}{4} a\ b - \frac{14}{4} b^4$

Como consecuencia para que un polinomio sea divisible por un monomio es necesario y suficiente que todos sus términos sean divisibles por este monomio. Así el polinomio $8\ x^5\ y - 12\ x^2\ y^2 + 12\ x^3\ y^5$ no es divisible por $-2\ x^3\ y$ porque el segundo monomio del polinomio $-12\ x^2\ y^2$ no es divisible por $-2\ x^3\ y$.

1.2.6. División de dos polinomios

Dados dos polinomios, llamados dividendo y divisor, llamamos cociente a otro polinomio que multiplicado por el divisor, nos reproduce el dividendo.

Averiguar el cociente de dos polinomios no es complicado, basta recurrir a los procedimientos vistos en apartados anteriores.

Estudiemos algunos ejemplos, que nos aportarán más luz que largas explicaciones.

Calculemos el siguiente cociente:

$$(3\ a^3 + 10\ a^2 - 5\ a + 12) : (a + 4)$$

utilizamos una disposición semejante a la empleada en la división con números:

	$3\ a^3 + 10\ a^2 - 5\ a + 12$	$a + 4$
$-3\ a^2\ (a + 4) \longrightarrow$	$-3\ a^3 - 12\ a^2$	$3\ a^2 - 2\ a + 3$ Cociente
	$0 - 2\ a^2 - 5\ a$	
$-(-2a)\ (a + 4) \longrightarrow$	$+ 2\ a^2 + 8\ a$	
	$0 + 3\ a + 12$	
$-3\ (a + 4) \longrightarrow$	$-3\ a - 12$	
	$0 \longrightarrow$ Resto	

Lo que hemos hecho ha sido dividir el primer monomio del dividendo por el primer monomio del divisor

$$3\ a^3 : a = 3\ a^2$$

$3\ a^2$ es el primer monomio del cociente, lo multiplicamos por el divisor

$$3\ a^2 \cdot (a + 4) = 3\ a^3 + 12\ a^2$$

restamos de los dos primeros monomios del dividendo el resultado que acabamos de obtener (en el lado izquierdo aparece esta operación indicada con el correspondiente signo $-$, pues estamos restando):

$$(3\ a^3 + 10\ a^2) - (3\ a^3 + 12\ a^2) = 3\ a^3 + 10\ a^2 - 3\ a^3 - 12\ a^2 = -2\ a^2$$

Tomamos este resultado o resto parcial con el tercer monomio del dividendo y realizamos una operación semejante, operación repetida hasta haber tomado todos los monomios del dividendo, o para ser más exactos hasta que el grado del polinomio resto sea menor que el grado del polinomio cociente.

Otro ejemplo:

$$(7x^3 + 16\,x^2\,y - x\,y^2 - 10\,y^3) : (x^2 + 3\,x\,y + y^2)$$

$$\begin{array}{rl|l} 7\,x^3 + 16\,x^2\,y - x\,y^2 - 10\,y^3 & & x^2 + 3\,x\,y + y^2 \\ \cline{3-3} -7\,x^3 - 21\,x^2\,y - 7\,x\,y^2 & & 7\,x - 5\,y \longrightarrow \text{Cociente} \\ \cline{1-1} \quad -5\,x^2\,y - 8\,x\,y^2 - 10\,y^3 & & \\ \quad +5\,x^2\,y + 15\,x\,y^2 + 5\,y^3 & & \\ \cline{1-1} \quad 7\,x\,y^2 - 5\,y^3 & \longrightarrow \text{Resto} & \end{array}$$

Consideremos un último ejemplo

$$(3\,x^4 + 4\,x^2 - 5\,x + 3) : (x^2 - 2\,x + 3)$$

En este caso falta el término de tercer grado, para evitar confusiones, hasta adquirir más soltura, lo sustituiremos por $0\,x^3$, disponemos la operación así:

$$\begin{array}{rl|l} 3\,x^4 + 0\,x^3 + 4\,x^2 - 5\,x + 3 & & x^2 - 2\,x + 3 \\ \cline{3-3} -3\,x^4 + 6\,x^3 - 9\,x^2 & & 3\,x^2 + 6\,x + 7 \longrightarrow \text{Cociente} \\ \cline{1-1} \quad +6\,x^3 - 5\,x^2 - 5\,x & & \\ \quad -6\,x^3 + 12\,x^2 - 18\,x & & \\ \cline{1-1} \quad +7\,x^2 - 23\,x + 3 & & \\ \quad -7\,x^2 + 14\,x - 21 & & \\ \cline{1-1} \quad -9\,x - 18 & \longrightarrow \text{Resto} & \end{array}$$

Analizando estos ejemplos, podemos redactar las siguientes observaciones:

- El grado del cociente es igual a la diferencia de los grados del dividendo y el divisor.

- Cuando el polinomio dividendo es incompleto, podrá completarse poniendo términos de coeficiente cero, o dejar claros para los términos que falten, con la finalidad de dejar sitio a los términos que resulten después en las sucesivas multiplicaciones (ver el último ejemplo considerado).

- En la práctica no suelen escribirse después de cada resto parcial todos los términos sobrantes del dividendo, si bien mentalmente se consideran los polinomios totales.

- División *exacta* es aquella en que el resto es nulo. División *inexacta* es aquella en que el resto no es nulo. En general, cuando se llega a un dividendo parcial de grado inferior al del divisor, este dividendo parcial es el resto, y la división no es exacta.

- En toda división exacta, el primero y último términos del dividendo ordenado son divisibles por el primero y último término del divisor ordenado.

- Para que la división de dos polinomios sea posible es necesario que el dividendo sea de grado igual o mayor que el divisor.

Al igual que en las divisiones con números, entre los elementos de una división con polinomios se puede establecer una relación.

Llamando
D al polinomio dividendo
d al polinomio divisor
c al polinomio cociente
r al polinomio resto

De todo lo visto se desprende

$$D = d \cdot c + r$$

si dividimos los dos miembros de esta igualdad por d:

$$\frac{D}{d} = c + \frac{r}{d}$$

Al segundo miembro de esta igualdad se denomina cociente completo o exacto de los polinomios D y d.

Recurriendo al último ejemplo desarrollado podemos escribir la expresión anterior para un caso particular:

$$\frac{3x^4 + 4x^2 - 5x + 3}{x^2 - 2x + 3} = 3x^2 + 6x + 7 + \frac{-9x - 18}{x^2 - 2x + 3}$$

también se puede escribir; recordando la diferencia de polinomios.

$$\frac{3x^4 + 4x^2 - 5x + 3}{x^2 - 2x + 3} = 3x^2 + 6x + 7 - \frac{9x + 18}{x^2 - 2x + 3}$$

1.2.7. División de un polinomio por x − a

Sea un polinomio cualquiera, por ejemplo, de cuarto grado:

$$P = p_0 x^4 + p_1 x^3 + p_2 x^2 + p_3 x + p_4$$

pretendemos encontrar otro polinomio C y un número racional r, tal que:

$$P = C \cdot (x - a) + r$$

Como P es de cuarto grado, el grado del segundo miembro de la expresión anterior debe ser también cuatro; r es un número (polinomio de grado cero), luego el grado del producto C (x − a) ha dé ser el cuarto. Como el grado de un producto es la suma de grados de los factores y x − a es de primer grado, C tendrá que ser de tercer grado, es un polinomio de la forma

$$C = c_0 x^3 + c_1 x^2 + c_2 x + c_3$$

Luego:

$$p_0 x^4 + p_1 x^3 + p_2 x^2 + p_3 x + p_4 = (c_0 x^3 + c_1 x^2 + c_2 x + c_3)(x - a) + r$$

realizando este producto indicado:

$$\begin{array}{l} c_0 x^3 + c_1 x^2 + c_2 x + c_3 \\ x - a \\ \hline c_0 x^4 + c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x \\ \qquad - c_0 a x^3 - c_1 a x^2 - c_2 a x - c_3 a \\ \hline c_0 x^4 + (c_1 - c_0 a) x^3 + (c_2 - c_1 a) x^2 + (c_3 - c_2 a) x - c_3 a \end{array}$$

por tanto:

$$p_0 x^4 + p_1 x^3 + p_2 x^2 + p_3 x + p_4 = c_0 x^4 + (c_1 - a \cdot c_0) x^3 + (c_2 - a c_1) x^2 + (c_3 - a c_2) x + r - a \cdot c_3$$

al ser iguales, los coeficientes de los monomios de igual grado son iguales, es decir:

$$\left.\begin{array}{l} p_0 = c_0 \\ p_1 = c_1 - a \cdot c_0 \\ p_2 = c_2 - a \cdot c_1 \\ p_3 = c_3 - a \cdot c_2 \\ p_4 = r - a \cdot c_3 \end{array}\right\} \text{ luego } \left\{\begin{array}{l} c_0 = p_0 \\ c_1 = a \cdot c_0 + p_1 \\ c_2 = a \cdot c_1 + p_2 \\ c_3 = a \cdot c_2 + p_3 \\ r = a \cdot c_3 + p_4 \end{array}\right.$$

esto nos indica que si existe un polinomio C y el número r y que ambos son únicos, porque únicos son los coeficientes y resto que cumplen las condiciones exigidas en las expresiones anteriores, que además nos enseñan a formarlos, como veremos después.

La analogía entre el problema de la división entera entre números enteros y el hallar los polinomios C y r que cumplen.

$$P = C \cdot (x - a) + r$$

hace que a P le llamemos dividendo; a x - a, divisor, a C, cociente entero; a r, resto.

Antes de enunciar una regla práctica, con el fin de fijar ideas, vamos a resumir lo dicho:

— El cociente entero es de grado inferior en una unidad al del dividendo.

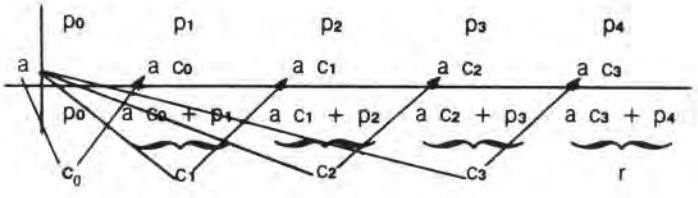
— El primer coeficiente del cociente es igual al primero del dividendo.

— El segundo coeficiente, se obtiene multiplicando el anterior por a y sumándole el segundo del dividendo.

— El tercer coeficiente del cociente es igual al anterior por a, más el tercero del dividendo; análogamente los demás.

— El resto, es el último término del cociente por *a* más el último del dividendo.

En la práctica, para mayor comodidad se suele disponer así:



Hemos multiplicado a por c_0, c_1, c_2, c_3 escribiéndolos como indican las flechas, obteniendo los coeficientes y el resto. Después de esto podemos escribir el polinomio C pues conocemos su grado.

En primer lugar, vamos a dividir $2x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 6$ por $x - 3$

	2	−1	−2	3	−6
3		6	15	39	126
	2	5	13	42	120

el cociente es: $2x^3 + 5x^2 + 13x + 42$

el resto es: 120

Dividimos ahora, $x^3 - 7$ por $x - 2$

Cuando el polinomio es incompleto, los términos que faltan los sustituimos por cero:

	1	0	0	−7
2		2	4	8
	1	2	4	1

el cociente es: $x^2 + 2x + 4$

el resto es: 1

Es evidente, que dividir por $x + a$, es dividir por $x - (-a)$

Vamos hallar el cociente y el resto de $x^3 - 6x^2 + 5x + 3$ por $x + 2$

	1	−6	5	3
−2		−2	16	−42
	1	−8	21	−39

el cociente es: $x^2 - 8x + 21$

el resto es: -39

Este procedimiento utilizado para dividir suele llamarse regla de *Ruffini*.

Para terminar, queremos indicar dos consecuencias importantes:

i) Un polinomio es divisible por $x - a$, cuando el resto de su división por $x - a$ es cero.

Por ejemplo, $x^5 + 1$ es divisible por $x + 1$, para ello comprobamos que el resto es cero:

	1	0	0	0	0	1
−1		−1	1	−1	1	−1
	1	−1	1	−1	1	0

su cociente es: $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

luego en este caso, podemos escribir:

$$x^5 + 1 = (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$$

ii) El valor numérico de un polinomio de una variable para $x = a$, es el resto de la división de dicho polinomio por $x - a$. En efecto, hemos visto que:

$$a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = (c_0 x^3 + c_1 x^2 + c_2 x + c_3) \cdot (x - a) + r$$

el valor numérico cuando $x = a$ es:

$$a_0 a^4 + a_1 a^3 + a_2 a^2 + a_3 a + a_4 = (c_0 a^3 + c_1 a^2 + c_2 a + c_3)(a - a) + r$$

$$\text{luego, } a_0 a^4 + a_1 a^3 + a_2 a^2 + a_3 a + a_4 = r$$

Reciprocamente, el resto de un polinomio de una variable cuando se le divide por $x - a$, es el valor numérico de dicho polinomio cuando $x = a$.

Vamos a calcular el resto de la división:

$$(5x^3 - 14x^2 - 10) : (x - 3)$$

según lo visto hallamos el valor numérico cuando $x = 3$

$$r = 5 \cdot 3^3 - 14 \cdot 3^2 - 10 = -1$$

Ahora, hallamos el valor numérico, para $x = 2$, del polinomio:

$$P = x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 15x^2 + 7$$

Realizamos la división de este polinomio por $x - 2$

	1	−6	2	15	0	7
2		2	−8	−12	6	12
	1	−4	−6	3	6	19

luego el valor numérico es 19.

Ejercicios y ejemplos

1. Hallar la suma de los polinomios:

$$(10x^3 + 2x^2 - 6x + 15) + (4x + 6 - 4x^3) - (5x^3 - 10 + 4x^2)$$

Lo primero que hacemos es quitar los paréntesis teniendo cuidado del signo que antecede a cada uno de ellos:

$$10x^3 + 2x^2 - 6x + 15 + 4x + 6 - 4x^3 - 5x^3 + 10 - 4x^2$$

Reduciendo términos semejantes:

$$x^3 - 2x^2 - 2x + 31$$

si los disponemos ordenados de la forma que hemos visto en el apartado 1.2.2.

$$\begin{array}{r} 10\,x^3 + 2\,x^2 - 6\,x + 15 \\ -\,4\,x^3 \qquad\quad + 4\,x + 6 \\ -\,5\,x^3 - 4\,x^2 \qquad + 10 \\ \hline x^3 - 2\,x^2 - 2\,x + 31 \end{array} \longrightarrow \text{Resultado}$$

2. Averiguar la diferencia:

$$(5\,x^2 + 2\,a\,x\,y - 6\,y^2 + 3) - (4\,x^2 + 3\,a\,x\,y + 8\,y^2 - 5)$$

Recordamos que para restar basta cambiar el signo al polinomio segundo:

$$5\,x^2 + 2\,a\,x\,y - 6\,y^2 + 3 - 4\,x^2 - 3\,a\,x\,y - 8\,y^2 + 5 = x^2 - a\,x\,y - 14\,y^2 + 8$$

También podemos realizar esta operación escribiendo el polinomio minuendo y debajo el polinomio sustraendo con los signos de todos sus términos cambiados, de manera que se correspondan los términos semejantes:

$$\begin{array}{r} 5\,x^2 + 2\,a\,x\,y - 6\,y^2 + 3 \\ -\,4\,x^2 - 3\,a\,x\,y - 8\,y^2 + 5 \\ \hline x^2 - a\,x\,y - 14\,y^2 + 8 \end{array} \longrightarrow \text{Resultado}$$

se puede demostrar que sumando este resultado con el sustraendo da el minuendo y puede servirnos para comprobar que el resultado ha sido bueno.

3. Efectuar el siguiente producto:

$$(3\,a^2 - 6\,a\,b + 12\,b^2) \cdot \left(\frac{14}{3}\,a\,b\right)$$

Disponiendo los factores de la forma ya vista:

$$\begin{array}{l} 3\,a^2 - 6\,a\,b + 12\,b^2 \\ \frac{14}{3}\,a\,b \\ \hline 14\,a^3\,b - 28\,a^2\,b^2 + 56\,a\,b^3 \end{array} \longrightarrow \text{Resultado.}$$

4. Efectuar el producto:

$$(2\,xy^3 + 3\,x^3\,y + 2\,x^4 - y^4)\,(3\,x^3 - 2\,x\,y^2 + y^3)$$

Como de costumbre ordenamos los polinomios con relación a las potencias decrecientes o crecientes de una misma letra:

$$\begin{array}{l} 2\,x^4 + 3\,x^3\,y + 2\,x\,y^3 - y^4 \\ 3\,x^3 - 2\,x\,y^2 + y^3 \\ \hline 6\,x^7 + 9\,x^6\,y \qquad\quad + 6\,x^4\,y^3 - 3\,x^3\,y^4 \\ \qquad\quad - 4\,x^5\,y^2 - 6\,x^4\,y^3 \qquad\quad - 4\,x^2\,y^5 + 2\,x\,y^6 \\ \qquad\qquad\quad 2\,x^4\,y^3 + 3\,x^3\,y^4 \qquad\quad + 2\,x\,y^6 - y^7 \\ \hline 6\,x^7 + 9\,x^6\,y - 4\,x^5\,y^2 + 2\,x^4\,y^3 \qquad\quad - 4\,x^2\,y^5 + 4\,x\,y^6 - y^7 \end{array}$$

5. Realizar el siguiente cociente:

$$\left[(x + y)(x - y) + 4z(y - z)\right] : (x + y - 2z)$$

En primer lugar realizamos las operaciones indicadas en el polinomio dividendo:

$$x^2 - y^2 + 4yz - 4z^2$$

por lo tanto, tenemos que averiguar el siguiente cociente:

$$(x^2 - y^2 + 4yz - 4z^2) : (x + y - 2z)$$

Lo calculamos disponiéndolo de la forma habitual:

$$\begin{array}{l|l}
x^2 - y^2 + 4yz - 4z^2 & x + y - 2z \\
\cline{2-2}
-x^2 - xy + 2xz & x - y + 2z \longrightarrow \text{Cociente} \\
\cline{1-1}
0 - xy + 2xz - y^2 + 4yz - 4z^2 & \\
+xy + y^2 - 2yz & \\
\cline{1-1}
+2xz + 0 + 2yz - 4z^2 & \\
-2xz - 2yz + 4z^2 & \\
\cline{1-1}
0 \longrightarrow \text{Resto} &
\end{array}$$

6. Averiguar el cociente:

$$\left(\frac{9}{16}m^4 - \frac{7}{8}m^3 n + \frac{19}{36}m^2 n^2 + \frac{1}{6}m n^3\right) : \left(\frac{3}{2}m + \frac{1}{3}n\right)$$

Utilizando el procedimiento presentado en otras ocasiones:

$$\begin{array}{l|l}
\frac{9}{16}m^4 - \frac{7}{8}m^3 n + \frac{19}{36}m^2 n^2 + \frac{1}{6}m n^3 & \frac{3}{2}m + \frac{1}{3}n \\
\cline{2-2}
-\frac{9}{16}m^4 - \frac{1}{8}m^3 n & \frac{3}{8}m^3 - \frac{2}{3}m^2 n + \frac{1}{2}m n^2 \\
\cline{1-1}
0 - m^3 n + \frac{19}{36}m^2 n^2 & \\
+m^3 n + \frac{2}{9}m^2 n^2 & \\
\cline{1-1}
0 + \frac{3}{4}m^2 n^2 + \frac{1}{6}m n^3 & \\
-\frac{3}{4}m^2 n^2 - \frac{1}{6}m n^3 & \\
\cline{1-1}
0 - 0 &
\end{array}$$

2. MAXIMO COMUN DIVISOR Y MINIMO COMUN MULTIPLO DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

2.1. Descomposición en factores

Lo mismo que los números se podían descomponer en factores y a partir de ellos obtener el máximo común divisor (m.c.d.) y el mínimo común múltiplo (m.c.m.), las expresiones algebraicas se pueden convertir en factores y operar para averiguar el m.c.d. y el m.c.m. de la misma manera.

Descomponer en factores una expresión algebraica es hallar dos o más expresiones cuyo producto sea igual a la expresión dada.

Existen muchos procedimientos, algunos de los cuales vamos a enumerar a continuación, pero al descomponer en factores una expresión se deben sacar los factores comunes antes de emplear otros métodos. Algunos ejemplos nos aclararán lo dicho:

$$2\,a\,b^2 - 4\,a\,c^2 + 6\,a\,d^2 = 2\,a\,(b^2 - 2\,c^2 + 3\,d^2)$$

observemos que la expresión dada la hemos transformado en producto de otras dos, siendo 2 a un factor que estaba contenido en todos los términos del polinomio de partida.

Otro caso:

$$2\,a\,b\,(m + n) - 3\,a\,(m + n) - a^2\,(m + n) = (m + n)\,(2\,a\,b - 3\,a - a^2)$$

en esta ocasión el factor común era un binomio, m + n. hemos llegado a la misma conclusión que en el ejemplo anterior; la expresión algebraica dada la hemos expresado como producto de otras dos.

Insistimos con otro ejemplo:

$$x\,(2\,a - 3\,b) + y\,(3\,b - 2\,a) + z\,(2\,a - 3\,b)$$

parece evidente que el factor común es *2 a − 3 b,* teniendo presente que en el segundo término aparece *3 b − 2 a,* cambiando su orden lo podemos escribir:

$$x\,(2\,a - 3\,b) - y\,(2\,a - 3\,b) + z\,(2\,a - 3\,b) = (2\,a - 3\,b)\,(x - y + z)$$

Como ya indicábamos antes, existen otros procedimientos fundados en procesos operacionales estudiados en este tema:

1. Si a y b son dos expresiones enteras es fácil de comprobar que:

$$a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)$$

por tanto, cuando tenemos una diferencia de cuadrados se descompone fácilmente en producto de dos factores.

Vamos a ver algún ejemplo y luego daremos una norma general.

$$a^2 - 25\,b^2 = (a + 5\,b)\,(a - 5\,b)$$

$$a^4 - 1 = (a^2 + 1)\,(a^2 - 1) = (a^2 + 1)\,(a + 1)\,(a - 1)$$

$$32\,x^2 - 98\,y^4 = 2\,(4\,x - 7\,y^2)\,(4\,x + 7\,y^2)$$

Se observa de inmediato lo realizado:

i) Se halla la raiz cuadrada de los dos términos que son cuadrados.
ii) Un factor es la suma de las raices cuadradas y el otro es la diferencia de estas raices cuadradas.

2. Un trinomio se llama cuadrado perfecto cuando dos de sus términos son cuadrados perfectos y positivos y el tercer término es el doble del producto de las bases de dichos cuadrados. Esquematizándolo como lo hicimos en el caso anterior; tenemos dos posibilidades:

$$a^2 + 2\,a\,b + b^2 = (a + b)\,(a + b) = (a + b)^2$$
$$a^2 - 2\,a\,b + b^2 = (a - b)\,(a - b) = (a - b)^2$$

luego un trinomio cuadrado perfecto se descompone en dos **factores iguales.**

Estudiemos algunos ejemplos:

$$9\,x^2\,y^2 - 12\,x\,y\,z + 4\,z^2 = (3\,x\,y - 2\,z)\,(3\,x\,y - 2\,z)$$
$$16\,a^2\,b^2 + 4\,a^2\,c^2 + 16\,a^2\,b\,c = (4\,a\,b + 2\,a\,c)\,(4\,a\,b + 2\,a\,c)$$

$$\frac{1}{4}x^2 + 4\,y^2 - 2\,x\,y = \left(\frac{1}{2}x - 2\,y\right)\left(\frac{1}{2}x - 2\,y\right)$$

$$4\,a^4\,b^2 + 12\,a^3\,b^3 + 9\,a^2\,b^4 = (2\,a^2\,b + 3\,a\,b^2)\,(2\,a^2\,b + 3\,a\,b^2)$$

2.2. M.c.d. de expresiones algebraicas

Acabamos de observar que factor común de varias expresiones algebraicas es otra expresión que divide exactamente a cada una de las primeras. Asi, el binomio $x - y$ es factor común de $(x - y)^2$ y de $x^2 - y^2$, por ejemplo.

M.c.d. de dos o más expresiones algebraicas es la expresión de mayor grado que divide exactamente a cada una de las primeras. Para obtener el m.c.d. de dos o más expresiones enteras, se descompone cada una en sus factores y se forma el producto de los factores comunes con el menor exponente.

Averiguamos, en primer lugar, el m. c. d. de los tres monomios siguientes:

$$2\,x^2\,y^3,\ 4\,x\,y^5,\ 18\,x^7\,y^2\,z$$

Los podemos escribir asi:

$$2\,x^2\,y^3,\ 2^2\,x\,y^5,\ 2 \cdot 3^2\,x^7\,y^2\,z$$

siguiendo la norma dada antes:

$$\text{m.c.d.} = 2\,x\,y^2$$

Tratemos ahora de averiguar el m.c.d. de los polinomios:

$$2\,x^4 + x^3,\ 2\,x^2 + x,\ x^3 - x^2$$

Expresamos estos polinomios en factores

$$2\,x^4 + x^3 = x^3\,(2\,x + 1)$$
$$2\,x^2 + x = x\,(2\,x + 1)$$
$$x^3 - x^2 = x^2\,(x - 1)$$

luego:

$$\text{m.c.d.} = x$$

BIBLIOTECA PUBLICA PTO. STA. MARIA

2.3. M. c. m. de expresiones algebraicas

Llamamos múltiplo común de varias expresiones enteras a otra expresión entera que puede ser dividida exactamente por aquéllas. Por ejemplo, $16\ x^4\ y^3$ es un múltiplo común de $2\ x\ y$, $4\ x^2\ y^2$ y $8\ x^3$.

M.c.m. de dos o más expresiones algebraicas es la expresión de menor grado que es divisible exactamente por todas ellas. Para obtener el m.c.m. de dos o más expresiones enteras, se descompone cada una en sus factores y se forma el producto de los factores comunes y no comunes con su mayor exponente.

Vamos a calcular el m.c.m. de los siguientes monomios:

$$16\ a,\ 8\ a^2\ x^3,\ 4\ a^4\ x$$

poniendo de manifiesto los factores de los coeficientes de estos monomios:

$$2^4\ a,\ 2^3\ a^2\ x^3,\ 2^2\ a^4\ x$$

luego:

$$\text{m.c.m.} = 2^4\ a^4\ x^3 = 16\ a^4\ x^3$$

Para finalizar, tratemos de calcular el m.c.m. de los polinomios:

$$x^2 - a^2,\ (x - a)^2$$

Hacemos la descomposición de estos polinomios, en factores comunes:

$$x^2 - a^2 = (x + a)\ (x - a)$$

$$(x - a)^2 = (x - a)\ (x - a)$$

luego.

$$\text{m. c. m.} = (x - a)^2\ (x + a)$$

Ejercicios y ejemplos

1. Sacar factores comunes en los siguientes polinomios:

   a) $3\ x^4 - 9\ x^3$
   b) $a\ c - b\ c - c\ y - a\ b\ c$
   c) $3\ z\ (x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)$

Recordando las normas expuestas anteriormente:

a) $3\ x^4 - 9\ x^3 = 3\ x^3\ (x - 3)$
b) $a\ c - b\ c - c\ y - a\ b\ c = c\ (a - b - y - a\ b) = c\ (a - y - b\ (1 + a))$
c) $3\ z\ (x^2 + y^2) - (x^2 + y^2) = (3\ z - 1)\ (x^2 + y^2)$

Es evidente que los factores comunes no son únicos, para un polinomio dado. Basta fijarnos en el primer polinomio de este ejemplo para comprenderlo, también sería correcta la siguiente descomposición

$3\ (x^4 - 3\ x^3)$ o esta otra $3\ x^2\ (x^2 - 3\ x)$. Se trata de sacar todos los factores comunes posibles, asi la descomposición es única.

2. Hacer la descomposición en factores de las siguientes expresiones:

$$\text{a)}\ 4^2 - (x - y)^2$$
$$\text{b)}\ x^4 + 2\,x^2\,y^2 + y^4$$
$$\text{c)}\ 16\,a^4 - 8\,a^2\,x^2 + x^4$$

Utilizamos los procedimientos vistos en el apartado 2.1

$$\text{a)}\ 4^2 - (x - y)^2 = [4 - (x - y)]\,[4 + (x - y)] = (4 - x + y)\,(4 + x - y)$$
$$\text{b)}\ x^4 + 2\,x^2\,y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)\,(x^2 + y^2)\ (= (x^2 + y^2)^2$$
$$\text{c)}\ 16\,a^4 - 8\,a^2\,x^2 + x^4 = (4\,a^2 - x^2)\,(4\,a^2 - x^2) = (4\,a^2 - x^2)^2$$

3. Hallar el m.c.d.de los siguientes polinomios:

$$4\,p^2 + 20\,p,\ p^3 + 5\,p^2,\ 4\,a\,p^2 + 20\,a\,p$$

Descomponemos, primero, estos polinomios en factores:

$$4\,p^2 + 20\,p = 4\,p\,(p + 5)$$
$$p^3 + 5\,p^2 = p^2\,(p + 5)$$
$$4\,a\,p^2 + 20\,a\,p = 4\,a\,p\,(p + 5)$$

Para obtener el m. c. d. formamos el producto de los factores comunes con el menor exponente. Por lo tanto:

$$\text{m.c.d.} = p\,(p + 5) = p^2 + 5\,p$$

4. Hallar el m.c.m. de los polinomios:

$$3\,a^2\,x + 15\,a^3,\ 3\,a^2\,x - 9\,a^3,\ 6\,a\,x^2 + 18\,a^2\,x$$

Descomponemos en factores:

$$3\,a^2\,x + 15\,a^3 = 3\,a^2\,(x + 5\,a)$$
$$3\,a^2\,x - 9\,a^3 = 3\,a^2\,(x - 3\,a)$$
$$6\,a\,x^2 + 18\,a^2\,x = 6\,a\,x\,(x + 3\,a)$$

Si formamos el producto de todos los factores comunes y no comunes con su mayor exponente obtenemos el m.c.m. Luego:

$$\text{m.c.m.} = a^2\,6\,x\,(x + 5\,a)\,(x - 3\,a)\,(x + 3\,a) = 6\,a^2\,x\,(x + 5\,a)\cdot(x^2 - 9\,a^2)$$

3. FRACCIONES ALGEBRAICAS

3.1. Definiciones y generalidades

Fracción algebraica es el cociente indicado de dos expresiones algebraicas, dadas en un cierto orden, llamándose numerador al dividendo y denominador al divisor.

Son fracciones algebraicas las siguientes:

$$\frac{x^2}{y^2}, \quad \frac{2x+y}{3x-y}, \quad \frac{2a^2+3a-1}{4a^2+5a-1}, \quad \frac{2x^2y-3xyz}{x+z}$$

Diremos que dos fracciones algebraicas son equivalentes cuando adquieren el mismo valor numérico para cualquier sistema de valores dados a sus letras, siempre que no se anulen los denominadores.

Sobre una fracción algebraica se pueden realizar ciertas transformaciones de manera que sus términos (numerador y denominador) sean más sencillos, esta operación la denominamos simplificación de fracciones y está fundada en una propiedad fundamental, análoga a la utilizada en los números racionales: si los dos términos de una fracción se multiplican o dividen por una misma expresión, la fracción así obtenida es equivalente a la propuesta.

Podemos enunciar un criterio rápido para simplificar una fracción, basta dividir su numerador y denominador por el m.c.d. de ambos, los cocientes así obtenidos no tendrán factores comunes.

Consideremos algunos ejemplos: simplificar la fracción:

$$\frac{9a^2b^3c^4}{3ab^4c^3}$$

El m.c.d. del numerador y denominador es $3ab^3c^3$.

$$\frac{9a^2b^3c^4 : 3ab^3c^3}{3ab^4c^3 : 3ab^3c^3} = \frac{3ac}{b}$$

Supongamos que se trata, ahora, de la fracción:

$$\frac{bx-ax}{a^2-b^2}$$

En este caso, la simplificación la realizamos sin necesidad de calcular el m.c.d.de ambos términos

$$\frac{bx-ax}{a^2-b^2} = \frac{x(b-a)}{(a+b)(a-b)} = \frac{-x(a-b)}{(a+b)(a-b)} = \frac{-x}{a+b} = -\frac{x}{a+b}$$

El proceso seguido en esta ocasión no está en contraposición con el expuesto antes; en esta última fracción el m. c. d. de sus términos es $a - b$ dividiendo numerador y denominador por este binomio, obtenemos el mismo resultado.

Antes de terminar este apartado vamos a considerar otra posible transformación de fracciones algebraicas, dadas dos o más fracciones se puede conseguir que se conviertan en otras equivalentes del mismo denominador.

La operación es sencilla: para transformar varias fracciones en otras de denominador común, basta multiplicar los dos términos de cada fracción por el producto de los denominadores de las demás. Para conseguir que la fracción sea más sencilla es aconsejable seguir otro procedimiento, conseguimos que cada fracción se transforme en otra equivalente irreducible (esto es, sus términos son los más sencillos posibles), sin más que hallar el m.c.m. de todos los denominadores y se multiplican los dos términos de cada fracción por el cociente que resulta de dividir el m.c.m. por el denominador respectivo.

Vamos a reducir a mínimo común denominador las dos fracciones

$$\frac{7a}{x^2y}, \quad \frac{10b}{xyz}$$

El mínimo común denominador o mínimo común múltiplo de los denominadores es x^2 y z, luego:

$$\frac{7\,a}{x^2\,y} = \frac{7\,a\,z}{x^2\,y\,z}$$

$$\frac{10\,b}{x\,y\,z} = \frac{10\,b\,x}{x^2\,y\,z}$$

Supongamos ahora las tres fracciones siguientes:

$$\frac{3\,a}{a-b}\,,\ \frac{2\,a+b}{a+b}\,,\ \frac{a}{a^2-b^2}$$

queremos reducirlas a denominador común, averiguamos que el mínimo común denominador es $a^2 - b^2$, por lo tanto,

$$\frac{3\,a}{a-b} = \frac{3\,a\,(a+b)}{(a-b)\,(a+b)} = \frac{3\,a\,(a+b)}{a^2-b^2}$$

$$\frac{2\,a+b}{a+b} = \frac{(2\,a+b)\,(a-b)}{a^2-b^2}$$

$$\frac{a}{a^2-b^2} = \frac{a\cdot 1}{a^2-b^2} = \frac{a}{a^2-b^2}$$

3.2. Operaciones con fracciones algebraicas

Vamos a tratar, brevemente, de familiarizarnos con las operaciones con fracciones algebraicas, que en esencia son semejantes a las operaciones con números racionales.

3.2.1. Suma de fracciones

Para sumar varias fracciones de igual denominador se suman algebraicamente los numeradores y se pone el denominador común. Si la fracciones no tienen el mismo denominador se reducirá previamente a común denominador.

Tratamos de calcular la suma siguiente:

$$\frac{3}{a^2} + \frac{1}{2\,a}$$

Como no tienen el mismo denominador reducimos a común denominador, calculando el m.c.m. de los denominadores que es $2\,a^2$ y operando de la forma acostumbrada:

$$\frac{3}{a^2} + \frac{1}{2a} = \frac{6}{2\,a^2} + \frac{a}{2\,a^2} = \frac{6+a}{2\,a^2}$$

Consideramos ahora, la suma

$$\frac{2\,x^2}{x^4-1} - \frac{1}{x^2+1} + \frac{2\,x}{x^2-1}$$

Actuamos de la misma manera que en el ejemplo anterior, el mínimo común denominador es $x^4 - 1$

$$\frac{2x^2}{x^4-1} - \frac{1}{x^2+1} + \frac{2x}{x^2-1} = \frac{2x^2}{x^4-1} - \frac{x^2-1}{x^4-1} + \frac{2x(x^2+1)}{x^4-1} =$$

$$= \frac{2x^2-(x^2-1)+2x(x^2+1)}{x^4-1} = \frac{2x^2-x^2+1+2x^3+2x}{x^4-1} = \frac{2x^3+x^2+2x+1}{x^4-1}$$

3.2.2. Producto de fracciones algebraicas

Para multiplicar varias fracciones algebraicas se divide el producto de los numeradores por el de los denominadores.

Tratamos de calcular el siguiente producto:

$$\frac{2a}{a-b} \cdot \frac{a+b}{a^2+b^2}$$

el producto es otra fracción obtenida multiplicando los numeradores y los denominadores.

$$\frac{2a}{a-b} \cdot \frac{a+b}{a^2+b^2} = \frac{2a(a+b)}{(a-b)(a^2+b^2)} = \frac{2a^2+2ab}{(a-b)(a^2+b^2)}$$

Calculemos un nuevo producto:

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{5} \cdot \frac{10}{a+b}$$

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{5} \cdot \frac{10}{a+b} = \frac{10(a^2+2ab+b^2)}{5(a+b)} = \frac{10(a+b)^2}{5(a+b)}$$

esta fracción que acabamos de obtener se puede simplificar, quedando finalmente

$$\frac{2(a+b)}{1} = 2(a+b)$$

Esta norma dada para multiplicar varias fracciones algebraicas se puede particularizar al caso en que todos los factores sean iguales, esto es, sirve para calcular potencias de una fracción algebraica. Ya sabemos que una potencia es un producto de tanto factores iguales como indique el exponente. Veamos algunos ejemplos:

$$\left(\frac{3a^2b}{2c}\right)^3 = \frac{3a^2b}{2c} \cdot \frac{3a^2b}{2c} \cdot \frac{3a^2b}{2c} = \frac{27a^6b^3}{8c^3}$$

$$\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)^2 = \frac{x^2-1}{2x} \cdot \frac{x^2-1}{2x} = \frac{(x^2-1)^2}{4x^2}$$

$$\left(\frac{-3ab}{2xy}\right)^4 = \frac{-3ab}{2xy} \cdot \frac{-3ab}{2xy} \cdot \frac{-3ab}{2xy} \cdot \frac{-3ab}{2xy} = \frac{81a^4b^4}{16x^4y^4}$$

3.2.3. Cociente de fracciones algebraicas

Dadas dos fracciones, el cociente de las mismas lo obtendremos multiplicando el dividendo por la inversa de la fracción divisor*.

Consideramos a continuación algunos ejemplos:

$$\frac{5\,m\,n}{6\,b\,x} : \frac{10\,m^2\,n}{3\,a\,x^2} = \frac{5\,m\,n}{6\,b\,x} \cdot \frac{3\,a\,x^2}{10\,m^2\,n} = \frac{5\,m\,n \cdot 3\,a\,x^2}{6\,b\,x \cdot 10\,m^2\,n} = \frac{15\,a\,x^2\,m\,n}{60\,b\,x\,m^2\,n}$$

Conviene dar los resultados de la forma más simplificada posible:

$$\frac{a\,x}{4\,b\,m}$$

$$\frac{24}{a+3} : \frac{9}{a+3} = \frac{24}{a+3} \cdot \frac{a+3}{9} = \frac{24\,(a+3)}{(a+3)\,9} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$$

$$\frac{a^4 - b^4}{a^2 - 2\,a\,b + b^2} : \frac{a^2 + b^2}{a^2 - a\,b} = \frac{a^4 - b^4}{a^2 - 2\,ab + b^2} \cdot \frac{a^2 - a\,b}{a^2 + b^2} =$$

$$= \frac{(a^4 - b^4)\,(a^2 - a\,b)}{(a^2 - 2\,a\,b + b^2)\,(a^2 + b^2)} = \cdot \frac{(a^2 - b^2)\,(a^2 + b^2)\,(a^2 - a\,b)}{(a - b)^2\,(a^2 + b^2)} =$$

$$= \frac{(a+b)\,(a-b)\,(a^2+b^2)\,(a^2-a\,b)}{(a-b)^2\,(a^2+b^2)} = \frac{(a+b)\,(a^2-a\,b)}{a-b} = \frac{(a+b)\,a\,(a-b)}{a-b} = (a+b)\,a$$

Ejercicios y ejemplos

1. Simplificar las fracciones siguientes:

$$\frac{20\,a^5\,b^4\,c^2\,d}{5\,a^4\,b^5\,c^2} \quad , \quad \frac{x^2 - 2\,x\,y + y^2}{x^2 - y^2} \quad , \quad \frac{x + 3\,y}{x^2 + x + 3\,y - 9\,y^2}$$

$$\frac{20\,a^5\,b^4\,c^2\,d}{5\,a^4\,b^5\,c^2} = \frac{4\,a\,d \cdot 5\,a^4\,b^4\,c^2}{b \cdot 5\,a^4\,b^4\,c^2} = \frac{4\,a\,d}{b}$$

$$\frac{x^2 - 2\,x\,y + y^2}{x^2 - y^2} = \frac{(x-y)\,(x-y)}{(x+y)\,(x-y)} = \frac{x-y}{x+y}$$

$$\frac{x + 3\,y}{x^2 + x + 3\,y - 9\,y^2} = \frac{x + 3\,y}{(x^2 - 9\,y^2) + (x + 3\,y)} = \frac{x + 3\,y}{(x + 3\,y)\,(x - 3y) + (x + 3y)} =$$

$$= \frac{1}{(x - 3\,y) + 1} = \frac{1}{x - 3\,y + 1}$$

---

* Recordamos que la fracción inversa de una dada se obtiene cambiando el numerador por el denominador de la misma. La fracción inversa de $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$

2. Reducir a común denominador:

$$\frac{x}{2\,a\,b^2\,c},\ \frac{y}{4\,a^3\,b},\ \frac{z}{12\,a\,b\,c^3}$$

El denominador común es $12\,a^3\,b^2\,c^3$. Obtenemos, por tanto:

$$\frac{x}{2\,a\,b^2c} = \frac{6\,a^2\,c^2\,x}{12\,a^3\,b^2\,c^3}$$

$$\frac{y}{4\,a^3\,b} = \frac{3\,b\,c^3\,y}{12\,a^3\,b^2\,c^3}$$

$$\frac{z}{12\,a\,b\,c^3} = \frac{a^2\,b\,z}{12\,a^3\,b^2\,c^3}$$

3. Reducir a común denominador las siguientes fracciones

$$3\,a\,b,\quad \frac{a+2}{a-b},\quad \frac{a-4}{a+b},\quad \frac{a^2+2}{a^2-b^2}$$

Teniendo en cuenta que $3\,a\,b$ equivale a $\frac{3\,a\,b}{1}$ y que $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ las fracciones que buscamos son:

$$3\,a\,b = \frac{3\,a\,b\,(a^2-b^2)}{a^2-b^2} \qquad \frac{a-4}{a+b} = \frac{(a-4)(a-b)}{a^2-b^2}$$

$$\frac{a+2}{a-b} = \frac{(a+2)(a+b)}{a^2-b^2} \qquad \frac{a^2+2}{a^2-b^2} \quad \text{no se modifica.}$$

4. Calcular la siguiente suma:

$$\frac{3x-2}{y} + \frac{5x}{y} + \frac{7-x}{y}$$

como ya tienen denominador común, el resultado es inmediato:

$$\frac{3x-2+5x+7-x}{y} = \frac{7x+5}{y}$$

5. Calcular la suma:

$$\frac{a-b}{a^2-a\,b+b^2} + \frac{1}{a+b} + \frac{a\,b}{a^3+b^3}$$

En este caso si tenemos que reducir a común denominador, utilizando los procedimientos ya conocidos:

$$\frac{a-b}{a^2-a\,b+b^2} + \frac{1}{a+b} + \frac{a\,b}{a^3+b^3} = \frac{(a-b)(a+b)}{a^3+b^3} + \frac{a^2-a\,b+b^2}{a^3+b^3} +$$

$$+ \frac{a\,b}{a^3+b^3} = \frac{a^2-b^2+a^2-a\,b+b^2+a\,b}{a^3+b^3} = \frac{2\,a^2}{a^3+b^3}$$

6. Efectuar la suma siguiente:

$$1 - a - a^2 - \frac{a - a^2}{1 - a^4} - \frac{2 - a^2}{a^2 + 1}$$

los tres primeros monomios no tienen denominador, no hay problema en considerar la siguiente fracción en sustitución $\frac{1 - a - a^2}{1}$, operando a continuación de la forma habitual tenemos:

$$1 - a - a^2 - \frac{a - a^2}{1 - a^4} - \frac{2 - a^2}{a^2 + 1} = \frac{1 - a - a^2}{1} - \frac{a - a^2}{1 - a^4} - \frac{2 - a^2}{a^2 + 1} =$$

$$= \frac{1 - a - a^2}{1} - \frac{a\,(a - 1)}{a^4 - 1} - \frac{2 - a^2}{a^2 + 1} = \frac{1 - a - a^2}{1} - \frac{a}{(a^2 + 1)\,(a + 1)} -$$

$$- \frac{2 - a^2}{a^2 + 1} = \frac{(a^2 + 1)\,(a + 1)\,(1 - a - a^2) - a - (2 - a^2)\,(a + 1)}{(a^2 + 1)\,(a + 1)} =$$

$$= - \frac{a^5 + 2\,a^4 + 3\,a + 1}{(a^2 + 1)\,(a + 1)}$$

7. Realizar la siguiente multiplicación:

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + 2\,x\,y + y^2} \cdot \frac{x\,y + y^2}{x^2 - xy}$$

multiplicamos numeradores y denominadores y expresamos la fracción simplificada:

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + 2\,x\,y + y^2} \cdot \frac{x\,y + y^2}{x^2 - x\,y} = \frac{(x^2 - y^2)\,(x\,y + y^2)}{(x^2 + 2\,x\,y + y^2)\,(x^2 - x\,y)} =$$

$$= \frac{(x + y)\,(x - y)\,y\,(x + y)}{(x + y)\,(x + y)\,x\,(x - y)} = \frac{y}{x}$$

8. Efectuar la siguiente operación:

$$\frac{a}{b} \cdot \left(a : \frac{b}{c} - b : \frac{a}{c}\right) : \frac{c}{b}$$

Operamos primero el paréntesis, adjudicando el denominador 1 cuando este no existe.

$$\left.\begin{aligned} a : \frac{b}{c} &= \frac{a}{1} : \frac{b}{c} = \frac{a}{1} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a\,c}{b} \\ b : \frac{a}{c} &= \frac{b}{1} : \frac{a}{c} = \frac{b}{1} \cdot \frac{c}{a} = \frac{b\,c}{a} \end{aligned}\right\} \quad \frac{a\,c}{b} - \frac{b\,c}{a} = \frac{a^2\,c - b^2\,c}{a\,b}$$

Realizamos el producto:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a^2\,c - b^2\,c}{a\,b} = \frac{a\,(a^2\,c - b^2\,c)}{a\,b^2} = \frac{a^2\,c - b^2\,c}{b^2}$$

Este resultado, finalmente, lo dividimos por $\frac{c}{b}$

$$\frac{a^2 c - b^2 c}{b^2} : \frac{c}{b} = \frac{a^2 c - b^2 c}{b^2} \cdot \frac{b}{c} = \frac{(a^2 c - b^2 c) b}{b^2 c} = \frac{a^2 - b^2}{b}$$

9. En algunas ocasiones aparece lo que vamos a denominar expresión algebraica mixta, esto es, la suma algebraica de una expresión entera (monomio o polinomio) y una fracción algebraica. Por ejemplo:

$$3 x^2 - 2 x + 1 + \frac{1}{x - 1}, \quad 2 a^2 + b^2 - \frac{3 a^3 - b}{a^2 - b^2}$$

Para reducir una expresión algebraica mixta a fracción, basta multiplicar la parte entera por el denominador de la fracción, sumando el resultado con el numerador.

Vamos a reducir a algebraica la expresión algebraica mixta siguiente

$$x - 1 - \frac{6 x - 2}{x^2 + x - 1}$$

$$x - 1 - \frac{6 x - 2}{x^2 + x - 1} = \frac{(x - 1)(x^2 + x - 1) - (6 x - 2)}{x^2 + x - 1} = \frac{x^3 - 8 x + 3}{x^2 + x - 1}$$

El alumno puede observar que las expresiones algebraicas mixtas las hemos utilizado en ejercicios precedentes, sin más que considerar la parte entera con denominador igual a la unidad.

También podemos pasar de una fracción algebraica impropia* a expresión algebraica mixta, para ello es suficiente dividir el numerador por el denominador. El cociente entero que resulte será la parte entera de la expresión mixta, y la parte fraccionaria tendrá por numerador el resto de la división y por denominador el mismo de la fracción.

Si tenemos la fracción impropia

$$\frac{x^4 - 3 x^3 - x^2 + 3 x - 1}{x^2 + x + 1}$$

y queremos obtener la expresión algebraica mixta, procediendo del modo indicado obtenemos:

$$\frac{x^4 - 3 x^3 - x^2 + 3 x - 1}{x^2 + x + 1} = x^2 - 4 x + 2 + \frac{5 x - 3}{x^2 + x + 1}$$

10. Llamaremos fracciones compuestas a aquellas fracciones algebraicas en las que uno de los términos o los dos a la vez están formados a su vez por fracciones o expresiones mixtas. Algunos ejemplos señalamos a continuación:

$$\frac{2}{1 + \frac{5}{a + b}}, \quad \frac{\frac{1}{a + b} + \frac{1}{a - b}}{\frac{1}{a + b} - \frac{1}{a - b}}, \quad \frac{\frac{2x + y}{x + y} - 1}{1 - \frac{y}{x + y}}$$

* Fracción algebraica impropia tiene el grado del numerador igual que el del denominador. En el caso de que el grado del numerador sea menor que el del denominador la fracción algebraica se llama propia.

En definitiva, son un caso particular de la división de fracciones. Para simplificar una fracción algebraica compuesta, se efectúan, en primer lugar, las operaciones indicadas en el numerador y el denominador, multiplicando, luego el resultado obtenido en el numerador por la inversa de la fracción obtenida en el denominador.

Vamos a simplificar las fracciones algebraicas compuestas reseñadas más arriba:

$$\frac{2}{1+\frac{5}{a+b}} = \frac{2}{\frac{a+b+5}{a+b}} = 2 \cdot \frac{a+b}{a+b+5} = \frac{2\,(a+b)}{a+b+5}$$

$$\frac{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}}{\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}} = \frac{\frac{a-b+a+b}{(a-b)(a+b)}}{\frac{a-b-(a+b)}{(a-b)(a+b)}} = \frac{\frac{2a}{(a-b)(a+b)}}{\frac{a-b-(a+b)}{(a-b)(a+b)}} = \frac{\frac{2a}{(a-b)(a+b)}}{\frac{-2b}{(a-b)(a+b)}} = -\frac{a}{b}$$

$$\frac{\frac{2x+y}{x+y}-1}{1-\frac{y}{x+y}} = \frac{\frac{2x+y-(x+y)}{x+y}}{\frac{x+y-y}{x+y}} = \frac{\frac{2x+y-x-y}{x+y}}{\frac{x}{x+y}} = \frac{\frac{x}{x+y}}{\frac{x}{x+y}} =$$

$$= \frac{x}{x+y} : \frac{x}{x+y} = 1$$

NOTAS ACLARATORIAS Y COMPLEMENTARIAS

* En distintas ocasiones de este tema hemos hablado de operaciones entre monomios y polinomios. Conviene recordar el último tema de la Unidad didáctica anterior, en donde definíamos una ley de composición interna en un conjunto como una aplicación de manera que a cada pareja de elementos de este conjunto le asociamos otro elemento del mismo. Como consecuencia la suma y producto, por ejemplo, de polinomios son leyes de composición interna.

Para concretar ideas vamos a tratar con polinomios de una sola variable, de una sola letra o de una sola indeterminada, pues de las tres maneras puede decirse.

Sea P el conjunto formado por todos los polinomios existentes de una variable de cualquier grado, en este conjunto vamos a definir una ley de composición interna que llamaremos suma tal que si P_1 y P_2 son dos elementos de P, son dos polinomios de P, $P_1 \in P$, $P_2 \in P$; le asociamos otro que simbolizamos por $P_1 + P_2$, de la forma vista en el apartado 1.2.1.

Abreviadamente se puede escribir:

$$P \times P \xrightarrow{+} P$$

según la ley de composición interna +, si $P_1 \in P$ y $P_2 \in P$, $P_1 + P_2 \in P$. Es efectivamente una ley de composición interna pues siempre la suma de dos polinomios es otro polinomio.

¿Qué propiedades tiene la ley de composición interna suma de polinomios?

Conmutativa. $P_1 + P_2 = P_2 + P_1$ siendo $P_1 \in P$ y $P_2 \in P$

Asociativa. $P_1 + (P_2 + P_3) = (P_1 + P_2) + P_3$ siendo $P_1 \in P, P_2 \in P, P_3 \in P$

Elemento neutro. En P existe un polinomio que sumado a cualquier elemento de P nos reproduce este elemento, el polinomio que tiene todos sus coeficientes cero, cumple esta condición y es el elemento neutro de P para la suma de polinomios.

Elemento simétrico. Dado un polinomio cualquiera de P, $p \in P$, siempre existe otro polinomio p' que pertenece también a P, $p' \in P$, tal que

$$p + p' = e$$

siendo e el elemento neutro en P para la suma. Así, el polinomio simétrico del $2x^3 + 3x^2 + 2x - 1$ es el $-2x^3 - 3x^2 - 2x + 1$, se ha obtenido cambiando el signo a todos los coeficientes, a este polinomio se le suele llamar polinomio opuesto al de partida. Es evidente que,

$$(2x^3 + 3x^2 + 2x - 1) + (-2x^3 - 3x^2 - 2x + 1) = 0$$

Recopilando las propiedades estudiadas respecto a esta ley de composición interna, podemos decir que (P, +) tiene estructura de grupo abeliano o grupo conmutativo.

* Analizando la existencia de elemento simétrico para la suma en P, llegamos a la siguiente conclusión, la diferencia o resta de dos polinomios se puede definir como la operación o ley de composición interna consistente en sumar a cada polinomio su polinomio opuesto, operación que siempre existe pues todo elemento de P tiene su opuesto que también pertenece a P.

Teniendo presente lo que acabamos de decir, sabiendo sumar polinomios, no tenemos que aprender un nuevo criterio para restar polinomios, como hemos creido poner de manifiesto en los ejercicios realizados en este tema.

* Dejamos que realice el alumno un estudio semejante al que hemos hecho, con el conjunto P de todos los polinomios de una variable, utilizando como ley de composición interna el producto de polinomios. Sería un ejercicio muy interesante que comprobase que el producto de polinomios referido en el párrafo 1.2.4 es una ley de composición interna, comprobando las propiedades que verifica, prestando especial atención en la existencia de elemento neutro y elemento simétrico.

* La suma de monomios no es una ley de composición interna, puede ocurrir que al sumar dos monomios no resulte otro monomio, basta considerar el caso de monomios no semejantes, su suma es un binomio, como se pone de manifiesto en este ejemplo. La suma de los monomios $3x^2y$ y $3ab$ es el binomio $3x^2y + 3ab$.

Por el contrario, el producto de monomios si es una ley de composición interna, dados dos monomios cualesquiera, su producto es otro monomio.

También dejamos, en esta ocasión, el estudio de las propiedades de esta ley de composición interna al alumno, por considerarlo un ejercicio interesante.

* No haria falta considerar como un caso aparte el estudio de los monomios, sería más sencillo, estudiarlos como un subconjunto del conjunto P de todos los polinomios, concretamente el subconjunto formado por todos los polinomios de un sólo término, siendo, igualmente válidas las restricciones que acabamos de enumerar.

CONCLUSIONES TEMA XIV

EXPRESIONES ALGEBRAICAS	DEFINICION	Es un conjunto de letras y números ligados entre sí por las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación.	
	MONOMIO	Es una expresión algebraica cuyas letras están sometidas únicamente a la operación de multiplicar.	
		SUMA	La suma de dos monomios semejantes es otro monomio que se diferencia de los monomios sumados en su coeficiente, que es la suma de los coeficientes de los monomios sumandos.
		PRODUCTO	El producto de dos monomios es otro monomio que tiene por coeficiente el producto de los coeficientes y la parte literal está formada por las letras contenidas en los dos monomios, cada una de ellas con un exponente que es la suma de sus exponentes en cada uno de los factores.
		COCIENTE	El cociente de dos monomios es otro monomio cuyo coeficiente es igual al cociente de los coeficientes del dividendo y del divisor, siendo el exponente de una letra en el monomio cociente el exponente del dividendo menos el exponente del divisor.
	POLINOMIO	Es una suma algebraica de varios monomios.	
		SUMA	La suma de varios polinomios es otro polinomio formado por todos los términos de estos polinomios.
		DIFERENCIA	Para restar un polinomio de otro dado basta sumarle el polinomio simétrico, obtenido cambiando los signos de cada uno de sus términos.
		PRODUCTO DE UN POLINOMIO POR UN MONOMIO	Basta multiplicar cada uno de los monomios que integran el polinomio por el monomio. Se obtiene otro polinomio de grado igual a la suma de los grados de los factores.
		PRODUCTO DE DOS POLINOMIOS	Generalización del caso anterior.
		COCIENTE DE UN POLINOMIO POR UN MONOMIO	Se divide cada término del polinomio por el monomio y se suman los cocientes parciales.
		COCIENTE DE DOS POLINOMIOS	Dados dos polinomios llamados dividendo y divisor, llamamos cociente a otro polinomio que multiplicado por el divisor nos reproduce el dividendo.

M.C.D. Y M.C.M. DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS	M.C.D.		M.c.d. de dos o más expresiones algebraicas es la expresión de mayor grado que divide exactamente a cada una de las primeras. Para obtener el m.c.d. de dos o más expresiones enteras se descompone cada una en sus factores y se forma el producto de los factores comunes con el menor exponente.
	M.C.M.		M.c.m. de dos o más expresiones algebraicas es la expresión de menor grado que es divisible exactamente por todas ellas. Para obtener el m.c.m. de dos o más expresiones enteras se descompone cada una en sus factores y se forma el producto de los factores comunes y no comunes con su mayor exponente.
FRACCIONES ALGEBRAICAS	DEFINICION		Es el cociente indicado de dos expresiones algebraicas, dadas en un cierto orden, llamándose numerador al dividendo y denominador al divisor.
	OPERACIONES	SUMA	Para sumar varias fracciones de igual denominador se suman algebraicamente los numeradores y se pone el denominador común. Si las fracciones no tienen el mismo denominador se reducirá previamente a común denominador.
		PRODUCTO	Para multiplicar varias fracciones se divide el producto de los numeradores por el de los denominadores.
		COCIENTE	Dadas dos fracciones, el cociente de las mismas lo obtendremos multiplicando el dividendo por la inversa de la fracción divisor.

EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. *Verificar que para* $a = +4$ *y* $b = -1$ *las expresiones siguientes tienen el mismo valor numérico:*

$$(a + b)^2 (a - b); \qquad (a^2 - b^2)(a + b); \qquad \frac{a^4 + b^4 - 2 a^2 b^2}{a - b}$$

Efectuar las sumas de los siguientes monomios:

2. $-\frac{1}{10} a b^2 x + \frac{1}{4} a b^2 x - \frac{7}{2} a b^2 x - \frac{3}{5} a b^2 x$

3. $\frac{1}{4} a b^2 x^4 y^2 - \frac{2}{3} a b^2 x^4 y^3 + \frac{3}{8} a b^2 x^4 y^3$

Ordenar y reducir los siguientes polinomios:

4. $5 a^2 - \frac{5}{3} a - \frac{4}{5} a^2 + \frac{1}{3} a - 7 a - \frac{4}{15} a^2$

5. $6 x^2 - \frac{3}{7} + \frac{4}{3} x - 3 x^2 - \frac{7}{5} x^2 + 6 - 2 x^2 + 9 x$

6. $\frac{4}{5} a^2 b - 3 a^3 - 5 a b^2 + \frac{3}{2} a^2 b + \frac{5}{2} b^3 - b^3 + 4 a b^2$

Reducir las siguientes expresiones:

7. $\left(-6 x^4 + 7 - \frac{4}{5} x^3\right) + \left(-\frac{2}{3} x^3 - 5 x\right) - \left(5 x^2 - \frac{4}{5} x + 5 x^4\right)$

8. $(10 x^3 + 2 x^2 - 6 x + 15) + (4 x + 6 - 4 x^3) - (5 x^3 - 10 + 4 x^2)$

Efectuar y simplificar las expresiones siguientes:

9. $2 (a + b) - 4 [a - (2 a - 3 b)]$

10. $4x^2 - [x^2 - 3x^3 + (3x^2 - x^3)]$
11. $2x - [6y - (3z - 4y) - (2z - 4y)]$

12. *Sean los polinomios:*

$$A = 4x^2 - 5x + 7$$
$$B = 3x^2 + 6x - 3$$
$$C = 2x^2 - x + 4$$

Calcular:

a) $A + B + C$
b) $A + B - C$
c) $A - B + C$
d) $-A + B - C$

13. *Sean los polinomios:*

$$A = 3x^5 - 4x^2 + 2x$$
$$B = 5x^3 - 6x^2 + 3x - 2$$
$$C = 2x^5 - 3x^3 + 4x - 1$$
$$D = 4x^2 + 2x - 3$$

Calcular:

a) $(A + B) - (C + D)$
b) $(A - B) + (C - D)$
c) $A - B - C + D$

Calcular los siguientes productos:

14. $(-3xpq^2r)\left(-\frac{2}{3}xp^2qr\right)(-4zpqr^2)$
15. $\left(\frac{3}{4}ax^2 + \frac{5}{2}bx - 4c\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}abx^4\right)$
16. $(3a^2 + 2b^2 + 3c^2)(4a^2 + 5b^2 - 6c^2)$
17. $(2ab^2 - 6a^2b - b^3 - 5a^3)(8ab^2 - 3b^3 + 3a^2b)$
18. $[2(a + b)^2 - 3(x - y)(a + b) + 4(x - y)^2][3(x - y) - 5(a + b)]$

Efectuar los siguientes cocientes:

19. $(8a^4x^2 - 5a^3x^3 + 7a^2x^2) : (-3a^2x)$
20. $\left(-\frac{8}{3}a^3bx^3 + \frac{12}{5}a^2b^3x^4 - 4abx^2\right) : \left(\frac{4}{3}abx^2\right)$
21. $(8x^5 - 14x^4 - 5x^3 + 16x^2 - 8x + 3) : (2x^2 - 5x + 3)$
22. $[(x + y)(x - y) + 4z(y - z)] : (x + y - 2z)$
23. $\left(\frac{3}{4}a^2c^3 + \frac{6}{125}a^5\right) : \left(\frac{1}{5}a^2 + \frac{1}{2}ac\right)$

Descomponer en factores las siguientes expresiones:

24. $3x^3 - x^2 + x$
25. $-ay + by + cy$
26. $2x^2y^3 - 6x^2y^2 + 2xy^3$
27. $mx - 2my - nx + 2ny$

28. $a\,x^2 + b\,x^2 + 2\,a + 2\,b$

Hallar el m.c.d. de las siguientes expresiones:

29. $12\,a^3\,b^4,\ 18\,a^4\,b^3,\ 24\,a^3\,b^2\,c$

30. $x^2 - 1,\ x^2 - x$

31. $x^5 - x\,y^2,\ x^4 + x^2\,y$

Hallar el m.c.m. de las expresiones siguientes:

32. $4 - x^2,\ x^2 - 4\,x + 4$

33. $x^2 - 1,\ x^4 - 1,\ x^2 - x$

34. $x^3 + 2\,a\,x^2,\ -a^3 + a\,x^2,\ 4\,a^4\,x^2 - a^2\,x^4$

Hallar las fracciones irreducibles equivalentes:

35. $\dfrac{27\,a^2\,b^2\,c^3\,d^4}{63\,a^3\,b^3\,c^4\,d^5}$

36. $\dfrac{m+n}{(m+n)^2 + n + m}$

37. $\dfrac{(x^2-4)\,(x^2+4)\,(x+5)}{(x-2)\,(x^2+3\,x-10)\,(x^4-16)}$

Reducir a común denominador:

38. $\dfrac{a}{b\,c},\ \dfrac{b}{a\,c},\ \dfrac{-c}{d\,b}$

39. $\dfrac{x}{(a-b)\,(b-c)},\ \dfrac{y}{(b-c)\,(c-a)},\ \dfrac{z}{(c-a)\,(c-b)}$

40. $\dfrac{2}{3\,x^3 - 21\,x^2},\ \dfrac{3\,x}{x^2 - 5\,x - 14},\ \dfrac{x}{x^3 - 343}$

Efectuar las siguientes operaciones indicadas:

41. $\dfrac{x}{(x-y)\,(x-z)} + \dfrac{y}{(y-x)\,(x-z)}$

42. $\dfrac{2\,x}{x-1} + \dfrac{3\,x+1}{x-1} - \dfrac{1-x}{x^2-1}$

43. $\left(\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{2\,x}{1-x^2}\right)\left(\dfrac{1}{x} - 1\right)$

44. $\left[1 + \left(\dfrac{a-x}{a+x}\right)^2\right] : \left[1 - \left(\dfrac{a-x}{a+x}\right)^2\right]$

Simplificar las siguientes fracciones:

45. $$\frac{\frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2}}{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2}}$$

46. $$\frac{\frac{a+1}{a-1} - \frac{a-1}{a+1}}{\frac{a^2+4a-1}{a^2-1} - 1}$$

47. *Hallar el valor numérico de los siguientes polinomios utilizando la regla de Ruffini:*

$2x^3 - 14x + 12$ *para* $x = 2$

$x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 12x$ *para* $x = -3$

48. *Calcular el valor de p, para que* $3x^2 - px + 10$ *sea divisible por* $x - 5$.

49. *¿para qué valor de a,* $x^2 - 7x + a$ *es divisible por* $x - 2$?

50. *Efectuar utilizando Ruffini, el siguiente cociente:*
$(3x^9 - 9x^8 + 2x^6 - 6x^5 - x^3 + 3x^2 + 4x - 12) : (x - 3)$

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. Sustituyendo en cada una de las expresiones:

$$[4 + (- 1)]^2 \cdot [4 - (- 1)] = (4 - 1)^2 \cdot (4 + 1) = 3^2 \cdot 5 = 45$$

análogamente para las otras dos expresiones:

$$[(+ 4)^2 - (- 1)^2] \cdot [(+ 4) + (- 1)] = (16 - 1) \cdot (4 - 1) = 15 \cdot 3 = 45$$

y en la tercera:

$$\frac{(+ 4)^4 + (- 1)^4 - 2 (+ 4)^2 \cdot (- 1)^2}{(+ 4) - (- 1)} = \frac{256 + 1 - 32}{5} = \frac{225}{5} = 45$$

2. Sacando factor común a la parte literal:

$$a\ b^2\ x\left(- \frac{1}{10} + \frac{1}{4} - \frac{7}{2} - \frac{3}{5} \right)$$

el problema queda reducido a una suma algebraica de fracciones. Sacando denominador común:

$$\text{m.c.m. } (10, 4, 2, 5) = 20$$

$$a\ b^2\ x\left(\frac{- 2 + 5 - 70 - 12}{20} \right) = a\ b^2\ x\ \frac{+ 5 - 84}{20} = - \frac{79}{20} a\ b^2\ x$$

3. En este caso, como no es idéntica la parte literal de los tres monomios, no podemos

reducirlo a uno sólo como en el caso anterior, sólo podremos agrupar en uno aquellos dos cuya parte literal coincida.

$$\frac{1}{4}\,a\,b^2\,x^4\,y^2 - \frac{2}{3}\,a\,b^2\,x^4\,y^3 + \frac{3}{8}\,a\,b^2\,x^4\,y^3$$

Actuando con los dos últimos sumandos como en el problema 2.

$$-\frac{2}{3}\,a\,b^2\,x^4\,y^3 + \frac{3}{8}\,a\,b^2\,x^4\,y^3 = a\,b^2\,x^4\,y^3\left(-\frac{2}{3}+\frac{3}{8}\right) =$$

$$= a\,b^2\,x^4\,y^3\left(\frac{-16+9}{24}\right) = -\frac{7}{24}\,a\,b^2\,x^4\,y^3$$

y la expresión inicial queda reducida a:

$$\frac{1}{4}\,a\,b^2\,x^4\,y^2 - \frac{7}{24}\,a\,b^2\,x^4\,y^3$$

que aún podíamos darla de otra forma:

$$\frac{1}{4}\,a\,b^2\,x^4\,y^2\left(1-\frac{7}{6}\,y\right)$$

4. Para ordenar, debemos agrupar previamente los términos que sean semejantes.

Términos en a^2: $5\,a^2 - \frac{4}{5}\,a^2 - \frac{4}{15}\,a^2 = a^2\left(5-\frac{4}{5}-\frac{4}{15}\right) =$

$$= a^2\left(\frac{75-12-4}{15}\right) = \frac{59}{15}\,a^2$$

Términos en a: $-\frac{5}{3}\,a + \frac{1}{3}\,a - 7\,a = a\left(-\frac{5}{3}+\frac{1}{3}-7\right) =$

$$= a\left(\frac{-5+1-21}{3}\right) = \frac{-25}{3}\,a$$

y el polinomio reducido queda ordenado así:

$$\frac{59}{15}\,a^2 - \frac{25}{3}\,a$$

5. Análogamente al ejercicio 4:

$$6\,x^2 - 3\,x^2 - \frac{7}{5}\,x^2 - 2\,x^2 = x^2 - \frac{7}{5}\,x^2 = x^2\cdot\left(1-\frac{7}{5}\right) = -\frac{2}{5}\,x^2$$

$$\frac{4}{3}x + 9x = x\left(\frac{4}{3} + 9\right) = \frac{31}{3}x$$

$$-\frac{3}{7} + 6 = \frac{39}{7}$$

y el polinomio queda:

$$-\frac{2}{5}x^2 + \frac{31}{3}x + \frac{39}{7}$$

6. Vamos a ordenar el polinomio por potencias decrecientes de a

$$\frac{4}{5}a^2b + \frac{3}{2}a^2b = a^2b\left(\frac{4}{5} + \frac{3}{2}\right) = a^2b\left(\frac{8 + 15}{10}\right) = \frac{23}{10}a^2b$$

$$-5ab^2 + 4ab^2 = -ab^2$$

$$+\frac{5}{2}b^3 - b^3 = b^3\left(\frac{5}{2} - 1\right) = \frac{3}{2}b^3$$

y el polinomio queda:

$$-3a^3 + \frac{23}{10}a^2b - ab^2 + \frac{3}{2}b^3$$

7. Prescindimos primero de los paréntesis, haciendo caso de las reglas de signos correspondientes a cada caso:

$$-6x^4 + 7 - \frac{4}{5}x^3 - \frac{2}{3}x^3 - 5x^2 - 5x + \frac{4}{5}x - 5x^4$$

agrupando términos semejantes:

$$-6x^4 - 5x^4 = -11x^4$$

$$-\frac{4}{5}x^3 - \frac{2}{3}x^3 = x^3\left(-\frac{4}{5} - \frac{2}{3}\right) = x^3\left(\frac{-12 - 10}{15}\right) = -\frac{22}{15}x^3$$

$$-5x^2$$

$$-5x + \frac{4}{5}x = x\left(-5 + \frac{4}{5}\right) = x\left(\frac{-25 + 4}{5}\right) = -\frac{21}{5}x$$

quedará el polinomio ya ordenado:

$$-11x^4 - \frac{22}{15}x^3 - 5x^2 - \frac{21}{5}x + 7$$

8. El método a seguir es idéntico al del ejercicio anterior.

$$10x^3 + 2x^2 - 6x + 15 + 4x + 6 - 4x^3 - 5x^3 + 10 - 4x^2$$

$$10x^3 - 4x^3 - 5x^3 = x^3$$

$$+2x^2 - 4x^2 = -2x^2$$

$$-6x + 4x = -2x$$

$$+15 + 6 + 10 = 31$$

9. $2\,(a + b) - 4\,[a - (2\,a - 3\,b)]$. Efectuando los productos:

$$2\,a + 2\,b - 4\,[a - 2\,a + 3\,b] = 2\,a + 2\,b - 4\,a + 8\,a - 12\,b = \\ = 6\,a - 10\,b$$

10. $4\,x^2 - x^2 + 3\,x^3 - (3\,x^2 - x^3) = 4\,x^2 - x^2 + 3\,x^3 - 3\,x^2 + x^3 = 4\,x^3$

11 $2\,x - 6\,y + (3\,z - 4\,y) + (2\,z - 4\,y) = 2\,x - 6\,y + 3\,z - 4\,y + \\ + 2\,z - 4\,y = 2\,x - 14\,y + 5\,z$

12. Vamos a efectuar cada una de las operaciones indicadas individualmente:

a) $A + B + C = (4\,x^2 - 5\,x + 7) + (3\,x^2 + 6\,x - 3) + (2\,x^2 - x + 4) = \\ = 4\,x^2 - 5\,x + 7 + 3\,x^2 + 6\,x - 3 + 2\,x^2 - x + 4 = 9\,x^2 + 8$

b) $A + B - C = (4\,x^2 - 5\,x + 7) + (3\,x^2 + 6\,x - 3) - (2\,x^2 - x + 4) = \\ = 4\,x^2 - 5\,x + 7 + 3\,x^2 + 6\,x - 3 - 2\,x^2 + x - 4 = 5\,x^2 + 2\,x$

c) $A - B + C = (4\,x^2 - 5\,x + 7) - (3\,x^2 + 6\,x - 3) + (2\,x^2 - x + 4) = \\ = 4\,x^2 - 5\,x + 7 - 3\,x^2 - 6\,x + 3 + 2\,x^2 - x + 4 = 3\,x^2 - 12\,x + 14$

d) $-A + B - C = -(4\,x^2 - 5\,x + 7) + (3\,x^2 + 6\,x - 3) - (2\,x^2 - x + 4) = \\ = -4\,x^2 + 5\,x - 7 + 3\,x^2 + 6\,x - 3 - 2\,x^2 + x - 4 = -3\,x^2 + 12\,x - 14$

13. Efectuando previamente los paréntesis:

a) $(A + B) - (C + D) = [(3\,x^5 - 4\,x^2 + 2\,x)] + [(5\,x^3 - 6\,x^2 + 3\,x - 2)] \\ - [(2\,x^5 - 3\,x^3 + 4\,x - 1) + (4\,x^2 + 2\,x - 3)] = \\ = (3\,x^5 - 4\,x^2 + 2\,x + 5\,x^3 - 6\,x^2 + 3\,x - 2) - \\ - (2\,x^5 - 3\,x^3 + 4\,x - 1 + 4\,x^2 + 2\,x - 3) \\ = 3\,x^5 - 4\,x^2 + 2\,x + 5\,x^3 - 6\,x^2 + 3\,x - 2 - 2\,x^5 \\ + 3\,x^3 - 4\,x + 1 - 4\,x^2 - 2\,x + 3 = x^5 + 8\,x^3 \\ - 14\,x^2 - x + 2$

b) $(A - B) + (C - D) = [(3\,x^5 - 4\,x^2 + 2\,x) - (5\,x^3 - 6\,x^2 + 3\,x - 2)] \\ + [(2\,x^5 - 3\,x^3 + 4\,x - 1) - (4\,x^2 + 2\,x - 3)] = \\ = [(3\,x^5 - 4\,x^2 + 2\,x - 5\,x^3 + 6\,x^2 - 3\,x + 2) + \\ + (2\,x^5 - 3\,x^3 + 4\,x - 1 - 4\,x^2 - 2\,x + 3) = \\ = 5\,x^5 - 8\,x^3 - 2\,x^2 + x + 4$

c) $A - B - C + D = (3\,x^5 - 4\,x^2 + 2\,x) - (5\,x^3 - 6\,x^2 + 3\,x - 2) - \\ - (2\,x^5 - 3\,x^3 + 4\,x - 1) + (4\,x^2 + 2\,x - 3) = \\ = 3\,x^5 - 4\,x^2 + 2\,x - 5\,x^3 + 6\,x^2 - 3\,x + 2 - 2\,x^5 + 3\,x^3 - 4\,x + 1 + 4\,x^2 \\ + 2\,x - 3 = x^5 - 2\,x^3 + 6\,x^2 - 3\,x$

14. $(-3\,x\,p\,q^2\,r) \cdot \left(-\frac{2}{3}\,x\,p^2\,q\,r\right) \cdot (-4\,z\,p\,q\,r^2) = -8\,x^2\,p^4\,r^4\,q^4\,z$

15. $\left(\frac{3}{4}\ a\ x^2 + \frac{5}{2}\ b\ x - 4\ c\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\ a\ b\ x^4\right) = -\frac{3}{5}\ a^2\ b\ x^6 -$

$$- 2\ a\ b^2\ x^5 + \frac{16}{5}\ a\ b\ c\ x^4$$

16. $(3\ a^2 + 2\ b^2 + 3\ c^2) \cdot (4\ a^2 + 5\ b^2 - 6\ c^2) = 12\ a^4 + 15\ a^2\ b^2 - 18\ a^2\ c^2 + + 8 b^2\ a^2 + 10\ b^4 - 12\ b^2\ c^2 + 12\ c^2\ a^2 + 15\ c^2\ b^2 - 18\ c^4$

Agrupando términos semejantes, queda:

$$12\ a^4 + 23\ a^2\ b^2 - 6\ a^2\ c^2 + 10\ b^4 + 3\ b^2\ c^2 - 18\ c^4$$

17. $(2\ a\ b^2 - 6\ a^2\ b - b^3 - 5\ a^3) \cdot (8\ a\ b^2 - 3\ b^3 + 3\ a^2\ b) = 16\ a^2\ b^4 - 6\ a\ b^5 + 6\ a^3\ b^3 - 48\ a^3\ b^3 + 18\ a^2\ b^4 - 18\ a^4\ b^2 - 8\ a\ b^5 + 3\ b^6 - 3\ a^2\ b^4 - 40\ a^4 b^2 + 15\ a^3\ b^3 - 15\ a^5\ b =$

Agrupando términos semejantes, queda:

$$= 31\ a^2\ b^4 - 14\ a\ b^5 - 27\ a^3\ b^3 - 58\ a^4\ b^2 - 14\ a\ b^5 + 3\ b^6 - 15\ a^5\ b$$

18. Vamos a efectuar previamente las operaciones indicadas en los paréntesis:

$2\ (a^2 + b^2 + 2\ a\ b) - 3\ (x\ a + x\ b - y\ a - y\ b) + 4\ (x^2 - 2\ x\ y + y^2) = 2\ a^2 + 2\ b^2 + + 4\ a\ b - 3\ a\ x - 3\ b\ x + 3\ a\ y + 3\ b\ y + 4\ x^2 - 8\ x\ y + 4\ y^2$

El segundo factor, desarrollado queda:

$$3\ x - 3\ y - 5\ a - 5\ b$$

Multipliquemos ahora todos los términos de un polinomio por cada uno de los términos del otro y tendremos:

$6\ a^2\ x - 6\ a^2\ y - 10\ a^3 - 10\ a^2\ b + 6\ b^2\ x - 6\ b^2\ y - 10\ b^2\ a - 10\ b^3 + 12\ a\ b\ x - - 12\ a\ b\ y - 20\ a^2\ b - 20\ a\ b^2 - 9\ a\ x^2 + 9\ a\ x\ y + 15\ a^2\ x + 15\ a\ b\ x - 9\ b\ x^2 + + 9\ b\ x\ y + 15\ a\ b\ x + 15\ b^2\ x + 9\ a\ x\ y - 9\ a\ y^2 - 15\ a^2\ y - 15\ a\ b\ y + 9\ b\ x\ y - - 9\ b\ y^2 - 15\ a\ b\ y - 15\ b^2\ y + 12\ x^3 - 12\ x^2\ y - 20\ a\ x^2 - 20\ b\ x^2 - 24\ x^2\ y + + 24\ x\ y^2 + 40\ a\ x\ y + 40\ b\ x\ y + 12\ x\ y^2 - 12\ y^3 - 20\ a\ y^2 - 20\ b\ y^2.$

Agrupando términos semejantes.

$- 10\ a^3 - 30\ a^2\ b - 30\ a\ b^2 - 10\ b^3 + 21\ a^2\ x - 29\ a\ x^2 - 21\ a^2\ y - 29\ a\ y^2 - 21 b^2\ y - 29\ b\ y^2 + 21\ b^2\ x - 29\ b\ x^2 + 42\ a\ b\ x - 42\ a\ b\ y + 58\ a\ x\ y + 58\ b\ x\ y + 12 x^3 - 12\ y^3 - 36\ x^2\ y + 36\ x\ y^2$

19. Dividiendo cada uno de los monomios del dividendo entre el monomio divisor, queda:

$$-\frac{8}{3} a^2\ x + \frac{5}{3} a\ x^2 - \frac{7}{3}\ x \quad \text{que es el polinomio cociente}$$

20. De modo análogo al anterior:

$$-2a^2x + \frac{9}{5}ab^2x^2 - 3$$

21.
$$\begin{array}{l|l}
8x^5 - 14x^4 - 5x^3 + 16x^2 - 8x + 3 & 2x^2 - 5x + 3 \\ \cline{2-2}
\underline{-8x^5 + 20x^4 - 12x^3} & 4x^3 + 3x^2 - x + 1 \\
\quad + 6x^4 - 17x^3 & \\
\quad \underline{-6x^4 + 15x^3 - 9x^2} & \\
\qquad -2x^3 + 7x^2 & \\
\qquad \underline{+2x^3 - 5x^2 + 3x} & \\
\qquad\quad +2x^2 - 5x + 3 & \\
\qquad\quad \underline{-2x^2 + 5x - 3} & \\
\qquad\qquad \text{Resto} = 0 &
\end{array}$$

22. Efectuamos previamente las operaciones indicadas en el dividendo y luego actuamos cómo en el caso anterior.

$$\begin{array}{l|l}
x^2 - y^2 + 4zy - 4z^2 & x + y - 2z \\ \cline{2-2}
\underline{-x^2 \qquad\qquad\qquad + 2xz - xy} & x + 2z - y \\
\qquad\qquad\qquad + 2xz - xy & \\
\qquad \underline{-2zy + 4z^2 - 2xz} & \\
\qquad + 2zy \qquad\qquad - xy & \\
\quad \underline{+y^2 - 2zy \qquad\qquad + xy} & \\
\qquad\qquad \text{Resto} = 0 &
\end{array}$$

23 $\frac{3}{4}a^2c^3 + \frac{6}{125}a^5 \qquad \frac{1}{5}a^2 + \frac{1}{2}ac$

Esta división puede expresarse de otra forma si sacamos factor común en ambos términos a la letra a

$$\begin{array}{l|l}
\frac{3}{4}ac^3 + \frac{6}{125}a^4 & \frac{1}{5}a + \frac{1}{2}c \\ \cline{2-2}
\underline{-\frac{3}{4}ac^3 \qquad\qquad - \frac{15}{8}c^4} & \frac{15}{4}c^3 + \frac{6}{25}a^3 - \frac{3}{5}a^2c + \frac{3}{2}ac^2 - \\
\qquad + \frac{6}{125}a^4 - \frac{15}{8}c^4 & -\frac{15}{4}c^3 \\
\qquad \underline{-\frac{6}{125}a^4 \qquad - \frac{3}{25}a^3c} & \\
\qquad\qquad -\frac{15}{8}c^4 - \frac{3}{25}a^3c & \\
\qquad\qquad\qquad \underline{+\frac{3}{25}a^3c + \frac{3}{10}a^2c^2} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{3}{10}a^2c^2 & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{-\frac{3}{10}a^2c^2 - \frac{3}{4}ac^3} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -\frac{3}{4}ac^3 & \\
\qquad\quad \underline{+\frac{15}{8}c^4 \qquad\qquad\qquad + \frac{3}{4}ac^3} & \\
\qquad\qquad \text{Resto} = 0 &
\end{array}$$

Como el cociente tiene dos términos opuestos, podemos simplificar y entonces, obtendremos:

$$\text{Cociente} : \frac{6}{25}\, a^3 - \frac{3}{5}\, a^2 c + \frac{3}{2}\, a c^2$$

24. Sacando x factor común:

$x (3 x^2 - x + 1)$

25. Igual, con y

$y (- a + b + c)$

26. En este caso, es factor común $2 x y^2$, nos queda:

$2 x y^2 (x y - 3 x + y)$

27. La misma operación anterior, repetida:

$m (x - 2 y) - n (x - 2 y)$. Ahora el factor común es $(x - 2 y)$; $(x - 2 y)(m - n)$

28. Análogamente al caso anterior:

$x^2 (a + b) + 2 (a + b)$

$(a + b) (x^2 + 2)$

29. m c.d.$(12 a^3 b^4, 18 a^4 b^3, 24 a^3 b^2 c) = 6 a^3 b^2$

30. Descomponiendo en factores:

$x^2 - 1 = (x - 1) (x + 1)$

$x^2 - x = x (x - 1)$

m.c.d. $((x^2 - 1), (x^2 - x)) = (x - 1)$

31. Descomponiendo en factores:

$x^5 - x y^2 = x (x^4 - y^2) = x (x^2 - y) (x^2 + y)$

$x^4 + x^2 y = x^2 (x^2 + y)$

m.c.d. $\{(x^5 - x y^2), (x^4 + x^2 y)\} = x (x^2 + y)$

32. Descomponiendo en factores:

$4 - x^2 = (2 - x) (2 + x) = (-1) (x - 2) (2 + x)$

$x^2 - 4 x + 4 = (x - 2)^2 = (x - 2) (x - 2)$

m.c.m.$((4 - x^2), (x^2 - 4 x + 4)) = - (x - 2)^2 (x + 2)$

33. $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$
$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$
$x^2 - x = x(x - 1)$
$\text{m.c.m.}((x^2 - 1), (x^4 - 1), (x^2 - x)) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1)$

34. $x^3 + 2a x^2 = x^2(x + 2a)$
$-a^3 + a x^2 = a(x^2 - a^2) = a(x - a)(x + a)$
$4a^4 x^2 - a^2 x^4 = a^2 x^2 (4a^2 - x^2) = a^2 x^2 (2a - x)(2a + x)$
$\text{m.c.m.} = a^2 x^2 (x + 2a)(x - a)(x + a)(2a - x)$

35. Simplificando factores comunes en el denominador y el numerador, obtenemos:

$$\frac{3}{7abcd}$$

36. $$\frac{m + n}{(m + n)[(m + n) + 1]} = \frac{1}{m + n + 1}$$

37. $$\frac{(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)(x + 5)}{(x - 2)(x + 5)(x - 2)(x^2 - 4)(x^2 + 4)} = \frac{1}{(x - 2)^2}$$

38. El denominador común es a b c d

$$\frac{a^2 d}{abcd}, \quad \frac{b^2 d}{abcd}, \quad \frac{-c^2 a}{abcd}$$

39. El denominador común es $+(a - b)(b - c)(c - a)$

$$\frac{+(c - a)x}{+(a - b)(b - c)(c - a)}, \quad \frac{+(a - b)y}{+(a - b)(b - c)(c - a)},$$

$$\frac{-z(a - b)}{+(a - b)(b - c)(c - a)}$$

40. Descomponiendo el denominador en factores:

$3x^3 - 21x^2 = 3x^2(x - 7)$
$x^2 - 5x - 14 = (x - 7)(x + 2)$
$x^3 - 343 = x^3 - 7^3 = (x - 7)(x^2 + 7x + 49)$

} denominador común es: $(x^3 - 343)(x + 2)(3x^2)$

Las fracciones quedan:

$$\frac{2(x + 2)(x^2 + 7x + 49)}{3x^2(x + 2)(x^3 - 343)}, \quad \frac{9x^3(x^2 + 7x + 49)}{3x^2(x + 2)(x^3 - 343)}, \quad \frac{3x^3(x + 2)}{3x^2(x + 2)(x^3 - 343)}$$

41. Hemos de convertir las fracciones en otras con común denominador: Este será $-(x - y)(x - z)$

$$\frac{-x}{-(x - y)(x - z)} + \frac{-y}{(x - y)(x - z)} = \frac{(x - y)}{(x - y)(x - z)} = \frac{1}{(x - z)}$$

42. Denominador común: $x^2 - 1$

$$\frac{2x(x+1)}{x^2-1} + \frac{(3x+1)(x+1)}{x^2-1} - \frac{1-x}{x^2-1} = \frac{2x^2+2x+3x^2+3x}{x^2-1} +$$

$$+ \frac{x+1-1+x}{x^2-1} = \frac{5x^2+7x}{x^2-1}$$

43. La operación queda en la forma:

$$\left(\frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1-x^2}\right) \cdot \left(\frac{1-x}{x}\right) = \frac{1-x+2x}{1-x^2} \cdot \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x}$$

44. $$\left(\frac{(a+x)^2+(a-x)^2}{(a+x)^2}\right) : \left(\frac{(a+x)^2-(a-x)^2}{(a+x)^2}\right) =$$

$$= \frac{a^2+x^2+2ax+a^2+x^2-2ax}{(a+x)^2} : \frac{a^2+x^2+2ax-(a^2+x^2-2ax)}{(a+x)^2} = \frac{2a^2+2x^2}{(a+x)^2}$$

$$: \frac{4ax}{(a+x)^2} = \frac{2(a^2+x^2)(a+x)^2}{4ax(a+x)^2} = \frac{a^2+x^2}{2ax}$$

45. El numerador dará como resultado:

$$\frac{x^3+y^3}{x^2y^2}$$

y el denominador: $\dfrac{y^2-xy+x^2}{x^2y^2}$

Efectuando ahora el cociente, tendremos:

$$\frac{(x^3+y^3)(x^2y^2)}{(y^2+x^2-xy)x^2y^2} = x+y$$

46. Efectuamos primero las operaciones indicadas en el numerador y denominador.

Numerador: $\dfrac{a+1}{a-1} - \dfrac{a-1}{a+1} = \dfrac{(a+1)^2-(a-1)^2}{a^2-1} =$

$$= \frac{a^2+2a+1-(a^2-2a+1)}{a^2-1} = \frac{4a}{a^2-1}$$

Denominador: $\dfrac{a^2+4a-1}{a^2-1} - 1 = \dfrac{a^2+4a-1-a^2+1}{a^2-1} = \dfrac{4a}{a^2-1}$

y el cociente dará 1 por ser los dos términos iguales.

47. Dividimos, el valor numérico será el resto:

	2	0	−14	12
2		4	8	−12
	2	4	−6	0

El valor numérico es 0

Análogamente

	1	3	−4	−12	0
−3		−3	−0	+12	0
	1	0	−4	0	0

su valor numérico es 0.

48. Realizamos la división, e imponemos la condición de que el resto sea cero:

	3	−p	10
5		15	75 − 5 p
	3	15 − p	85 − 5 p

$85 - 5p = 0 \qquad 5p = 85 \qquad p = \frac{85}{5} = 17$

49. Análogamente

	1	−7	a
2		2	−10
	1	−5	a − 10

$a - 10 = 0 \qquad a = 10$

50.

	3	−9	0	2	−6	0	−1	3	4	−12
3		9	0	0	6	0	0	−3	0	12
	3	0	0	2	0	0	−1	0	4	0

la división es exacta, el cociente es:

$$3x^8 + 2x^5 - x^2 + 4$$

TEMA XV

ECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

ESQUEMA/RESUMEN

1. Ecuaciones lineales.
   - 1.1. Definiciones y generalidades.
   - 1.2. Resolución de ecuaciones lineales.
     - 1.2.1. Resolución de ecuaciones de la forma $x + b = c$
     - 1.2.2. Resolución de ecuaciones de la forma $a\ x = c$
     - 1.2.3. Resolución de ecuaciones de la forma $a\ x + b = c$
     - 1.2.4. Resolución de una ecuación lineal completa.

2. Inecuaciones lineales.
   - 2.1. Definición y generalidades.
   - 2.2. Resolución de inecuaciones lineales.
   - 2.3. Resolución gráfica de una inecuación lineal.

3. Sistemas de ecuaciones lineales.
   - 3.1. Definiciones y generalidades.
   - 3.2. Resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales.
     - 3.2.1. Método de reducción.
     - 3.2.2. Método de sustitución.
     - 3.2.3 Método de igualación.
   - 3.3. Sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas.
   - 3.4. Sistemas de inecuaciones.

4. Resolución de problemas por medio de ecuaciones lineales.
   - 4.1. Consideraciones generales y ejemplos.
   - 4.2. Porcentajes.
   - 4.3. Interés simple.
   - 4.4. Descuento.
   - 4.5. Repartos proporcionales.
   - 4.6. Mezclas.
   - 4.7. Problemas relativos a un móvil.

5. Notas aclaratorias y complementarias.

INSTRUCCIONES PARA EL ESTUDIO DEL TEMA

Después de estudiar las expresiones algebraicas nos iniciamos en las ecuaciones lineales, cuyas características generales, así como los métodos de resolución, vamos a presentar en este tema.

Queremos señalar los aspectos fundamentales que vamos a tratar en las páginas siguientes. Primero, estudiaremos las ecuaciones lineales con una sola incógnita, resultado de la igualación de dos expresiones algebraicas en unas condiciones especiales; luego de ver sus características generales trataremos de aprender a resolver las ecuaciones lineales. Después estudiamos los sistemas de ecuaciones lineales, prestando especial atención a los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. En estos dos puntos, así como al hablar brevemente de las ecuaciones lineales, lo hacemos con gran ilustración de ejemplos, resueltos con gran detalle, esperando que el alumno preste la atención debida.

Por último, en las «Notas aclaratorias y complementarias» intentamos llegar al concepto de ecuación lineal partiendo de los estudios realizados en la primera Unidad Didáctica de este Curso de Matemáticas Básicas.

BIBLIOTECA PUBLICA
PTO. STA. MARIA

1. ECUACIONES LINEALES

1.1. Definiciones y generalidades

En el tema anterior hemos visto que una expresión algebraica indica diversas operaciones con números, algunos de los cuales pueden estar representados por letras.

De la consideración de dos expresiones algebraicas nace el concepto de ecuación. La igualdad de dos expresiones algebraicas puede tener dos significados distintos:

a) Cuando sustituidas cada una de las letras que figuran en ambas expresiones por un mismo número, los valores numéricos que resultan para ambas son siempre iguales: en este caso se dice que las dos expresiones son idénticas o equivalentes. A este tipo de igualdades se las llama *identidades*.

Asi, la igualdad

$$9\,x^2 - 1 = (3\,x - 1)\,(3\,x + 1)$$

es una identidad, las dos expresiones anteriores toman los mismos valores numéricos, cualquiera que sea el valor tomado por la variable x.

b) Cuando las dos expresiones algebraicas que igualamos no son idénticas, esto es, la igualdad solamente es cierta para unos ciertos valores de la variable o variables que integran estas expresiones. A este tipo de igualdades las llamaremos *ecuaciones*.

Por ejemplo, la igualdad

$$3\,x - 1 = x + 1$$

solamente es cierta para $x = 1$; $3 \cdot 1 - 1 = 1 + 1$, $2 = 2$ se comprueba que si $x = 3$, no existe igualdad:

$$3 \cdot 3 - 1 = 3 + 1, \; 8 \neq 4$$

También es una ecuación

$$3x + 12 = 0$$

esta igualdad solamente es válida, cuando $x = -4$

$$3(-4) + 12 = 0$$

Ahora, nos va a preocupar solamente, este segundo caso, vamos a tratar de estudiar diversos tipos de ecuaciones. En general, una ecuación nos presenta diversos problemas, pero dos son los más importantes, que esquematizamos con estas dos preguntas:

i) ¿Habrá algunos números que puedan sustituir a las letras que figuran en las expresiones algebraicas igualadas de modo que sus valores numéricos sean iguales?

ii) ¿Cómo encontrar estos números?

En definitiva, y concretando, nos preocupa *resolver* una ecuación, esto es, hallar el valor o valores que sustituidos en el lugar de la variable o indeterminada hacen verdadera la igualdad. Las indeterminadas que figuran en las ecuaciones suelen llamarse *cantidades incógnitas* o simplemente *incógnitas.*

Nos ocuparemos de la resolución de ciertas ecuaciones que tienen una sola incógnita, figurando esta incógnita con exponente 1, o sea, el grado de los polinomios que intervienen en las ecuaciones que vamos a tratar es uno. A estas ecuaciones las llamaremos ecuaciones de primer grado o *ecuaciones lineales.*

De ordinario, las incógnitas las designaremos con las últimas letras del abecedario x, y, z, ...reservando las primeras letras para los coeficientes, cuando estos no son numéricos.

1.2. Resolución de ecuaciones lineales

Vamos a dar unas normas para resolver las ecuaciones lineales más importantes, pero antes conviene saber que dos ecuaciones son equivalentes si admiten las mismas soluciones. Para demostrar que dos ecuaciones son equivalentes hay que probar dos cosas: una, que toda solución de la primera es solución de la segunda y otra, reciproca de la anterior, toda solución de la segunda es solución de la primera.

Es evidente, que dos ecuaciones equivalentes a una tercera son equivalentes entre si.

En definitiva, la resolución de una ecuación consiste en la transformación de una ecuación en otras sucesivas equivalentes con la dada, hasta llegar a una en que su solución sea evidente.

1.2.1. Resolución de ecuaciones de la forma $x + b = c$

$$x + b = c$$

sumando, a los 2 miembros de esta igualdad, el opuesto de b, obtenemos:

$$(x + b) + (- b) = c + (- b)$$

$$x + b + (- b) = c + (- b)$$

luego:

$$x = c - b$$

Ejemplo: Sea la ecuación $x + 5 = 9$

el valor de la incógnita es: $x = 9 - 5 = 4$

Se puede comprobar que $x = 4$ es el único valor que satisface a la ecuación de partida.

Otro ejemplo: $12 - x = 4$

aunque, a primera vista, parezca esta ecuación distinta de la anterior, no es asi, se puede escribir:

$$- x + 12 = 4$$

cambiando el signo a los dos miembros de la igualdad (esto equivale a multiplicar por $- 1$ ambos miembros), tenemos una ecuación de la forma $x + b = c$:

$$x - 12 = - 4$$

su solución es:

$$x = - 4 + 12 = 8$$

1.2.2. Resolución de ecuaciones de la forma a x = c.

En la ecuación

$$a\,x = c$$

suponemos siempre que $a \neq 0$, de esta manera se pueden multiplicar los dos miembros de la ecuación por el reciproco de a, esto es $\frac{1}{a}$, resultando:

$$(a\ x) \cdot \frac{1}{a} = c \cdot \frac{1}{a}$$

luego:

$$x = \frac{c}{a}$$

Por ejemplo, la solución de $- 5\,x = \frac{3}{4}$ es

$$x = \frac{3}{4} \cdot \left(- \frac{1}{5} \right) = - \frac{3}{20} = - 0{,}15$$

otro ejemplo, la ecuación $\frac{3}{2}\,x = \frac{9}{2}$ tiene la solución:

$$x = \frac{9}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

1.2.3. Resolución de ecuaciones de la forma a x + b = c

Teniendo presente lo visto en los párrafos 1.2.1. y 1.2.2., podemos obtener la solución de esta ecuación de una forma sencilla.

Primero, sumamos a los dos miembros de la ecuación el opuesto de b, resulta:

$$(a\,x + b) + (-b) = c + (-b)$$

esto es,

$$a\,x = c - b$$

Suponiendo que $a \neq 0$ multiplicamos los dos miembros de la ecuación por $\frac{1}{a}$, inverso de a:

$$(a\,x)\frac{1}{a} = (c - b)\,\frac{1}{a}$$

$$x = \frac{c - b}{a}$$

Algunos ejemplos, aclararán este proceso: sea la ecuación

$$2\,x + 5 = 1$$
$$2\,x = 1 - 5$$
$$2\,x = -4$$
$$x = -\frac{4}{2} = -2$$

Consideremos, ahora, la ecuación: $\frac{2}{3}x + 4 = 0$,

siguiendo un proceso análogo, tenemos:

$$\frac{2}{3}x = 0 - 4$$

$$\frac{2}{3}x = -4$$

$$x = -4 \cdot \frac{3}{2} = -\frac{12}{2} = -6$$

Por último, otro ejemplo: $-\frac{2}{3}\,x - 8 = \frac{7}{3}$

operando de la misma manera:

$$-\frac{2}{3}\,x = \frac{7}{3} + 8 = \frac{31}{3}$$

$$-\frac{2}{3}\,x = \frac{31}{3}$$

$$x = \frac{31}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{31}{2}$$

1.2.4. Resolución de una ecuación lineal completa

Entendemos por ecuación lineal completa, las resultantes de la igualación de dos expresiones algebraicas, o sea, cada uno de sus miembros está formado por varios monomios.

La resolución de este tipo de ecuaciones no entraña especial dificultad, puesto que, utiliza propiedades empleadas en distintas ocasiones de esta Unidad Didáctica y pensamos que el alumno ya está familiarizado con ellas. De todas maneras las repetimos una vez más:

* Si a los miembros de una ecuación se les suma o resta una misma expresión entera o un mismo número resulta una ecuación equivalente a la primera. Parece entonces lógico:

i) En una ecuación se puede trasponer un término de un miembro a otro, a condición de cambiar el signo que le precede.

ii) Se puede cambiar los signos de todos los términos de una ecuación.

iii) En toda ecuación se puede reducir el segundo miembro a cero, trasponiendo todos los términos al primer miembro.

* Si a los dos miembros de una ecuación se les multiplica o divide por un mismo número, diferente de cero, resulta una ecuación equivalente a la propuesta. De aquí se desprenden dos aplicaciones inmediatas:

i) Se pueden suprimir los denominadores de una ecuación multiplicando todos sus términos por un múltiplo común de los denominadores.

ii) Se puede simplificar una ecuación dividiendo todos sus términos por un mismo número, diferente de cero.

A continuación, a través de una serie de ejemplos, vamos a aprender a resolver ecuaciones lineales, pero antes con el fin de ayudar a fijar ideas, vamos a dar unas reglas o normas a modo indicativo:

1. Suprimir los denominadores —si hay lugar— multiplicando cada término por un múltiplo común de los denominadores.

2. Reducir los dos miembros de la ecuación así obtenida.

3. Trasponer a un miembro los términos que contienen la incógnita y al otro los términos que no la contienen.

4. Para obtener la solución, basta dividir el término conocido por el coeficiente de la incógnita.

Veamos los ejemplos que antes anunciábamos. Sea en primer lugar una ecuación sin denominadores:

$$4x + 7 = -5x - 8$$

ponemos todos los términos que tienen incógnita en el primer miembro y los que no la tienen en el segundo:

$$4x + 5x = -8 - 7$$

reduciendo términos:

$$9x = -15$$

obtenemos la solución:

$$x = -\frac{15}{9} = -\frac{5}{3}$$

Tratamos de resolver una ecuación con denominadores:

$$\frac{6}{5}x + \frac{3}{4} = 3x - \frac{1}{2}$$

Suprimimos denominadores, multiplicando los dos miembros de esta ecuación, por el m.c.m. de 2, 5 y 4 que es 20:

$$24x + 15 = 60x - 10$$

nos encontramos con una ecuación semejante a la anterior; transponiendo términos:

$$24x - 60x = -10 - 15$$

reduciendo términos:

$$-36x = -25$$

luego:

$$x = \frac{-25}{-36} = \frac{25}{36}$$

Consideremos, finalmente la ecuación:

$$\frac{x}{3} - \frac{x-3}{2} - 1 = -\frac{1}{4}$$

Quitamos denominadores, multiplicando por 8 los dos miembros de esta ecuación

$$x - 4(x - 3) - 8 = -2$$

Quitando el paréntesis:

$$x - 4x + 12 - 8 = -2$$

Transponiendo términos:

$$x - 4x = -2 + 8 - 12$$

Reduciendo términos semejantes:

$$-3x = -6$$

luego

$$x = \frac{-6}{-3} = 2$$

Ejercicios y ejemplos

1. Resolver la ecuación: $2x + 3(x + 2) = 3x + 14$

Quitamos, en primer lugar, el paréntesis que figura en el primer miembro:

$$2x + 3x + 6 = 3x + 14$$

trasponiendo términos

$$2x + 3x - 3x = 14 - 6$$

Reduciendo términos

$$2x = 8$$

$$x = \frac{8}{2} = 4$$

2. Resolver la ecuación: $\frac{x}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x}{12} = 18$

Para quitar denominadores, averiguamos su m.c.m, que es 12, multiplicando los dos miembros de la ecuación por 12 y operando como en otras ocasiones:

$$6x + 2x + x = 216$$

$$9x = 216$$

$$x = \frac{216}{9} = 24$$

3. Hallar la solución de la ecuación: $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{3}{x+2}$

En esta ecuación, la incógnita x figura en el denominador. Para su solución se actúa de igual manera: el m.c.m. de los denominadores es $(x - 1)(x + 1)(x + 2)$, luego

$$(x + 1)(x + 2) + 2(x - 1)(x + 2) = 3(x - 1)(x + 1)$$

$$x^2 + 3x + 2 + 2x^2 + 2x - 4 = 3x^2 - 3$$

al reducir términos semejantes, los términos de segundo grado desaparecen:

$$5x = -1$$

$$x = -\frac{1}{5}$$

4. Resolver la ecuación: $\frac{3x+4}{x+2} - \frac{3x-5}{x-4} = \frac{12}{x^2-2x-8}$

El m.c.m. de los denominadores es $(x + 2)(x - 4)$, de donde:

$$(3x + 4)(x - 4) - (x + 2)(3x - 5) = 12$$

quitando paréntesis y simplificando:

$$3x^2 - 8x - 16 - (3x^2 + x - 10) = 12$$

$$3x^2 - 8x - 16 - 3x^2 - x + 10 = 12$$

$$-9x = +18$$

$$x = -2$$

5. Resolver la ecuación: $\sqrt{x+13} - \sqrt{x+6} = 1$

Esta ecuación presenta una nueva dificultad, la incógnita figura dentro del signo radical, lo primero que tenemos que hacer es quitar los radicales. Aislamos un radical en un miembro:

$$\sqrt{x+13} = 1 + \sqrt{x+6}$$

elevando al cuadrado los dos miembros de esta ecuación:

$$(\sqrt{x+13})^2 = (1 + \sqrt{x+6})^2$$

$$x + 13 = 1 + 2\sqrt{x+6} + x + 6$$

todavia tenemos la incógnita bajo el signo radical. Repetimos el proceso anterior:

$$x + 13 - 1 - x - 6 = 2\sqrt{x+6}$$

$$6 = 2\sqrt{x+6}$$

simplificando:

$$3 = \sqrt{x+6}$$

volvemos a elevar al cuadrado:

$$3^2 = (\sqrt{x+6})^2$$

$$9 = x + 6$$

$$x = 9 - 6$$

$$x = 3$$

6. Resolver la ecuación: $15x - 3[7x - 2(2x + 7)] = 6$

Primero efectuamos las operaciones indicadas

$$15x - 3[7x - 4x - 14] = 6$$

quitando este nuevo paréntesis:

$$15\,x - 21\,x + 12\,x + 42 = 6$$

Reduciendo términos semejantes:

$$6\,x = -36$$

$$x = -\frac{36}{6} = -6$$

7. Resolver la ecuación: $5\,x - 6 = 4\,(x - 1) + x$

Efectuando las operaciones indicadas y operando como en otras ocasiones

$$5\,x - 6 = 4\,x - 4 + x$$
$$5\,x - 4\,x - x = -4 + 6$$
$$0\,x = 2$$

esta ecuación presenta una «imposibilidad», cualquiera que sea el valor que tome la incógnita x, multiplicado por 0 no puede ser igual a 2. Luego dicha ecuación carece de solución.

8. Tratamos de resolver la ecuación siguiente:

$$(x + 3)^2 - (x - 3)^2 = 12\,x$$

Realizamos los cuadrados que están indicados:

$$(x^2 + 6\,x + 9) - (x^2 - 6\,x + 9) = 12\,x$$

quitando los paréntesis:

$$x^2 + 6\,x + 9 - x^2 + 6\,x - 9 = 12\,x$$

$$12\,x = 12\,x$$

$$12\,x - 12\,x = 0$$

$$0\,x = 0$$

en este caso tenemos una «indeterminación»: Cualquiera que sea el valor de x, se verificaria esta última igualdad, como consecuencia, la ecuación tiene infinitas soluciones.

2. INECUACIONES LINEALES

2.1. Definición y generalidades

Hemos visto que dados dos números racionales cualesquiera, positivos, nulos o negativos, *a* y *b*, si la diferencia $a - b$ es positiva se dice que *a* es mayor que *b* y escribimos: $a > b$; también se dice, de otra forma equivalente, que *b* es menor que *a*, lo que se escribe $b < a$. De esta forma tenemos tres maneras equivalentes de expresar la misma relación:

$$a>b \quad b<a \quad a - b>0$$

Algo semejante ocurre con las expresiones algebraicas: Si A y B son dos expresiones algebraicas, la desigualdad:

$$A>B$$

puede resultar cierta para todos los valores numéricos que se sustituyan en vez de las letras que figuran en dichas expresiones, así, por ejemplo:

$$x^2 + 10>x^2$$

puesto que el número $x^2 + 10$ es siempre mayor que el x^2.

Pero en muchos casos hay un conjunto de valores numéricos que sustituidos en las expresiones A y B hacen que efectivamente sea A > B, mientras que para otros valores dicha desigualdad no es cierta. Estas desigualdades reciben el nombre de *inecuaciones*.

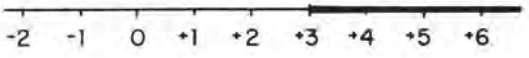
De acuerdo con lo visto con los números racionales, son equivalentes las inecuaciones:

$$A > B \quad B < A \quad A - B > O$$

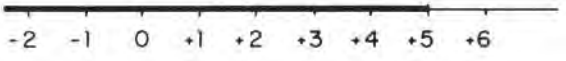
Después de esta presentación podemos dar una definición de *inecuación*, parecida a la dada cuando estudiamos las ecuaciones: Una inecuación con una incógnita es una desigualdad entre expresiones algebraicas que contienen un número indeterminado, siendo verdadera para un conjunto de valores de la incógnita.

Vamos a familiarizarnos con estas ideas a través de algunos ejemplos. Consideremos la inecuación $x \geqslant +3$.

La representación gráfica del conjunto de soluciones de esta inecuación es la semirrecta de origen $x = +3$ de sentido positivo.



Sea ahora, la inecuación $x - 5 < 0$, según lo visto se puede escribir a través de otra inecuación equivalente $x < +5$, su representación gráfica es la semirrecta dibujada a continuación:



Conviene observar que en la primera inecuación el conjunto solución contiene el punto $x = +3$, origen de la semirrecta. Mientras que en la segunda inecuación el punto $x = +5$ origen de la semirrecta, se excluye del conjunto de soluciones. Como consecuencia, conviene prestar atención en cada caso a cuál de los dos signos $<, \leqslant$ se ha empleado o debe emplearse.

2.2. Resolución de inecuaciones lineales

Llamaremos *inecuación lineal* o inecuación de primer grado, a toda inecuación que se puede expresar así:

$$a x + b > 0 \text{ siendo } a \neq 0$$

Hemos visto que en la ecuación lineal de la forma, $a\,x + b = 0$, teníamos una solución única, en cambio, en el caso de la inecuación $a\,x + b > 0$, no sucede lo mismo, el conjunto solución de la inecuación estará formado por infinitos números.

En efecto, de acuerdo con la propiedad distributiva del producto, el primer miembro de la inecuación que estamos tratando se escribe:

$$a\,x + b = a\left(x + \frac{b}{a}\right) \quad (a \neq 0)$$

luego, la inecuación toma la forma:

$$a\left(x + \frac{b}{a}\right) > 0 \ *$$

Se nos presenta así un producto de dos factores que ha de ser positivo, lo que sólo puede suceder si los dos factores son del mismo signo (ambos positivos o ambos negativos). Distinguiremos dos casos:

1. *a positivo* $(a > 0)$

El segundo factor de * también tiene que ser positivo:

$$x + \frac{b}{a} > 0$$

y, como $x - \left(-\frac{b}{a}\right) = x + \frac{b}{a}$, tiene que ser:

$$x - \left(-\frac{b}{a}\right) > 0$$

o lo que es lo mismo,

$$x > \frac{-b}{a} \quad (\text{para } a > 0)$$

luego, el conjunto de las soluciones de la inecuación lineal $a\,x + b > 0$, si $a > 0$, está formado por todos los números x que verifican $x > \frac{-b}{a}$.

2. *a negativo* $(a < 0)$

Estamos en una circunstancia contraria a la anterior, el segundo factor ha de ser negativo, lo mismo que *a* de *.

Entonces:

$$x - \left(-\frac{b}{a}\right) < 0$$

lo que únicamente se cumple para:

$$x < -\frac{b}{a} \quad (\text{para } a < 0)$$

El conjunto solución de la inecuación lineal $a\,x + b > 0$, si $a < 0$, está formado por todos los números x que cumplen $x < -\frac{b}{a}$.

Veamos dos ejemplos:

Sea la inecuación lineal: $2\,x - 5 > 0$

Es equivalente a: $2\left(x - \frac{5}{2}\right) > 0$

por ser 2 un número positivo ha de serlo $x - \frac{5}{2} > 0$

El conjunto solución está formado por todos los números mayores que

$$\frac{5}{2} \qquad x > \frac{5}{2}$$

Consideremos, ahora, la inecuación lineal: $3\,x - 8 > 7\,x - 5$

según lo visto anteriormente es equivalente a: $(3\,x - 8) - (7\,x - 5) > 0$

Efectuando esta diferencia:

$$-4\,x - 3 > 0$$

también se puede escribir:

$$-4\left(x + \frac{3}{4}\right) > 0$$

para que el producto sea positivo, siendo negativo el factor -4, deberá ser negativo el otro factor: $x + \frac{3}{4} < 0$.
El conjunto solución de la inecuación lineal está formado por todos los números x que verifican:

$$x < -\frac{3}{4}$$

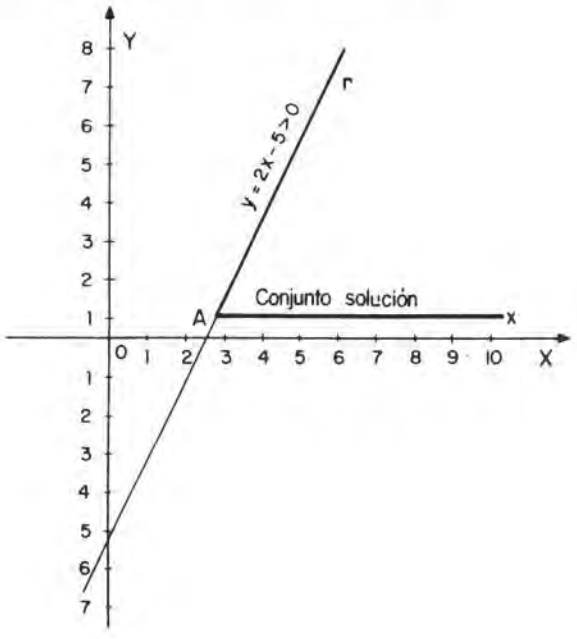
2.3. Resolución gráfica de una inecuación lineal

Dibujada la recta $y = a\,x + b$, es decir, formada por todos los puntos de coordenadas $(x, a\,x + b)$, una solución de la inecuación:

$$a\,x + b > 0$$

es un número x para el cual la ordenada correspondiente del punto de la recta anterior es positiva. Considerada la semirrecta que está situada por encima del eje $0\,x$, el conjunto solución está determinado por la proyección de dicha semirrecta sobre ese eje $0\,x$.

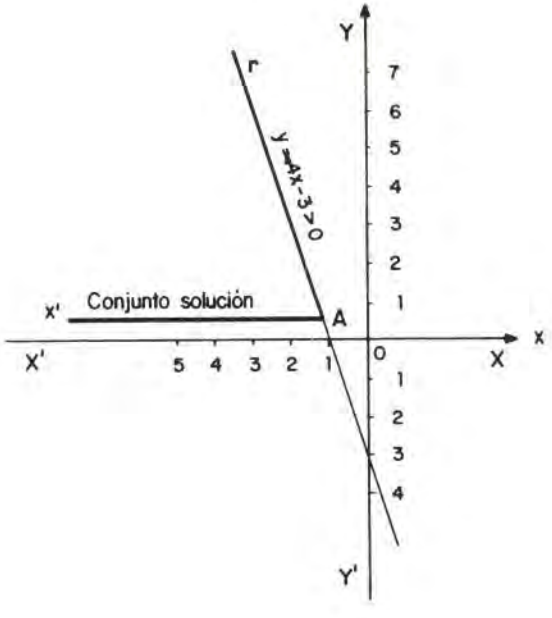
En un primer ejemplo, tratamos de resolver gráficamente la inecuación: $2x - 5 > 0$*



La semirrecta *A r* es la imagen de los pares *(x, 2 x − 5)*, cuya ordenada es positiva. El conjunto solución es la semirrecta *A x*, donde están representados todos los números x abscisas de los puntos anteriores.

Vamos a resolver gráficamente, ahora, la inecuación:

$$-4x - 3 > 0$$



* Para representar la recta $y = 2x - 5$ o cualquier otra, basta dar valores a la variable x y obtener los correspondientes valores de la incógnita y, llevándolos luego a los ejes coordenados. En este caso:

x	0	1	2
y	− 5	− 3	− 1

Una vez dibujada la recta *r*, $y = -4x - 3$. La semirrecta *Ar* contiene a todos los puntos para los cuales la ordenada $-4x - 3$ es positiva; el conjunto solución es la semirrecta *Ax'*.

3. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

3.1. Definiciones y generalidades

La igualdad

$$2x + 5y = 9$$

es una ecuación con dos incógnitas, *x* e *y*. Los dos miembros de esta igualdad se hacen idénticos, si atribuimos a *x* e *y* unos valores determinados. Por ejemplo, si $x = -3$ e $y = 3$ resulta:

$$2(-3) + 5 \cdot 3 = -6 + 15 = 9$$

El sistema de valores: $x = -3$ e $y = 3$ es una solución de la ecuación dada.

No es ésta la única solución de dicha ecuación, pues a cada valor arbitrario que demos a x corresponderá otro valor determinado para y, por tanto, tiene infinitas soluciones.

Asi, haciendo $x = 2$ resulta $y = \frac{9-4}{5} = \frac{5}{5} = 1$

$$x = -3 \qquad y = \frac{9+6}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

$$x = 7 \quad \text{resulta} \quad y = \frac{9-14}{5} = \frac{-5}{5} = -1$$

$$x = 12 \qquad y = \frac{9-24}{5} = \frac{-15}{5} = -3$$

y asi sucesivamente.

Se llama *solución* de una ecuación, con varias incógnitas, a todo sistema de valores atribuidos a estas incógnitas, que convierte la ecuación en una igualdad numérica.

Parece evidente que una ecuación lineal con dos incógnitas tiene infinitas soluciones.

Muchas veces se presentan problemas que se resuelven planteando varias ecuaciones a las cuales han de satisfacer simultáneamente las soluciones buscadas. En estos casos lo que nos interesa es encontrar una posible solución común a las dos o más ecuaciones que forman el sistema. Llamaremos soluciones del sistema a las soluciones comunes.

De manera general diremos que dos o más ecuaciones forman un sistema o son simultáneas cuando tienen las mismas soluciones.

Sistemas equivalentes son los que tienen las mismas soluciones. Solución de un sistema es el conjunto de valores de las incógnitas, que sustituidos en vez de ellas en todas las ecuaciones, las transforman en identidades.

Según el número de soluciones los sistemas se clasifican en determinados, indeterminados e incompatibles.

Sistemas
- determinados: Número de soluciones limitado.
- indeterminados: Número de soluciones ilimitado.
- incompatibles: No tiene solución.

3.2. Resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales

En un principio nos vamos a referir a sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, pero se puede generalizar a cualquier tipo de sistemas.

Existen tres métodos, fundamentalmente, para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales que estudiamos a continuación.

3.2.1. Método de reducción

Consiste en buscar una combinación de ambas ecuaciones que contenga una sola incógnita, para ello basta multiplicar cada ecuación por un número adecuado de manera que una misma incógnita tenga el mismo coeficiente en las dos ecuaciones. Sumando o restando las dos ecuaciones se logra eliminar dicha incógnita.

Resolver el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 4y &= 19 \\ 7x - 2y &= -1 \end{aligned}\right\}$$

Multiplicando la segunda ecuación por 2:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 4y &= 19 \\ 14x - 4y &= -2 \end{aligned}\right\}$$

Sumando:

$$17x = 17$$

Obtenemos una ecuación lineal con una incógnita:

$$x = \frac{17}{17} = 1$$

Sustituyendo este valor en la primera de las ecuaciones dadas:

$$3 + 4y = 19$$

que, también es una ecuación con una incógnita, luego:

$$4y = 19 - 3 = 16$$

$$y = \frac{16}{4} = 4$$

Consideremos este otro sistema:

$$\left.\begin{aligned} 5x + 2y &= 9 \\ 3x + 2y &= 7 \end{aligned}\right\}$$

En este caso, los coeficientes de *y*, en ambas ecuaciones, son iguales. Basta restar miembro a miembro para obtener una ecuación con una sola incógnita *x*:

$$\left.\begin{array}{r} 5x + 2y = 9 \\ -3x - 2y = -7 \end{array}\right\}$$
$$2x = 2$$

$$\text{luego } x = \frac{2}{2} = 1$$

Sustituimos este valor en cualquiera de las ecuaciones de partida, dará el valor de y:

$$5 + 2y = 9$$
$$2y = 9 - 5$$
$$2y = 4$$

$$y = \frac{4}{2} = 2$$

Resolvemos, por último, este nuevo sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 6x - 7y = 53 \\ 8x + 3y = 9 \end{array}\right\}$$

Para eliminar x, averiguamos el m. c. m. de 6 y 8, que es 24. Si multiplicamos la primera ecuación por 24: 6 = 4, y la segunda por 24: 8 = 3.

Obtenemos.:

$$\left.\begin{array}{l} 24x - 28y = 212 \\ 24x + 9y = 27 \end{array}\right\}$$

Restando ambas ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 24x - 28y = 212 \\ -24x - 9y = -27 \end{array}\right\}$$
$$-37y = 185$$

$$y = -\frac{185}{37} = -5$$

Sustituyendo este valor en cualquiera de las ecuaciones dadas, por ejemplo, en la primera:

$$6x + 35 = 53$$
$$6x = 18$$
$$x = 3$$

Este ejemplo, nos permite dar una regla de fácil aplicación, generalizando el procedimiento utilizado:

Para eliminar por reducción una incógnita, *x*, por ejemplo, entre dos ecuaciones, se halla el m.c.m. de los coeficientes de *x* en ambas; se multiplica cada ecuación por el cociente del m.c.m. por el coeficiente de su *x*; finalmente, se suman o restan según que los términos en *x* tuvieran signos contrarios o iguales.

3.2.2. Método de sustitución

Tratamos de obtener lo mismo que nos proponíamos con el método anterior. Para eliminar una incógnita, utilizando este método, se despeja en una de las ecuaciones, sustituyendo la expresión asi obtenida en su lugar en la ecuación restante, obteniendo una ecuación que no contiene nada más que una incógnita.

Vamos a resolver por este método el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 6y = 21 \\ 7x - 4y = 13 \end{array}\right\}$$

Despejando x en la primera ecuación:

$$x = \frac{21 - 6y}{3} = 7 - 2y^{*}$$

sustituyendo este valor en la segunda ecuación, queda:

$$7(7 - 2y) - 4y = 13$$

es una ecuación con una sola incógnita:

$$49 - 14y - 4y = 13$$

$$18y = 49 - 13$$

$$y = \frac{36}{18} = 2$$

Llevando este valor a la expresión *:

$$x = 7 - 2 \cdot 2 = 7 - 4 = 3$$

Sea, ahora, el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 3y + 5 = 0 \\ x + y = 0 \end{array}\right\}$$

lo vamos a resolver utilizando este método:

Despejamos x de la segunda ecuación:

$$x = -y$$

Sustituimos en la primera ecuación:

$$2(-y) + 3y + 5 = 0$$

ya tenemos una ecuación con una sola incógnita:

$$-2y + 3y + 5 = 0$$

$$y + 5 = 0$$

$$y = -5$$

como ya tenemos la incógnita x despejada, resulta:

$$x = -(-5) = 5$$

3.2.3. Método de igualación

Si de las dos ecuaciones de un sistema despejamos una misma incógnita obtendremos dos expresiones distintas para la misma, que deben dar iguales valores numéricos de dicha incógnita. Igualando ambas expresiones se obtiene una ecuación en la otra incógnita que se resuelve.

Veamos dos ejemplos, en primer lugar el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 3x + y &= 1 \\ 4x + 2y &= 6 \end{aligned}\right\}$$

Despejamos de ambas ecuaciones la incógnita y:

De la primera ecuación $y = 1 - 3x$

De la segunda ecuación $y = \frac{6 - 4x}{2} = 3 - 2x$

Igualando estas dos expresiones, obtenemos una nueva ecuación con una sola incógnita x, que resolvemos de la forma ya conocida:

$$\begin{aligned} 1 - 3x &= 3 - 2x \\ -3x + 2x &= 3 - 1 \\ -x &= 2 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Tomando una cualquiera de las expresiones de y, obtenidas antes tenemos:

$$y = 1 - 3(-2) = 1 + 6 = 7$$

Sea ahora el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 4x - 3y + 5 &= 0 \\ 2x + 6y - 3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Despejamos y de las dos ecuaciones:

$$y = \frac{4x + 5}{3}, \quad y = \frac{-2x + 3}{6}$$

Igualando:

$$\frac{4x + 5}{3} = \frac{-2x + 3}{6}$$

es una ecuación con una sola incógnita, y los denominadores podemos suprimirlos multiplicando los dos miembros de la ecuación por 6, luego operamos de la forma acostumbrada:

$$\begin{aligned} 8x + 10 &= -2x + 3 \\ 8x + 2x &= -10 + 3 \\ 10x &= -7 \end{aligned}$$

$$x = -\frac{7}{10}$$

Averiguamos el valor de la incógnita y, como en el ejemplo anterior:

$$y = \frac{4\left(-\frac{7}{10}\right)+5}{3} = \frac{-\frac{28}{10}+5}{3} = \frac{\frac{-28+50}{10}}{3} = \frac{22}{30} = \frac{11}{15}$$

3.3. Sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas

Como ya hemos anunciado en otra parte de este tema, pueden existir sistemas de ecuaciones lineales, distintos a los considerados, a modo de generalización vamos a resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas.

Para resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, despejaremos una de las incógnitas de una de las ecuaciones y sustituiremos en las restantes la expresión obtenida en la primera ecuación. Obtenemos así dos ecuaciones con las dos incógnitas restantes. Resuelto este nuevo sistema, sustituiremos la solución obtenida en la primera ecuación, la cual dará el valor de la incógnita eliminada en primer lugar.

Vamos a resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 4x + 3y + 2z = 1 \\ 6x + 2y - 3z = 2 \\ x - 2y - 5z = 3 \end{array}\right\}$$

De la primera despejamos $x = \frac{1 - 3y - 2z}{4}$ y sustituimos en las otras dos:

$$\left.\begin{array}{l} 6\frac{1 - 3y - 2z}{4} + 2y - 3z = 2 \\ \frac{1 - 3y - 2z}{4} - 2y - 5z = 3 \end{array}\right\}$$

quitamos denominadores y reducimos términos semejantes:

$$\left.\begin{array}{r} 6 - 18y - 12z + 8y - 12z = 8 \\ 1 - 3y - 2z - 8y - 20z = 12 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 5y + 12z = -1 \\ y + 2z = -1 \end{array}\right\}$$

tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, despejamos *y* de la segunda:

$$y = -1 - 2z$$

sustituyendo en la primera:

$$\begin{gathered} 5(-1 - 2z) + 12z = -1 \\ -5 - 10z + 12z = -1 \\ -10z + 12z = -1 + 5 \\ 2z = 4 \\ z = 2 \end{gathered}$$

Como consecuencia, sustituyendo este valor, obtenemos *y*:

$$y = -1 - 2 \cdot 2 = -1 - 4 = -5$$

conociendo z e y se puede averiguar x, sustituyendo estos valores en la primera ecuación o en la expresión obtenida de x.

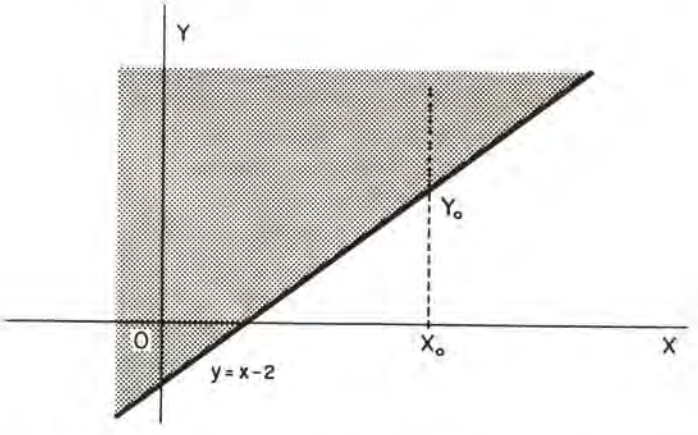
$$4x + 3(-5) + 2(+2) = 1$$

$$x = \frac{1 + 15 - 4}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

3.4. Sistemas de inecuaciones

Hemos visto que la representación de una ecuación con dos incógnitas es una recta. Por ejemplo, en la figura adjunta hemos dibujado la recta que representa la ecuación

$y = x - 2$



consideremos ahora los valores $y \geqslant x - 2$

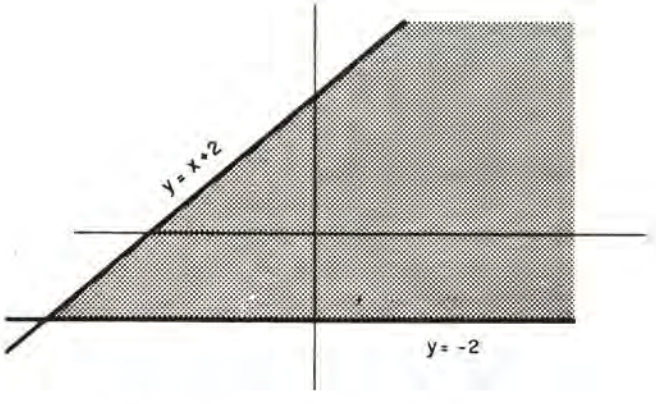
En la representación gráfica corresponden a los puntos situados por encima de la recta $y = x - 2$ (zona gris).

La inecuación $y \geqslant x - 2$ representa un semiplano.

Si consideramos un sistema de dos inecuaciones, su representación se deduce fácilmente de lo dicho: cada inecuación representa un semiplano, luego un sistema de dos inecuaciones, los pares de valores que satisfacen a la vez a las dos inecuaciones son los puntos de intersección de los dos semiplanos.

Vamos a representar en la figura siguiente la solución del sistema de ecuaciones:

$$y < x + 2$$
$$y > -2$$



La zona gris es la representación gráfica del sistema considerado.

Ejercicios y problemas

1. Resolver por el método de sustitución el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 6y &= 21 \\ 7x - 4y &= 13 \end{aligned}\right\}$$

Despejando x en la primera ecuación:

$$x = \frac{21 - 6y}{3} \quad *$$

sustituyendo en la segunda ecuación:

$$\frac{7(21 - 6y)}{3} - 4y = 13$$

es una ecuación con una incógnita que resolvemos:

$$147 - 42y - 12y = 39$$
$$54y = 108$$
$$y = \frac{108}{54} = 2$$

Llevando este valor a *

$$x = \frac{21 - 6 \cdot 2}{3} = \frac{21 - 12}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

2. Utilizando el método de igualación resolver el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 5y &= 15 \\ 3x - 4y &= 11 \end{aligned}\right\}$$

Despejando x en ambas ecuaciones, obtenemos:

$$x = \frac{15 - 5y}{2} \qquad x = \frac{11 + 4y}{3}$$

igualando, se obtiene:

$$\frac{15 - 5y}{2} = \frac{11 + 4y}{3}$$

quitando denominadores:

$$45 - 15y = 22 + 8y$$
$$-15y - 8y = 22 - 45$$
$$-23y = -23$$
$$y = \frac{23}{23} = 1$$

por el procedimiento de siempre obtenemos la otra incógnita:

$$x = \frac{15 - 5 \cdot 1}{2} = \frac{15 - 5}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

3. Resolver, por el método de reducción, el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 4y &= 19 \\ 7x - 2y &= -1 \end{aligned}\right\}$$

Multiplicando la segunda ecuación por 2:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 4y &= 19 \\ 14x - 4y &= -2 \end{aligned}\right\}$$

Sumando, resulta:

$$17x = 17$$

$$x = \frac{17}{17} = 1$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$3 \cdot 1 + 4y = 19$$
$$4y = 19 - 3$$
$$4y = 16$$
$$y = \frac{16}{4} = 4$$

4. Resolver el sistema:

$$\left.\begin{aligned} \frac{4}{x} - \frac{3}{y} &= \frac{14}{5} \\ \frac{4}{x} + \frac{10}{y} &= \frac{50}{3} \end{aligned}\right\}$$

Este sistema de ecuaciones no es de primer grado, pero puede resolverse como tal, tomando como incógnitas, $\frac{1}{x}$ y $\frac{1}{y}$. En efecto, llamando $\frac{1}{x} = u$ $\frac{1}{y} = v$ el sistema queda reducido a:

$$\left.\begin{aligned} 4u - 3v &= \frac{14}{5} \\ 4u + 10v &= \frac{50}{3} \end{aligned}\right\}$$

vamos a resolver este sistema, como en las dos ecuaciones la incógnita u, tiene el mismo coeficiente restamos ambas ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 4u - 3v &= \frac{14}{5} \\ -4u - 10v &= -\frac{50}{3} \end{aligned}\right\}$$

$$13v = \frac{50}{3} - \frac{14}{5} = \frac{250 - 42}{15} = \frac{208}{15}$$

luego:

$$v = \frac{208}{15 \cdot 13} = \frac{16}{15}$$

sustituyendo este valor en la primera ecuación:

$$4u - 3\frac{16}{15} = \frac{14}{5}$$

$$4u - \frac{16}{5} = \frac{14}{5}$$

$$4u = \frac{14}{5} + \frac{16}{5} = \frac{30}{5} = 6 \qquad u = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Por tanto, los valores de x e y son:

$$\frac{1}{x} = \frac{3}{2} \qquad x = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{16}{15} \qquad y = \frac{15}{16}$$

5. Resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 3y + z = 6 \\ x - 2y + 3z = -3 \\ 3x + y - z = 8 \end{array}\right\}$$

Despejamos de la segunda ecuación la x:

$$x = -3 + 2y - 3z$$

sustituyendo en las dos ecuaciones restantes:

$$\left.\begin{array}{r} 2(-3 + 2y - 3z) + 3y + z = 6 \\ 3(-3 + 2y - 3z) + y - z = 8 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} -6 + 4y - 6z + 3y + z = 6 \\ -9 + 6y - 9z + y - z = 8 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 7y - 5z = 12 \\ 7y - 10z = 17 \end{array}\right\}$$

es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, por el método de reducción:

$$\left.\begin{array}{r} 7y - 5z = 12 \\ -7y + 10z = -17 \end{array}\right\}$$

$$5z = -5$$

$$z = -\frac{5}{5} = -1$$

por los procedimientos habituales calculamos las otras dos incógnitas:

$$7y - 5(-1) = 12$$
$$7y + 5 = 12$$
$$7y = 12 - 5 = 7$$

$$y = \frac{7}{7} = 1$$

$$x = -3 + 2 \cdot 1 - 3(-1) = -3 + 2 + 3 = 2$$

6. Resolver gráficamente el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 3y - x < 6 \\ x + y > 2 \end{array}\right\}$$

En primer lugar, representamos las rectas:

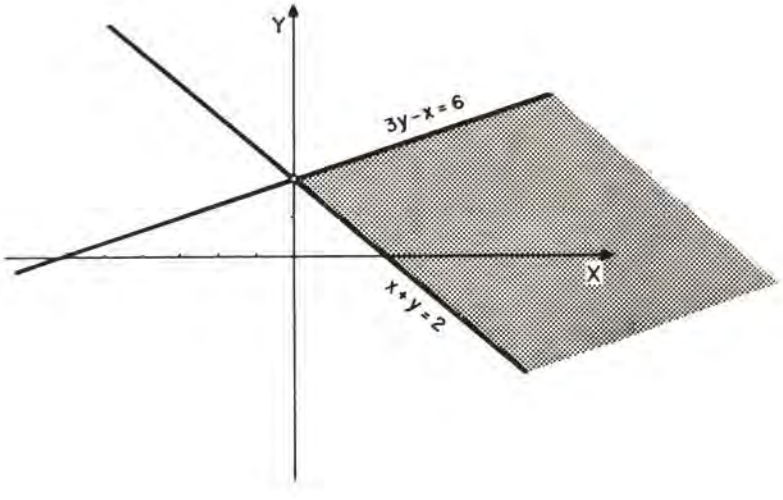
$$3y - x = 6$$
$$x + y = 2$$

Recordamos que, para representar una recta, basta obtener una pareja de puntos. Asi, para la recta $3y - x = 6$ tenemos:

$$x = 0,\ y = 2$$
$$x = -6,\ y = 0$$

y para la recta $x + y = 2$ obtenemos:

$$x = 0,\ y = 2$$
$$x = 2,\ y = 0$$



La zona rayada es la solución pedida.

4. RESOLUCION DE PROBLEMAS POR MEDIO DE ECUACIONES LINEALES

4.1. Consideraciones generales y ejemplos

Muchos problemas resultado de las aplicaciones de la ciencia y de la vida corriente quedan resueltos cuando se conoce un cierto número, que queda determinado por los datos del problema, verificando con ellos ciertas relaciones. En algunas ocasiones el paso de los datos a la solución se efectúa mediante una o varias operaciones aritméticas. Otras veces convendrá designar por una letra aquél número incógnito y escribir por medio de la notación algebraica la relación o relaciones que liguen los datos e incógnita. Estas relaciones con una incógnita son la ecuación (o ecuaciones) que traducen el planteamiento del problema.

Con el fin de facilitar la resolución de problemas algebraicos damos unas indicaciones útiles, convenientes a tener en cuenta:

a) Elección de la incógnita, debe hacerse de modo que se conozca la solución del problema una vez determinada dicha incógnita.

b) Planteo del problema, esto supone traducir el problema en una ecuación, en esta igualdad, obtenida del enunciado del problema, deben figurar los datos y la incógnita.

c) Resolución de la ecuación obtenida, utilizando los procedimientos, puramente algebraicos, ya vistos.

d) Discutir el resultado, una vez obtenida la solución de la ecuación planteada, conviene comprobar si satisface las condiciones impuestas por el problema.

Veamos algunos ejemplos:

- La suma de dos números impares consecutivos es 44. Hallarlos.

Sabemos que un número es impar cuando es múltiplo de 2 más 1, esto es,

llamamos al primer número: $2x + 1$

llamamos al número impar siguiente: $2x + 3$

como su suma ha de ser 44, planteamos la siguiente ecuación:

$$2x + 1 + 2x + 3 = 44$$

$$4x = 40$$

$$x = 10$$

Luego, los números son:

$$2 \cdot 10 + 1 = 21$$

$$2 \cdot 10 + 3 = 23$$

- De cierta suma de dinero voy gastando sucesivamente 1/2 de la misma, 1/4 y 1/8. Me quedan 4 pesetas. Hállese el valor de la suma.

Llamemos x a esta suma de dinero, y verificando las operaciones indicadas, podemos plantear la siguiente ecuación:

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + 4 = x$$

quitando denominadores:

$$4x + 2x + x + 32 = 8x$$
$$7x - 8x = -32$$
$$-x = -32$$
$$x = 32$$

• Un padre tiene 30 años, su hijo 8. ¿Dentro de cuánto tiempo tendrá el padre el doble de la edad del hijo?

Es evidente que la diferencia entre las edades de dos personas permanece la misma mientras vivan ambas personas, pero no ocurre lo mismo con la relación de sus edades.

Llamamos x al número de años al cabo de los cuales se verifican las condiciones expuestas en el problema. Entonces al cabo de este tiempo el padre tendrá 30 + x y el hijo 8 + x. Como la edad del padre ha de ser el doble de la edad del hijo, tenemos la siguiente ecuación:

$$30 + x = 2(8 + x)$$
$$30 + x = 16 + 2x$$
$$x - 2x = 16 - 30$$
$$-x = -14$$
$$x = 14$$

Luego, el padre tendrá 44 años y el hijo 22 años.

• Tres jugadores ganan en un juego 31 pesetas, ganando el segundo 3 pesetas menos que el primero, y el tercero, doble que el segundo. ¿Cuánto ganó cada uno?

A la ganancia del primero la llamamos x

La ganancia del segundo será x − 3

La ganancia del tercero es 2 (x − 3)

La cantidad ganada por los tres jugadores es 31 ptas., luego la ecuación es:

$$x + (x - 3) + 2(x - 3) = 31$$
$$x + x - 3 + 2x - 6 = 31$$
$$x + x + 2x = 31 + 3 + 6$$
$$4x = 40$$

$$x = \frac{40}{4} = 10$$

Luego, la ganancia del primero es: 10 pesetas.
Luego, la ganancia del segundo es: 10 − 3 = 7 pesetas.
Luego, la ganancia del tercero es: 2 · 7 = 14 pesetas.

• Un grifo de agua llena un depósito en 30 horas, otro lo llenaría en 20 horas y un tercero, en 10 horas. ¿Cuánto tardarán en llenarlo los tres juntos?

Llamamos x al número de horas que tardan en llenarlo los tres juntos, luego, los tres juntos en una hora llenan $\frac{1}{x}$ del depósito.

El primer grifo llena $\frac{1}{30}$ del depósito en 1 hora; el segundo, $\frac{1}{20}$, y el tercero $\frac{1}{10}$. Los tres juntos llenarán $\frac{1}{30} + \frac{1}{20} + \frac{1}{10}$ del depósito.

La ecuación es evidente:

$$\frac{1}{30} + \frac{1}{20} + \frac{1}{10} = \frac{1}{x}$$

la resolvemos:

$$\frac{11}{60} = \frac{1}{x}$$

luego

$$x = \frac{60}{11} = 5{,}4 \text{ horas}$$

• En una fracción el denominador tiene 5 unidades más que el numerador. Si se suman 35 unidades al numerador, el valor de la fracción será igual a la inversa de la fracción primitiva. Calcular esta fracción.

Llamamos x al numerador de la fracción, por tanto, el denominador es $x + 5$. Luego la fracción es $\frac{x}{x+5}$. Siguiendo las instrucciones del problema la ecuación a plantear es:

$$\frac{x + 35}{x + 5} = \frac{x + 5}{x}$$

su resolución es:

$$x^2 + 35x = x^2 + 10x + 25$$

$$25x = 25$$

$$x = \frac{25}{25} = 1$$

El numerador de la fracción pedida es 1 y el denominador $1 + 5 = 6$, luego, la fracción es $\frac{1}{6}$.

• Tenemos gallinas y conejos, hemos contado 41 cabezas en total y 118 patas. ¿Cuántos animales hay de cada clase?

Número de gallinas x
Número de conejos ..... $41 - x$
Número de patas de gallina ..... $2x$
Número de patas de conejo ..... $4(41 - x)$

La ecuación que planteamos es:

$$2x + 4(41 - x) = 118$$
$$2x + 164 - 4x = 118$$
$$164 - 118 = 4x - 2x$$
$$46 = 2x$$
$$x = \frac{46}{2} = 23 \text{ gallinas}$$

el número de conejos es: $41 - 23 = 18$ conejos

• ¿Cuál es el número cuya mitad aumentada en las 2/5 partes del mismo y disminuido el resultado en sus 7/8 partes es la unidad?

Llamamos al número buscado x, la ecuación que formamos es la siguiente:

$$\frac{x}{2} + \frac{2x}{5} - \frac{7x}{8} = 1$$

$$40x + 32x - 70x = 80$$

$$2x = 80$$

$$x = \frac{80}{2} = 40$$

Muchos problemas pueden plantearse, por medio de un sistema de ecuaciones, más cómodamente que con una sola ecuación. Hay que tener la precaución de establecer tantas ecuaciones como incógnitas, además, estas ecuaciones deben ser independientes y no contradictorias.

En definitiva, el procedimiento a seguir es semejante al utilizado cuando aprendíamos a resolver los problemas que daban lugar a una ecuación, por eso, solamente vamos a considerar algunos ejemplos:

— La suma de las tres cifras de un número es 16 y la suma de la primera y tercera es igual a la segunda. Permutando entre sí dichas cifras primera y tercera, resulta un número que supera en 198 unidades al número dado: ¿cuál es éste?

Llamamos x la cifra de las unidades, y la de decenas, z la de centenas, el número dado vale $100z + 10y + x$, después de permutar, como indica el problema, vale $100x + 10y + z$. Luego,

$$\left.\begin{array}{l} 100x + 10y + z = 100z + 10y + x + 198 \\ x + y + z = 16 \\ y = x + z \end{array}\right\}$$

es un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, que resolvemos sustituyendo la tercera ecuación en las dos primeras:

$$\left.\begin{array}{l} 100x + 10(x + z) + z = 100z + 10(x + z) + x + 198 \\ x + x + z + z = 16 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 100x - x - 99z = 198 \\ 2x + 2z = 16 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} 99x - 99z = 198 \\ 2x + 2z = 16 \end{array}\right\}$$

es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, que puede escribirse con sus coeficientes más simplificados:

$$\left.\begin{aligned} 11\,x - 11\,z &= 22 \\ x + z &= 8 \end{aligned}\right\}$$

despejamos x de la segunda ecuación y sustituimos en la primera:

$$\begin{aligned} x &= 8 - z \\ 11\,(8 - z) - 11\,z &= 22 \\ 88 - 11\,z - 11\,z &= 22 \\ -22\,z = 22 - 88 &= -66 \end{aligned}$$

$$z = \frac{-66}{-22} = 3$$

luego

$$\begin{aligned} x &= 8 - 3 = 5 \\ y &= 5 + 3 = 8 \end{aligned}$$

por tanto, el número es 385.

• Compramos 7 libros y 8 cuadernos pagando en total 264 ptas.; después necesitamos 2 libros y 3 cuadernos más del mismo precio que los anteriores y el importe de esta compra es de 79 ptas. Averiguar el precio de cada libro y el de cada cuaderno.

Vamos a llamar x al precio de un libro, e y al de un cuaderno · 7 libros y 8 cuadernos cuestan 264 pesetas, es decir,

$$7\,x + 8\,y = 264$$

2 libros y 3 cuadernos cuestan 79 ptas., es decir,

$$2\,x + 3\,y = 79$$

en consecuencia, tenemos el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas siguientes:

$$\left.\begin{aligned} 7\,x + 8\,y &= 264 \\ 2\,x + 3\,y &= 79 \end{aligned}\right\}$$

resolviéndolo, por cualquiera de los procedimientos conocidos, obtenemos

$$x = 32 \qquad y = 5$$

luego, cada libro cuesta 32 ptas. y cada cuaderno 5 pesetas.

• Hallar dos números tales que el primero aumentado en 4 veces el segundo dé por resultado 29, y el segundo aumentado en 6 veces el primero dé por resultado 36.

Llamando x e y a estos dos números que buscamos, tenemos:

el primero aumentado en cuatro veces el segundo da 29:

$$x + 4\,y = 29$$

el segundo aumentado en 6 veces el primero dé por resultado 36,

$$y + 6\,x = 36$$

obtenemos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + 4\,y &= 29 \\ y + 6\,x &= 36 \end{aligned}\right\}$$

para resolverlo, despejamos y de la segunda ecuación y sustituimos en la primera:

$$\begin{aligned} y &= 36 - 6\,x \\ x + 4\,(36 - 6x) &= 29 \\ x + 144 - 24\,x &= 29 \\ x - 24\,x &= 29 - 144 \\ -23\,x &= -115 \end{aligned}$$

$$x = \frac{-115}{-23} = 5$$

por tanto, $y = 36 - 6 \cdot 5 = 36 - 30 = 6$

los números son 5 y 6.

4.2. Porcentajes

Los números racionales x e y son proporcionales cuando se puede establecer un cociente o razón constante entre ellos.

$$\frac{y}{x} = a$$

a es la razón de proporcionalidad.

En la práctica, lo más frecuente es que para determinar una proporcionalidad se diga cuál es el número y_1, que corresponde al $x_1 = 100$, lo expresamos diciendo que la proporcionalidad es del y_1 por ciento, y se escribe $y_1\%$; al número y_1, que lo designaremos por *r* se le llama tasa de proporcionalidad. Cuando la tasa es del r % el coeficiente *a* es:

$$a = \frac{r}{100}$$

por lo tanto,

$$y = \frac{r}{100}\,x$$

Esta igualdad nos permite calcular cualquiera de los tres números x, y, r, cuando se conocen los otros dos; estos problemas se conocen con el nombre de *porcentajes*. Veamos algunos ejemplos de porcentajes:

• ¿Cuál es el 6 % de 720?

Aplicando*

$$y = \frac{6}{100} \times 720 = 43{,}2$$

• El peso de cierta clase de fruta al secarse queda reducido a su 15 %. ¿Qué cantidad de fruta fresca se necesitará para obtener 60 kgs. de fruta seca?

Al aplicar la expresión * a este caso:

$$60 = \frac{15}{100} x$$

resolviendo esta ecuación

$$x = \frac{60 \cdot 100}{15} = \frac{6000}{15} = 400.$$

Se necesitan 400 kgs. de fruta fresca.

• En cierto país hay 5 millones de personas cuya edad está comprendida entre los 17 y los 24 años; de ellas están haciendo o han terminado ya estudios superiores solamente 100.000. ¿Cuál es el porcentaje de personas en dicha edad que realiza tales estudios?

En este caso, se conocen los números que son proporcionales y necesitamos averiguar la tasa:

$$100.000 = \frac{r}{100} \cdot 5.000.000$$

despejamos r:

$$r = \frac{100.000 \cdot 100}{5.000.000} = \frac{10}{5} = 2\ \%$$

4.3. Interés simple

Las entidades dedicadas al préstamo de capitales, están autorizadas a cobrar al prestatario cierta cantidad de dinero que recibe el nombre de interés. El interés cobrado depende de la cantidad prestada y del tiempo de duración del préstamo hasta la devolución del capital recibido. Se ha convenido en que, si el tiempo de duración del préstamo no es muy grande, las cantidades a pagar por concepto de interés sean proporcionales a los productos de los números que expresan (medidos en pesetas) los capitales prestados, por los números que expresan con una misma unidad (año, mes, día, etc.) las medidas de los tiempos de duración de los respectivos préstamos. Si designamos:

a los capitales (en pesetas) por: c_1 c_2 c_3...

a los tiempos (en años) por: t_1 t_2 t_3...

y a los intereses (en pesetas) por: i_1 i_2 i_3...

BIBLIOTECA PUBLICA PTO. STA. MARIA

se ha de verificar que:

$$\frac{i_1}{c_1\ t_1} = \frac{i_2}{c_2\ t_2} = \frac{i_3}{c_3\ t_3} = \ldots$$

Si *a* es la razón de proporcionalidad anterior entre el capital prestado *c*; el tiempo de duración del préstamo t, y el correspondiente interés que hay que pagar por el mismo *i*, se tiene:

$$i = a\ (c\ t)$$

al expresar la razón *a* en porcentaje *r* %, $a = \frac{r}{100}$, luego:

$$i = \frac{r\ c\ t}{100}$$

Esta igualdad es la llamada fórmula del interés simple; se puede utilizar para calcular cualquiera de los cuatro números que figuran en ella, *i*, *r*, *c*, *t*, teniendo en cuenta que *c* e *i* son números que miden capitales en pesetas, y si *t* es la medida del tiempo en años, la tasa *r* representa el interés de un capital de 100 pesetas prestado durante un año.

4.4. Descuento

Es usual en el comercio que los almacenistas o fabricantes concedan, a los comerciantes que le adquieren géneros al por mayor, que en vez de efectuar el pago al contado y en moneda, lo hagan mediante documentos de crédito (letra de cambio, pagaré, etc.); un comerciante que firma uno de estos documentos se compromete a pagar la cantidad que figura en dicho documento (*valor nominal*) en una fecha posterior convenida (*vencimiento*). El fabricante puede esperar a cobrar el importe de ese documento en la fecha allí indicada, pero normalmente no espera, haciendo entrega de él a un Banco que en su debido tiempo se encargará de exigírselo al deudor; a cambio de este documento el Banco adelanta al fabricante el valor del documento, pero no el valor nominal que allí figura, sino una cantidad *(valor efectivo)* que se obtiene deduciendo del valor nominal cierta cantidad que recibe el nombre de *descuento.* El descuento se calcula mediante un porcentaje previamente estipulado, tal como si fuese el interés del valor nominal del documento durante el período de tiempo que se adelanta.

Estos descuentos se refieren de ordinario a corta duración de tiempo, por lo que éste se mide en días. Para calcular el importe del descuento puede utilizarse la fórmula del interés, pero teniendo en cuenta que si *t* está medido en días ha de hacerse en años para substituir en ella. Con objeto de facilitar los cálculos se supone que el año tiene 360 días (año comercial) y entonces t días $= \frac{t}{360}$ años.

Tenemos así para el descuento *d* (en pesetas):

$$d = c\ \frac{r}{100} \cdot \frac{t}{360} = \frac{c\ r\ t}{36000}$$

Además, según lo dicho:

$$\text{valor efectivo} = \text{valor nominal} - \text{descuento}$$

4.5. Repartos proporcionales

Dados los números *n, a* y *b* repartir el número n en partes proporcionales a los números a y b es encontrar otros dos números, x e y, que verifiquen el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} \\ \\ x + y = n \end{array}\right\}$$

Antes de seguir, consideremos un ejemplo: Dos personas A y B, tienen un negocio al cual atiende A durante 4 dias de la semana y B durante los otros 2 dias laborables. ¿Cómo deberán repartirse un beneficio semanal de 51.000 ptas.?

Lógicamente esta ganancia debe repartirse proporcionalmente a los tiempos dedicados por cada uno, 4 días la persona A, 2 días la persona B. Si representamos por *x* la ganancia que le corresponde a A, por *y* la que corresponde a B, deberá ser:

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{2}$$

además:

$$x + y = 51.000$$

Tenemos en consecuencia, el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{2} \\ x + y = 51.000 \end{array}\right\}$$

Resolvemos este sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2\,x = 4\,y \\ x + y = 51.000 \end{array}\right\}$$

De la segunda ecuación despejamos *x*:

$$x = 51.000 - y$$

sustituyendo en la primera ecuación:

$$\begin{gathered} 2\,(51.000 - y) = 4\,y \\ 102.000 - 2\,y = 4\,y \\ -2\,y - 4\,y = -102.000 \\ -6\,y = -102.000 \end{gathered}$$

$$y = \frac{102.000}{6} = 17.000 \text{ ptas.}$$

luego $x = 51.000 - 17.000 = 34.000$ ptas.

Puede plantearse con más generalidad el problema de repartos proporcionales, de modo que se trata de descomponer el número *n* en más de dos sumandos que sean proporcionales a varios números *a*, *b*, *c*, ... Resolvemos a continuación, hasta llegar a obtener fórmulas generales, el caso de tres sumandos.

Repartir el número *n* en tres partes que sean proporcionales a los números *a*, *b*, y *c*. Designando estas partes con las letras *x*, *y*, *z* se ha de verificar:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c} \\ \\ x + y + z = n \end{array}\right\}$$

Este sistema está formado en realidad por tres ecuaciones y tres incógnitas, pero podemos resolverlos del modo siguiente:

La razón de la proporcionalidad indicada en el sistema la vamos a designar por la letra t, y aunque es desconocida, podemos escribir:

$$\frac{x}{a} = t; \qquad \frac{y}{b} = t; \qquad \frac{z}{c} = t$$

de donde:

$$x = a\,t; \quad y = b\,t; \quad z = c\,t$$

La suma de estos números es n, luego:

$$a\,t + b\,t + c\,t = n$$

sacando factor común t:

$$(a + b + c)\,t = n$$

ecuación de la que podemos calcular t:

$$t = \frac{n}{a + b + c}$$

Conocido el valor de la razón de proporcionalidad t, podemos escribir:

$$x = \frac{n\,a}{a + b + c} \qquad y = \frac{n\,b}{a + b + c} \qquad z = \frac{n\,c}{a + b + c}$$

Estas fórmulas resuelven completamente el problema propuesto.

4.6. Mezclas

En general, los precios de las mercancías se suponen proporcionales a sus cantidades (medidas con la misma unidad). La razón de esta proporcionalidad es precisamente el precio de la unidad elegida; si este precio de la unidad es p y el número de unidades c, el valor de ellas es el producto c p.

Si tenemos tres clases de mercancías distintas, M_1 M_2 y M_3 tales que:

M_1: precio unidad = p_1 pesetas; cantidad = c_1, su valor es c_1p_1 pesetas.

M_2: precio unidad = p_2 pesetas; cantidad = c_2, su valor es c_2p_2 pesetas.

M_3: precio unidad = p_3 pesetas; cantidad = c_3, su valor es c_3p_3 pesetas.

Al mezclarlas el valor total de las mercancías mezcladas es:

$$c_1p_1 + c_2p_2 + c_3p_3^*$$

La mercancía obtenida como mezcla, M, se supone que se valora también proporcionalmente a las cantidades; designaremos por P el precio de la unidad de esta mezcla M. Ahora bien, como la cantidad de mercancía, caso de no haber pérdidas, es la suma $c_1 + c_2 + c_3$, su valor, teniendo en cuenta el precio unitario P, es:

$$(c_1 + c_2 + c_3)\, P^*$$

Los números* han de ser iguales en cuanto que son el valor de una misma mercancía:

$$c_1p_1 + c_2p_2 + c_3p_3 = (c_1 + c_2 + c_3)\, P$$

Esta igualdad es la fundamental en los problemas de mezclas, figuran en ella siete números y cuando se conocen seis de ellos es una ecuación de primer grado en la letra desconocida. Así, de ella se obtiene una expresión muy importante que permite conocer el precio de la unidad de mezcla:

$$P = \frac{c_1p_1 + c_2p_2 + c_3p_3}{c_1 + c_2 + c_3}$$

a P, también suele llamarse, precio medio, porque siempre está comprendido entre el mayor y el menor de los tres precios.

Esta expresión también puede utilizarse para resolver problemas de mezclas con más de una incógnita; siendo necesario, en estos casos, otras condiciones que permitan formular nuevas ecuaciones.

Veamos un ejemplo: Una fábrica de pan necesita diariamente 600 kilogramos de harina, para lo cual mezcla harina de dos clases; una, cuyo precio es de 6 pesetas el kilogramo, otra de 9 pesetas el kilogramo. Si se desea que la harina mezclada resulte a 6,75 ptas. el kilogramo, ¿qué cantidad de harina de cada clase deberá mezclar?

Designaremos por:

x, el número de kilogramos de harina de 6 pesetas

y, el número de kilogramos de harina de 9 pesetas

El precio deseado por el fabricante, es de 6,75 ptas/kg, la harina valdrá en total:

$$600 \cdot 6{,}75 = 4.050 \text{ ptas.}$$

luego, podemos escribir:

$$6x + 9y = 4.050$$

además:

$$x + y = 600$$

tenemos, pues, el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} 6x + 9y = 4.050 \\ x + y = 600 \end{array}\right\}$$

Resolviendo este sistema obtenemos:

$$x = 450 \qquad y = 150$$

esto quiere decir, que el fabricante ha de mezclar 450 kg de harina barata con 150 kg de harina cara.

4.7. Problemas relativos a un móvil

Si un objeto se mueve sobre una línea con velocidad uniforme, es decir, en cada segundo recorre un determinado espacio constante, diremos que se mueve con movimiento uniforme. El espacio recorrido en unidad de tiempo (segundo, minuto hora) es la velocidad del movimiento.

Veamos algunos ejemplos sencillos:

- Un automóvil está en el km 33 y marcha a razón de 2 km por minuto ¿dónde estará pasados 5 minutos?

$$33 + 2 \cdot 5 = 33 + 10 = 43$$

Estará en el km 43, habrá avanzado, en consecuencia, 10 km.

- Refiriéndonos al automóvil anterior, ¿dónde estará después de transcurridos t minutos?

Estará en el punto: $e = 33 + 2t$.

- Un automóvil que está en el km 52 circula a 0,8 km por minuto. ¿cuánto tardará en llegar al km 70,4?

Llamamos x al tiempo buscado, teniendo presente los dos ejemplos anteriores, podemos establecer la siguiente ecuación:

$$52 + 0{,}8x = 70{,}4$$

resolviendo esta ecuación:

$$0{,}8\ x = 70{,}4 - 52$$

$$0{,}8\ x = 18{,}4$$

$$x = \frac{18{,}4}{0{,}8} = 23$$

tardará 23 minutos.

• **Un automóvil está ahora en el km 124 y hace 15 minutos estaba en el km 106. ¿Cuál es la velocidad de su marcha?**

Llamamos x a la velocidad buscada:

$$124 = 106 + 15\ x$$

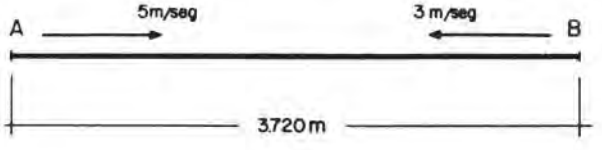
resolviendo la ecuación:

$$15\ x = -\ 106 + 124$$
$$15\ x = 18$$

$$x = \frac{18}{15} = 1{,}2 \text{ km por minuto.}$$

Estos casos sencillos que hemos planteado, se pueden complicar considerando dos móviles, un planteamiento algebraico simplifica notablemente estos problemas, como vamos a comprobar en los siguientes ejemplos:

• Una persona sale de A hacia B a 5 metros por segundo y al mismo tiempo otra persona sale de B hacia A a 3 metros por segundo. La distancia AB es de 3.720 m. ¿Cuánto tardarán en encontrarse? ¿Qué espacio habrá recorrido cada uno?



Vamos a llamar t al tiempo que tardarán en encontrarse:

la persona que sale de A habrá recorrido: 5 t.
la persona que sale de B habrá recorrido: 3 t.

Entre las dos habrán recorrido 3.720 m.

Se verifica, pues, $5\ t + 3\ t = 3.720$

$$8\ t = 3.720$$

$$t = \frac{3.720}{8} = 465 = 7 \text{ min } 45 \text{ seg.}$$

Luego, la primera persona habrá recorrido: $465 \cdot 5 = 2325$ m
y la segunda: $465 \cdot 3 = 1395$ m.

• Un automóvil sale de un punto A a 45 km/h y una hora después sale también de A en su persecución otro automóvil a 60 km/h. ¿Cuándo y dónde le alcanza?

Llamamos t al tiempo que transcurre desde que sale el primer coche hasta que es alcanzado por el segundo.

El primero corre durante t horas un espacio $A\ X = 45\ t$

El segundo recorre durante $t - 1$ horas un espacio $A\ X = 60\ (t - 1)$.

Es evidente que ambos espacios son iguales para ambos coches, luego:

$$45\ t = 60\ (t - 1)$$

resolviendo la ecuación:

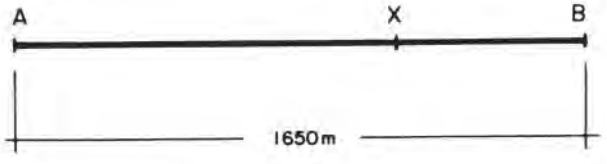
$$45\ t - 60\ t = -\ 60$$

$$-\ 15\ t = -\ 60$$

$$t = \frac{60}{15} = 4 \text{ horas.}$$

Durante estas cuatro horas el primer coche ha recorrido $45 \times 4 = 180$ km. El segundo coche ha recorrido esta distancia en 3 horas.

• Dos ciclistas salen de dos puntos A y B distantes 1650 m uno hacia el otro. El ciclista que sale de A corre a 8 m/seg y el que sale de B a 5 m/seg y sale un minuto más tarde. ¿Cuánto tardan en encontrarse? ¿Qué distancia ha recorrido cada uno?



Siempre que los móviles parten en instantes distintos hay que precisar si el tiempo se cuenta desde la partida del primero o del segundo.

Llamamos t al tiempo, en segundos, que corre el ciclista B; el ciclista A corre durante $t + 60$ segundos. Sea X el punto en que se encuentran, se verifica:

$$A\ X = 8\ (t + 60)$$

$$B\ X = 5\ t$$

como A X + B X = 1650 m, tenemos la siguiente ecuación:

$$8\,(t + 60) + 5\,t = 1650$$
$$8\,t + 480 + 5\,t = 1650$$
$$8\,t + 5\,t = 1650 - 480$$
$$13\,t = 1170$$

$$t = \frac{1170}{13} = 90 \text{ seg.}$$

por tanto:

$$A\,X = 8\,(90 + 60) = 8 \cdot 150 = 1200 \text{ m}$$
$$B\,X = 5 \cdot 90 = 450 \text{ m.}$$

CONCLUSIONES TEMA XV

<table>
<tr><td rowspan="5">ECUACIONES LINEALES</td><td colspan="2">DEFINICION</td><td>Una ecuación lineal es la igualdad de dos expresiones algebraicas que solamente es cierta para unos ciertos valores en la variable o variables que integran estas expresiones.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">RESOLUCION</td><td>$X + b = c$</td><td>$X = c - b$</td></tr>
<tr><td>$a X = c$</td><td>$X = \frac{c}{a}$</td></tr>
<tr><td>$a X + b = C$</td><td>$X = \frac{c - b}{a}$</td></tr>
<tr><td>COMPLETA</td><td>Normas generales:
1.—Suprimir los denominadores y paréntesis.
2.—Reducir los dos miembros de la ecuación así obtenida.
3.—Trasponer a un miembro los términos que contienen la incógnita y al otro los términos que no la contienen.
4.—Para obtener la solución, basta dividir el término conocido por el coeficiente de la incógnita.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">INECUACIONES LINEALES</td><td colspan="2">DEFINICION</td><td>Dadas dos expresiones A y B, pueden existir un conjunto de valores numéricos que sustituidos en las expresiones A y B hacen que $A > B$, mientras que para otros valores dicha desigualdad no es cierta. A estas desigualdades se les llama inecuaciones.</td></tr>
<tr><td colspan="2">RESOLUCION</td><td>Se trata de resolver la inecuación $a x + b > 0$. $(a \neq 0)$
1.—$a > 0$ $\quad X > \frac{- b}{a}$
2.—$a < 0$ $\quad X < \frac{- b}{a}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">SISTEMAS DE TRES ECUACIONES LINEALES CON TRES INCOGNITAS</td><td>Para resolver este tipo de sistemas, el procedimiento recomendable es despejar una de las incógnitas de una de las ecuaciones y sustituir la expresión obtenida en la primera ecuación. Obtenemos así dos ecuaciones con las dos incógnitas restantes. Resuelto este nuevo sistema, sustituimos la solución obtenida en la primera ecuación, obteniendo así el valor de la incógnita eliminada en primer lugar.</td></tr>
</table>

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES	RESOLUCION DE SISTEMAS DE DOS ECUACIONES LINEALES	DEFINICION	Entendemos por sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas a dos ecuaciones lineales cada una de las cuales tiene dos incógnitas. De manera general, dos o más ecuaciones forman un sistema o son simultáneas cuando tienen las mismas soluciones. Sistemas equivalentes son los que tienen las mismas soluciones. Solución de un sistema es el conjunto de valores de las incógnitas, que sustituidos en vez de ellas en todas las ecuaciones las transforman en idénticas.
		METODO DE REDUCCION	Consiste en buscar una combinación de ambas ecuaciones que contengan una sola incógnita. Para ello basta multiplicar cada ecuación por un número adecuado de manera que una misma incógnita tenga el mismo coeficiente en las dos ecuaciones. Sumando o restando las dos ecuaciones se logra eliminar dicha incógnita.
		METODO DE SUSTITUCION	Se despeja en una de las ecuaciones, sustituyendo la expresión así obtenida en su lugar en la ecuación restante, obteniendo una ecuación que no contiene nada más que una incógnita.
		METODO DE IGUALACION	De las dos ecuaciones de un sistema despejamos una misma incógnita, obtendremos dos expresiones distintas para la misma, que deben dar iguales valores numéricos de dicha incógnita. Igualando ambas expresiones se obtiene una ecuación en la otra incógnita.

EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

Resolver las ecuaciones siguientes:

1. $5x - (2x + 3) = 12$

2. $21x + (x - 4)^2 = (5 + x)^2$

3. $\frac{x}{2}(2 - x) - \frac{x}{4}(3 - 2x) = \frac{x + 10}{6}$

4. $3x + 2\left(4x - \frac{5}{6}\right) = 9x + 5 - \frac{x + 3}{2}$

5. $\frac{2x + 1}{2x - 1} - \frac{2x - 1}{1 + 2x} + \frac{8}{1 - 4x^2} = 0$

6. *Una persona distribuye su capital entre sus tres herederos en la forma siguiente: al primero da la mitad del capital más 10.000 ptas; al segundo, la mitad del resto más 5.000 ptas; al tercero, 40.000 ptas. ¿Cuál era el capital? ¿Cuánto corresponde a los dos primeros?*

7. *Un vendedor de manzanas vende la mitad de las manzanas menos ocho; luego, la mitad de las que le quedan menos ocho, y así una tercera y cuarta venta. Le quedan 20 manzanas. ¿Con cuántas salió al mercado?*

8. *Un padre tiene 46 años y su hijo 12. ¿Cuándo la edad del padre será justamente el triple de la edad del hijo?*

9. *Dos automóviles parten a la misma hora de una ciudad, A, para otra, B; el primero con una velocidad media de 80 km por hora; el segundo con una velocidad de 60 km por hora. Sabiendo que las horas de llegada son 15 horas 45 minutos, y 16 horas 15 minutos, hallar la distancia de las ciudades A y B.*

Resolver los sistemas de ecuaciones, siguientes:

a) Utilizando el método de reducción:

10. $\left.\begin{array}{l} x - y + 1 = 0 \\ 4x + y = 16 \end{array}\right\}$

11. $\left.\begin{array}{l} x + 3y = -6 \\ 2x - 4y = -12 \end{array}\right\}$

b) Utilizando el método de igualación:

12. $\left.\begin{array}{l} 3x - 7y = 6 \\ 5x + 2y = 51 \end{array}\right\}$

13. $\left.\begin{array}{l} 3x + 2y - 7 - x = 12 - 3y \\ 2x - 5y = 20 \end{array}\right\}$

c) Utilizando el método de sustitución:

14. $\left.\begin{array}{l} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{array}\right\}$

15. $\left.\begin{array}{l} -2x + y = 0 \\ x + y = 3 \end{array}\right\}$

Resolver los siguientes sistemas:

16. $\left.\begin{array}{l} x + 4y - 8z = 0 \\ 4x + 8y - z = 92 \\ 8x - y - 4z = 108 \end{array}\right\}$

17. $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{20} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{15} \end{array}\right\}$

18 *La razón de dos números es* $\frac{4}{7}$. *Aumentando el primero en 9 y disminuyendo el segundo en 9, la razón se invierte. Hállense dichos números.*

19 *Un número tiene dos cifras que suman 7, si se invierte el orden de colocación de las cifras resulta otro que es el doble del anterior más 2. Hallar el número.*

20. *Hallar el número de hijos e hijas de una familia sabiendo que requerido uno de los hijos contestó: «El número de mis hermanos es la mitad del número de mis*

hermanas.» Y preguntada una de las hijas respondió: «Yo tengo tantos hermanos como hermanas.»

21. *Repartir 660 ptas entre 15 hombres, 20 mujeres y 12 niños, de manera que cada hombre reciba 5 pesetas más que cada mujer, y cada mujer 10 pesetas más que cada niño.*

22. *Un padre tiene triple edad que su hijo. Si el padre tuviera 30 años menos y el hijo 8 años más los dos tendrían la misma edad. Hallar la edad de cada uno.*

23. *Si a los dos términos de una fracción se les suma 3 la fracción se convierte en otra equivalente a* $\frac{3}{4}$ *Si en vez de sumar se les resta 3, la fracción resultante equivale a* $\frac{2}{3}$ *Hallar la fracción.*

Resolver las inecuaciones siguientes:

24. $+ 2x + 0,5 < 0$

25. $- 10x + 23 > 0$

26. *Se prestó cierto capital al 6 por 100 durante 10 meses, al cabo de los cuales se recibió, como capital e intereses, 105.000 ptas. ¿Cuál fue el capital prestado?*

27. *Tres ayuntamientos A, B y C, acuerdan efectuar las obras de aprovechamiento de un río, que importan 2.400.000 ptas. repartiéndose esta cantidad proporcionalmente al número de sus habitantes. A tiene 8.000 habitantes; B, 5.000 habitantes y C, 6.000 habitantes. ¿Qué cantidad pagó cada ayuntamiento?*

28. *Se mezcla vino de 8 ptas. litro con vino de 12 ptas. litro añadiendo 10 litros de agua para completar un hectolitro. La mezcla obtenida se quiere vender a 15 ptas. el litro, con lo cual se ganó 600. ¿Qué cantidad de vino de cada clase deberá ponerse?*

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. $5x - (2x + 3) = 12$
   $5x - 2x - 3 = 12$
   $3x = 15$

   $\boxed{x = 5}$

2. $21x + (x - 4)^2 = (5 + x)^2$
   $21x + (x^2 + 16 - 8x) = 25 + x^2 + 10x$
   $21x + x^2 + 16 - 8x = 25 + 10x + x^2$
   $21x - 8x - 10x = 25 - 16$
   $3x = 9$

   $\boxed{x = 3}$

3. $\frac{x}{2}(2 - x) - \frac{x}{4}(3 - 2x) = \frac{x + 10}{6}$

   Multiplicando por el m.c.m. de 2,4 y 6 que es 12:

   $6x(2 - x) - 3x(3 - 2x) = 2(x + 10)$
   $12x - 6x^2 - 9x + 6x^2 = 2x + 20$
   $3x - 2x = 20$

   $\boxed{x = 20}$

4. $3x + 2\left(4x - \frac{5}{6}\right) = 9x + 5 - \frac{x+3}{2}$

$3x + 8x - \frac{5}{3} = 9x + 5 - \frac{x+3}{2}$

Multiplicamos los dos miembros por 6 (m.c.m.de 3,2)

$18x + 48x - 10 = 54x + 30 - 3(x+3)$

$18x + 48x - 54x + 3x = 30 + 10 - 9$

$15x = 31$

$$\boxed{x = \frac{31}{15}}$$

5. $\frac{2x+1}{2x-1} - \frac{2x-1}{1+2x} + \frac{8}{1-4x^2} = 0$

$\frac{(2x+1)^2 - (2x-1)^2}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{8}{4x^2-1}$

$4x^2 + 1 + 4x - (4x^2 + 1 - 4x) = 8$

$8x = 8$

$$\boxed{x = 1}$$

6. Capital: x ptas.

Parte del 1.º: $\frac{x}{2}$ + 10.000 ptas.

Parte del 2.º: $\frac{x - \frac{x}{2} - 10.000}{2}$ + 5.000 ptas.

Parte del 3.º: 40.000 ptas.

$$\frac{x}{2} + 10.000 + \frac{\frac{x}{2} - 10.000}{2} + 5.000 + 40.000 = x$$

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} - 5.000 + 5.000 + 10.000 + 40.000 = x$$

$$50.000 = x - \frac{2x + x}{4}$$

$$50.000 = \frac{4x - 3x}{4} \text{ —— } 200.000 \text{ ptas.} = x$$

y la parte correspondiente al primero será: 110.000 pesetas.

7. *Total de manzanas: x*

1.ª Venta: $\frac{x}{2} - 8$

2.ª Venta: $\frac{x - \frac{x}{2} + 8}{2} - 8 = \frac{\frac{x}{2} + 8}{2} - 8 = \frac{\frac{x + 16}{2}}{2} - 8 =$

$= \frac{x + 16}{4} - 8 = \frac{x}{4} - 4$

3.ª Venta: $\frac{x - \left(\frac{x}{2} - 8 + \frac{x}{4} - 4\right)}{2} - 8 = \frac{x - \left(\frac{3x}{4} - 12\right) - 16}{2} =$

$= \frac{\frac{x}{4} - 4}{2} = \frac{x - 16}{8} = \frac{x}{8} - 2$

4.ª Venta: $\frac{x - \left[\frac{x}{2} - 8 + \frac{x}{4} - 4 + \frac{x}{8} - 2\right]}{2} - 8 = \frac{x - \left(\frac{7x}{8} - 14\right)}{2} - 8 =$

$= \frac{x}{16} - 1$

y el planteamiento sería:

$$\frac{x}{2} - 8 + \frac{x}{4} - 4 + \frac{x}{8} - 2 + \frac{x}{16} - 1 + 20 = x$$

$$5 = x - \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{x}{16}\right)$$

$$5 = x - \frac{15x}{16}$$

$$5 = \frac{x}{16}, x = 80 \text{ manzanas}$$

8. Supongamos que han de pasar x años. En esa fecha, el padre tendrá (46 + x) años y el hijo (12 + x) años:

$46 + x = 3\ (12 + x)$

$46 + x = 36 + 3x$

$10 = 2x \quad x = 5$ años.

El padre tendrá 51 años y el hijo 17.

9. El primero emplea en recorrer esa distancia un tiempo t y el segundo, un tiempo (t + 30) minutos o lo que es igual $t + \frac{1}{2}$ h.

$e = 80 \cdot t$
$e = 60\ (t + 1/2)$ } Cómo la distancia es la misma: $80\ t = 60\ t + \frac{1}{2}$

$$80\,t = 60\,t + 30 \qquad 20\,t = 30$$
$$t = 1{,}5 \text{ horas.}$$

El espacio recorrido:

$e = 80 \cdot 1{,}5 = 120\ km.$

10. $\left.\begin{matrix} x - y + 1 = 0 \\ 4x + y = 16 \end{matrix}\right\}$ $\begin{matrix} x - y = -1 \\ 4x + y = 16 \end{matrix}$ Sumando: $5x = 15$, $x = 3$

Sustituyendo en una cualquiera $y = 4$

11. $\left.\begin{matrix} x + 3y = -6 \\ 2x - 4y = -12 \end{matrix}\right\}$ Multiplicando la 1.ª ec. por -2.

$\left.\begin{matrix} -2x - 6y = 12 \\ 2x - 4y = -12 \end{matrix}\right\}$ Sumando:

$-10y = 0 \qquad y = 0$

Sustituyendo en una cualquiera $x = -6$

12. $\left.\begin{matrix} 3x - 7y = 6 \\ 5x + 2y = 51 \end{matrix}\right\}$ $x = \dfrac{6 + 7y}{3}$ Igualando:

$x = \dfrac{51 - 2y}{5}$

$$\frac{6 + 7y}{3} = \frac{51 - 2y}{5} \qquad 30 + 35y = 153 - 6y$$
$$41y = 123$$
$$y = 3$$

Sustituyendo en una de las expresiones despejamos x:

$$x = \frac{6 + 7 \cdot 3}{3} = \frac{27}{3} = 9,\ x = 9$$

13. $\left.\begin{matrix} 3x + 2y - 7 - x = 12 - 3y \\ 2x - 5y = 20 \end{matrix}\right\}$ Preparamos primero el sistema agrupando términos semejantes:

$2x + 5y = 19, \quad x = \dfrac{19 - 5y}{2}$

Igualando:

$2x - 5y = 20, \quad x = \dfrac{20 + 5y}{2}$

$$\frac{19 - 5y}{2} = \frac{20 + 5y}{2} \qquad 19 - 20 = 10y$$
$$-1 = 10y \quad y = -\frac{1}{10}$$

Sustituyendo: $x = \dfrac{39}{4}$

14. $\left.\begin{matrix} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{matrix}\right\}$ Despejando x en la 2.ª ecuación y sustituyendo ese valor en la 1.ª

$$x = 1 + y$$

$(1 + y) + y = 7 \quad 1 + 2y = 7 \quad 2y = 7 - 1 \quad 2y = 6 \quad y = 3$

y al sustituir este valor:

$$x = 1 + 3; \quad x = 4$$

15. $\left.\begin{matrix} -2x + y = 0 \\ x + y = 3 \end{matrix}\right\}$ Despejamos y en la 1.ª ecuación y sustituimos en la 2.ª

$y = 2x$

$x + 2x = 3$

$3x = 3$

$x = 1$ y sustituyendo $y = 2$

16. $\left.\begin{matrix} x + 4y - 8z = 0 \\ 4x + 8y - z = 92 \\ 8x - y - 4z = 108 \end{matrix}\right\}$ Eliminando x entre las 2 primeras y luego entre las 2 segundas:

$\left.\begin{matrix} x + 4y - 8z = 0 \\ 4x + 8y - z = 92 \end{matrix}\right\}$ Multiplicando la 1.ª por -4: $-4x - 16y + 32z = 0$ sumar (1)

$4x + 8y - z = 92$

$-8y + 31z = 92$

$\left.\begin{matrix} 4x + 8y - z = 92 \\ 8x - y - 4z = 108 \end{matrix}\right\}$ Multiplicando la 1.ª por -2: $-8x - 16y + 2z = -184$ sumar (2)

$8x - y - 4z = 108$

$-17y - 2z = -76$

Tenemos ahora un sistema de 2 ecuaciones (1) y (2) con 2 incógnitas.

$\left.\begin{matrix} -8y + 31z = 92 \\ -17y - 2z = -76 \end{matrix}\right\}$ Despejando:

$$\left.\begin{matrix} y = -\dfrac{92 - 31z}{8} \\ y = -\dfrac{-76 + 2z}{17} \end{matrix}\right\} \text{Igualando:}$$

$$+\frac{92 - 31z}{8} = +\frac{-76 + 2z}{17}$$

$$-608 + 16z = 1564 - 527z$$
$$16z + 527z = 1564 + 608$$
$$543z = 2172$$
$$z = \frac{2172}{543}, \quad z = 4$$

Sustituyendo este valor en cualquiera de las expresiones de y:

$$y = -\frac{92 - 31 \cdot 4}{8}; \quad y = -\frac{-32}{8}, \quad y = 4$$

y con estos valores puestos en una cualquiera de las tres ecuaciones iniciales, obtenemos el valor de x.

$$x + 4 \cdot 4 - 8 \cdot 4 = 0$$
$$x + 16 - 32 = 0$$
$$x = 16$$

17. Llamamos $\frac{1}{x} = a, \frac{1}{y} = b, \frac{1}{z} = c$ y sustituimos.

El sistema quedara:

$$\left.\begin{aligned} a + b &= \frac{1}{12} \\ b + c &= \frac{1}{20} \\ a + c &= \frac{1}{15} \end{aligned}\right\}$$ Restando las dos últimas:

$$\left.\begin{aligned} b + c &= \frac{1}{20} \\ a + c &= \frac{1}{15} \end{aligned}\right\} \quad b - a = -\frac{1}{60}$$

Esta ecuación obtenida, la sumamos con la primera:

$$\left.\begin{aligned} b - a &= -\frac{1}{60} \\ b + a &= \frac{1}{12} \end{aligned}\right\} \quad 2b = \frac{1}{15} \qquad b = \frac{1}{30}$$

Entonces:

$$a = \frac{1}{12} - \frac{1}{30}; \quad a = \frac{5 - 2}{60} = \frac{3}{60}, \quad a = \frac{1}{20}$$

y en otra cualquiera de las ecuaciones en que intervenga c, encontramos:

$$c = \frac{1}{20} - \frac{1}{30} = \frac{3-2}{60}, \quad c = \frac{1}{60}$$

Las incógnitas son:

$$a = \frac{1}{x} \qquad \frac{1}{20} = \frac{1}{x} \qquad x = 20$$

Análogamente $y = 30$ $z = 60$

18.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{y} = \dfrac{4}{7} \\ \dfrac{x+9}{y-9} = \dfrac{7}{4} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 7x - 4y = 0 \\ 4x + 36 = 7y - 63 \end{array}\right\}$$

Agrupando términos semejantes

$$\left.\begin{array}{r} 7x - 4y = 0 \\ 4x - 7y = -99 \end{array}\right\} \quad x = \frac{4y}{7}$$

$$4 \cdot \frac{4 \cdot y}{7} - 7y = -99$$

$$16y - 49y = -693$$

$$-33y = -693$$

$$y = \frac{693}{33} = 21$$

$$x = \frac{4 \cdot 21}{7}, \quad x = 12$$

19. Número a b. Número invertido b a

$$\left.\begin{array}{r} a + b = 7 \\ a + 10b = 2(b + 10a) + 2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} ab = b + 10a \\ ba = a + 10b \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} a + b = 7 \\ a + 10b = 2b + 20a + 2 \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{r} a + b = 7 \\ -19a + 8b = 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -8a - 8b = -56 \\ -19a + 8b = \quad 2 \\ \hline -27a \quad = -54 \end{array} \quad \begin{array}{l} a = 2 \\ b = 5 \end{array}$$

20. Llamamos x al número de hijos e y al número de hijas

$$\left.\begin{array}{l} x - 1 = \dfrac{y}{2} \\ y - 1 = x \end{array}\right\}$$

Resolviendo este sistema:

$$y - 1 - 1 = \frac{y}{2} \quad y - 2 = \frac{y}{2} \quad 2y - 4 = y$$

$$y = 4 \quad \text{luego} \quad x = 3$$

21. Llamamos x a la cantidad de dinero que recibe cada niño; será $x + 10$ lo que reciba cada mujer y $x + 15$ lo que reciba cada hombre.

$$15(x + 15) + 20(x + 10) + 12x = 660$$
$$15x + 225 + 20x + 200 + 12x = 660$$

Agrupando términos semejantes:

$$47x = 660 - 425$$
$$x = \frac{235}{47} \quad x = 5$$

El grupo de niños recibe 60 ptas., las mujeres 300 ptas. y los hombres 300 pesetas.

22. Edad padre: x

Edad hijo: y

$$\left.\begin{array}{r} x = 3y \\ x - 30 = y + 8 \end{array}\right\}$$ Sustituyendo el valor de x en la 2.ª ecuación

$$3y - 30 = y + 8$$
$$2y = 38$$
$$y = 19, \text{ y el padre: } x = 57$$

23. $\frac{x + 3}{y + 3} = \frac{3}{4}$, $4x + 12 = 3y + 9$

$\frac{x - 3}{y - 3} = \frac{2}{3}$, $3x - 9 = 2y - 6$

$$\left.\begin{array}{r} 4x - 3y = -3 \\ 3x - 2y = 3 \end{array}\right\}$$ Multiplicando la 1.ª ecuación por 2 y la 2.ª por -3

$$\left.\begin{array}{r} 8x - 6y = -6 \\ -9x + 6y = -9 \end{array}\right\}$$ Sumando

$$-x = -15 \quad x = 15$$

y poniendo este valor en una ecuación cualquiera:

$$3 \cdot 15 - 2y = 3$$
$$-2y = 3 - 45$$
$$-2y = -42$$
$$y = 21$$

y la fracción sería $\frac{15}{21}$

24. $2x + 0,5 < 0 \qquad 2x < -0,5$

luego $x < -0,25$

25. Equivale a $10x - 23 < 0$

o sea: $10x < 23$

$$x < \frac{23}{10}$$

26. El capital en pesetas es x, se tiene:

$$x + \frac{60x}{1200} = 105.000$$

Resolviendo esta ecuación obtenemos $x = 100.000$ pesetas.

27. Llamamos x, y, z las cantidades a pagar, respectivamente, por los ayuntamientos A, B y C. Así:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{8000} = \dfrac{y}{5000} = \dfrac{z}{6000} \\ \\ x + y + z = 2400000 \end{array}\right\}$$

Para resolver utilizamos la incógnita auxiliar t:

$$\frac{x}{8} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6} = t$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 8t \\ y = 5t \\ z = 6t \end{array}\right\}$$ Llevándolo a la 3.ª ecuación

$$8t + 5t + 6t = 2400000$$

$$19t = 2400000, \; t = \frac{2400000}{19}$$

luego:

$$x = \frac{19200000}{19} = 1010526{,}31 \text{ ptas.}$$

$$y = \frac{12000000}{19} = 631578{,}95 \text{ ptas.}$$

$$z = \frac{14400000}{19} = 757894{,}74 \text{ ptas.}$$

28. Llamamos x = número de litros de vino de 8 ptas./l e y = número litros de vino de 12 ptas./l.
El valor de todo el vino es: $8x + 12y$ (se supone que el agua es gratis).

Al vender la mezcla a 15 ptas./l su valor es: 15 · 100 = 1500 ptas. Por consiguiente:

$$8\,x + 12\,y + 600 = 1500$$

pero, además:

$$x + y = 100 - 10 = 90$$

Tenemos 2 ecuaciones con 2 incógnitas, que resolvemos:

$$\left.\begin{array}{c} y = 90 - x \\ 8\,x + 12\,(90 - x) + 600 = 1500 \\ x = 45\ l \end{array}\right\}$$

$$y = 90 - 45 = 45\ l$$

Hay que poner igual cantidad de cada clase, aparte de los 10 l de agua.

TEMA XVI

RADICALES

ESQUEMA/ RESUMEN

1. Planteamientos para el estudio de radicales.
   1.1. Raiz de un producto.
   1.2. Raiz de un cociente.
   1.3. Potencia de una raiz.
   1.4. Raiz de una raíz.
   1.5. Extracción de factores de un radical.

2. Operaciones con radicales.
   2.1. Radicales semejantes.
   2.2. Suma algebraica de radicales.
   2.3. Producto y cociente de radicales.
   2.4. Racionalización de denominadores.
      2.4.1. Denominador es un monomio con una raíz cuadrada.
      2.4.2. Denominador es un monomio con una raíz de índice cualquiera.
      2.4.3. El denominador es un binomio.

3. Potenciación.
   3.1. Potencia de exponente entero negativo.
   3.2. Potencia con exponente cero.
   3.3. Potencia de exponente fraccionario.
   3.4. Potencias con exponentes racionales.

4. Notas aclaratorias y complementarias.

INSTRUCCIONES PARA EL ESTUDIO DEL TEMA

Siguiendo el planteamiento justificado al inicar esta Unidad Didáctica, tiene un marcado carácter práctico. Solamente pretende familiarizar al alumno con el manejo de los radicales y de las potencias. Por eso hemos omitido toda demostración rigurosa buscando criterios de aplicación inmediata. Recomendamos, una vez más, que el estudiante realice cuidadosamente todos los ejemplos y ejercicios intercalados, así como los que figuran al final del tema bajo el título de «Ejercicios de autocomprobación».

1. PLANTEAMIENTOS PARA EL ESTUDIO DE RADICALES

Entenderemos por *radical* a la raiz indicada de un número o de una expresión algebraica.

Son expresiones radicales:

$$\sqrt{2}\ ,\ \sqrt[3]{7}\ ,\ \sqrt{2^{\,2}+b}\ ,\ \sqrt{3x^2+7}\ ,\ \sqrt[7]{\frac{4a^2+b}{a\,b}}$$

Llamamos radicando a la expresión o número que figura bajo el signo radical.

Aunque la denominación no es muy exacta, en principio, puede ser **útil que llamemos** *expresiones irracionales* a aquellas cuya raiz indicada no es exacta, a este tipo de expresiones nos referimos cuando hablamos de *radicales*. En este estudio excluimos, como consecuencia, a los radicales que tienen raíz exacta y aquellos que tienen índice par y el radicando negativo.

1.1. Raíz de un producto

La raiz n-ésima de un producto es igual al producto de las raices n-ésimas de los factores.

$$\sqrt[n]{a\cdot b\cdot c}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}$$

Esta igualdad se puede leer en los dos sentidos, podemos utilizarla para transformar en producto de raices la raiz de un producto y para reducir a un solo radical el producto de radicales de igual índice.

De la expresión anterior, se deduce lo siguiente:

$$(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}\,)^n=(\sqrt[n]{a}\,)^n\cdot(\sqrt[n]{b}\,)^n\cdot(\sqrt[n]{c})^n=a\cdot b\cdot c$$

Mostramos, a continuación, algunos ejemplos:

$$\sqrt[3]{27 \cdot 343 \cdot 729} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{343} \cdot \sqrt[3]{729} = 3 \cdot 7 \cdot 9 = 189$$

$$\sqrt{2\,a} \cdot \sqrt{3\,b} \cdot \sqrt{7\,c} = \sqrt{2\,a \cdot 3\,b \cdot 7\,c} = \sqrt{42\,a\,b\,c}$$

$$\sqrt[4]{2\,a^2\,b}\ \sqrt[4]{4\,a\,b}\ \sqrt[4]{3\,c} = \sqrt[4]{2\,a^2\,b \cdot 4\,a\,b \cdot 3\,c} = \sqrt[4]{24\,a^3\,b^2\,c}$$

Concluyendo, podemos decir que para multiplicar varios radicales que tienen el mismo índice, se extrae la raíz, del mismo índice, del producto de los radicandos.

1.2. Raíz de un cociente

La raíz n-ésima de un cociente es igual al cociente de las raíces n-ésimas del dividendo y del divisor.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

también puede escribirse así:

$$\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$$

Lo mismo que decíamos al considerar la raíz de un producto, podemos afirmar ahora, la expresión que acabamos de escribir, sirve para transformar en cociente de raíces la raíz de un cociente y para reducir a un solo radical el cociente de dos radicales de igual índice.

De las expresiones arriba escritas se puede deducir fácilmente:

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b}$$

$$\sqrt{\frac{121}{25}} = \frac{\sqrt{121}}{\sqrt{25}} = \frac{11}{5}$$

$$\sqrt[3]{\frac{27}{3375}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{3375}} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{\sqrt{2\,a^2\,b}}{\sqrt{3\,a}} = \sqrt{\frac{2\,a^2\,b}{3\,a}} = \sqrt{\frac{2}{3}\,a\,b}$$

Resumiendo, para dividir varios radicales que tienen el mismo índice, se extrae la raíz, del mismo índice, del cociente de los radicandos.

1.3. Potencia de una raíz

Para elevar una raíz a una potencia, se eleva el radicando a esa potencia.

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Es fácil de comprender, pues basta considerar la potencia como un caso particular del producto de radicales, en el que todos los factores son iguales:

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \text{m veces } \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a \cdot a \cdot a \cdot \text{m veces } a} = \sqrt[n]{a^m}$$

Veamos algunos ejemplos:

$$(\sqrt{3\ a\ b})^3 = \sqrt{(3\ a\ b)^3} = \sqrt{27\ a^3\ b^3}$$

$$(\sqrt[3]{2\ a^2\ b})^2 = \sqrt[3]{(2\ a^2\ b)^2} = \sqrt[3]{4\ a^4\ b^2}$$

$$(\sqrt[3]{4})^4 = \sqrt[3]{4^4} = \sqrt[3]{256}$$

Recordando la relación existente entre las operaciones de radicación y potenciación, nos permite enunciar: para hallar la raiz de una potencia, puede hacerse calculando la raíz de la base y elevando después, el resultado a la potencia dada.

Así:

$$\sqrt{81^3} = (\sqrt{81})^3 = 9^3 = 729$$

$$\sqrt[3]{216^2} = (\sqrt[3]{216})^2 = 6^2 = 36$$

1.4. Raíz de una raíz

La raiz m-ésima de raiz n-ésima de un número es igual a la raiz mn-ésima de dicho número.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

Es fácil, de comprobar la certeza de esta igualdad, elevando los dos miembros de la misma a idéntica potencia m n obtenemos el mismo resultado.

Primer miembro: $(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^{mn} = \left[(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^n\right]^m = (\sqrt[n]{a})^n = a$

Segundo miembro: $(\sqrt[mn]{a^{mn}}) = a$

Presentamos algunos ejemplos:

$$\sqrt{\sqrt{2\ a}} = \sqrt[4]{2\ a}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{3\ a^2\ b}}} = \sqrt[12]{3\ a^2\ b}$$

$$\sqrt[4]{6561} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{6561}}} = \sqrt{\sqrt{81}} = \sqrt{9} = 3$$

$$\sqrt[6]{4096} = \sqrt[3]{\sqrt{4096}} = \sqrt[3]{64} = 4$$

BIBLIOTECA PUBLICA PTO. STA. MARIA

Observando, los ejemplos que acabamos de resolver, hemos obtenido un procedimiento para la extracción

de raíces de índice compuesto, para ello conviene proceder de la siguiente manera: primero, calculamos la raíz n-ésima del radicando, y luego, de este resultado, se halla la raíz m-ésima*.

Es importante tener siempre presente lo siguiente: El valor de un radical no varía si se multiplican por un mismo número el índice de la raíz y el exponente del radicando.

$$\sqrt[p]{a^q} = \sqrt[p \cdot n]{a^{qn}}$$

comprobamos la certeza de esta igualdad, procediendo como hemos hecho en otra ocasión. Si elevamos los dos miembros de esta igualdad a la potencia *pn,* obtenemos el mismo valor:

Primer miembro: $(\sqrt[p]{a^q})^{pn} = \left[(\sqrt[p]{a^q})^p \right]^n = (a^q)^n = a^{qn}$

Segundo miembro: $(\sqrt[pn]{a^{qn}})^{pn} = a^{qn}$

en efecto, es cierta la propiedad enunciada.

Si el radicando es un monomio cuyas letras tienen diversos exponentes, habrá que multiplicar todos ellos, junto con el del coeficiente, por el que se ha multiplicado al índice.

Los siguientes ejemplos tratan de aclarar esta circunstancia:

$$\sqrt{3\ a\ b} = \sqrt[4]{(3\ a\ b)^2} = \sqrt[4]{3^2\ a^2\ b^2} = \sqrt[4]{9\ a^2\ b^2}$$

$$\sqrt[3]{2\ a\ b\ c} = \sqrt[6]{(2\ a\ b\ c)^2} = \sqrt[6]{4\ a^2\ b^2\ c^2}$$

$$\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[9]{125}$$

Por tanto, el valor de un radical no se altera al dividir exactamente por un mismo número el índice de la raíz y el exponente del radicando.

Como norma práctica, podemos decir que si el radicando es un monomio cuyas letras tienen diversos exponentes, se pueden dividir todos ellos (coeficiente incluido) y el índice de la raíz por su máximo común divisor y quedar totalmente simplificado:

$$\sqrt{36\ a^2\ b^2} = \sqrt{6^2\ a^2\ b^2} = 6\ a\ b$$

$$\sqrt[3]{27\ a^3\ b^6\ c^3} = \sqrt[3]{3^3\ a^3\ b^6\ c^3} = 3\ a\ b^2\ c$$

$$\sqrt[4]{25\ a^4\ c^6} = \sqrt[4]{5^2\ a^4\ c^6} = \sqrt{5\ a^2\ c^3}$$

Como consecuencia de todo lo dicho en este párrafo, podemos dar una norma para *reducir varios radicales a índice común,* que en cierto modo tiene cierto parecido con la reducción a común denominador. En definitiva, para obtener el mínimo índice común, primero se halla el mínimo común múltiplo de los índices, y éste será el índice común, después se multiplican los exponentes de cada radicando por el cociente de dividir el índice común por el índice respectivo*.

---

* De esta forma, es posible mediante una extracción sucesiva de raíces cuadradas y sucesivas, obtener una raíz de índice 2 · 3, que contenga solamente los factores 2 y 3.

* También sería correcto decir, que para reducir varios radicales a índice común, se multiplica el índice y los exponentes de cada radical por los índices de los demás. Si se trata de los radicales $\sqrt[3]{a}$ $\sqrt[4]{b}$, reduciendo a índice común: $\sqrt[3\cdot4]{a^{4}}$ $\sqrt[4\cdot3]{b^{3}}$ o sea $\sqrt[12]{a^4}$ $\sqrt[12]{a^3}$

Vamos a reducir a índice común los siguientes radicales:

$$\sqrt{2a} \quad \sqrt[3]{2\,(a-b)} \quad \sqrt[4]{3\,a^3\,b}$$

El m.c.m. de los índices 2, 3 y 4 es 12, el cociente entre este nuevo índice y el índice anterior de los radicales es: $\frac{12}{2} = 6, \frac{12}{3} = 4, \frac{12}{4} = 3$ por tanto, podemos escribir:

$$\sqrt[12]{(2\,a)^6} \quad \sqrt[12]{[2\,(a-b)]^4} \quad \sqrt[12]{(3\,a^3\,b)^3}$$

$$\sqrt[12]{64\,a^6} \quad \sqrt[12]{16\,(a-b)^4} \quad \sqrt[12]{27\,a^9\,b^3}$$

Consideremos, ahora, los radicales:

$$\sqrt{a} \quad \sqrt[5]{b} \quad \sqrt[4]{c} \quad \sqrt[10]{d}$$

que reducimos a índice común. El m.c.m.(2, 6, 4, 10) = 60, luego

$$\sqrt[60]{a^{30}} \quad \sqrt[60]{b^{10}} \quad \sqrt[60]{c^{15}} \quad \sqrt[60]{d^6}$$

Como de costumbre, los exponentes del radicando resultan de dividir el nuevo índice común, por los índices que tenían antes los radicales.

1.5. Extracción de factores de un radical

Puesto que la raíz de un producto es igual al producto de las raíces de los factores, si alguno de los factores del radicando tiene por exponente un número múltiplo del índice, a este factor se le puede sacar fuera del radical, dividiendo su exponente por el índice.

Para que un factor pueda sacarse del radical su exponente ha de ser múltiplo del índice, de esta forma se reconoce, fácilmente, cuando un factor se puede extraer. No ocurre así con los números, hay que descomponerlos en factores primos.

Estudiemos algunos ejemplos:

Sea $\sqrt{25\,a^4\,b^5\,c}$ es evidente que el único exponente de la parte literal múltiplo del índice de la raíz, 2, es el correspondiente a la letra *a*, además, $25 = 5^2$, luego:

$$\sqrt{25\,a^4\,b^5\,c} = \sqrt{5^2\,a^4\,b^5\,c} = 5 \cdot a^2 \cdot \sqrt{b^5\,c}$$

Realmente, se puede sacar algún factor más, observemos que $b^5 = b^4\,b$, por tanto,

$$\sqrt{25\,a^4\,b^5\,c} = \sqrt{5^2\,a^4\,b^4\,b\,c} = 5\,a^2\,b^2 \quad \sqrt{b\,c}$$

Vamos a extraer todos los factores posibles del radical.

$$\sqrt[3]{54\,a^7\,b^3\,c^6}$$

los únicos exponentes múltiplos del índice de la raiz son los pertenecientes a las letras b y c, pero recordando, lo visto en el caso anterior, $a^7 = a^6 \cdot a$ y que $54 = 2 \cdot 3^3$ tenemos:

$$\sqrt[3]{2 \cdot 3^3 a^6 \cdot a \cdot b^3 \cdot c^6} = 3\, a^2\, b\, c^2 \sqrt[3]{2\, a}$$

En definitiva, para sacar factores de un radical bastaba con extraer su raiz, para introducirlos, lógicamente habrá que elevarlos a la potencia indicada por el índice de la raiz y multiplicarlos por el radicando.

Ejemplos:

$$2\sqrt{7} = \sqrt{7 \cdot 2^2} = \sqrt{28}$$

$$2\, a\sqrt{a\, b} = \sqrt{a\, b \cdot (2\, a)^2} = \sqrt{4\, a^3\, b}$$

$$2\, a^2 \sqrt[3]{2\, a\, b^2\, c} = \sqrt[3]{(2\, a\, b^2\, c)\, (2\, a^2)^3} = \sqrt[3]{16\, a^7\, b^2\, c}$$

Ejercicios y ejemplos

1. Efectuar la siguiente operación:

$$\sqrt{25\ \sqrt{81\ \sqrt{256}}}$$

vamos calculando las sucesivas raices:

$$\sqrt{256} = 16$$

luego, la expresión dada queda

$$\sqrt{25\ \sqrt{81 \cdot 16}}$$

análogamente:

$$\sqrt{81 \cdot 16} = \sqrt{9^2 \cdot 4^2} = \sqrt{(9 \cdot 4)^2} = 9 \cdot 4 = 36$$

queda, finalmente, que averiguar la raiz:

$$\sqrt{25 \cdot 36} = \sqrt{5^2 \cdot 6^2} = \sqrt{(5 \cdot 6)^2} = 5 \cdot 6 = 30$$

2. Vamos a efectuar, la siguiente operación indicada:

$$\sqrt{1 + \sqrt{6 + \sqrt{5 + \sqrt{16}}}}$$

Procediendo como en el ejercicio anterior:

$$\sqrt{16} = 4$$

luego:

$$\sqrt{1 + \sqrt{6 + \sqrt{5 + 4}}} = \sqrt{1 + \sqrt{6 + \sqrt{9}}}$$

como:

$$\sqrt{9} = 3$$

nos queda:

$$\sqrt{1 + \sqrt{6 + 3}} = \sqrt{1 + \sqrt{9}}$$

puesto que

$$\sqrt{9} = 3$$

resulta finalmente

$$\sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$$

3. Introducir el coeficiente en los siguientes radicales:

a) $2\,(a - b)\sqrt{a - b}$

b) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$

a) Procedemos de la manera vista:

$$2\,(a - b)\sqrt{a - b} = \sqrt{(a - b)\,[2\,(a - b)]^2} = \sqrt{4\,(a - b)^3}$$

b) En este caso, el radical es de indice 3, por tanto, el factor que figura fuera lo elevamos al cubo y multiplicamos por el radicando, de igual manera que en los ejercicios anteriores:

$$\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{3}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 2^3}{2 \cdot 3^3}} = \sqrt[3]{\frac{2^2}{3^2}} = \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$$

4. Sacar todos los factores posibles fuera del radical en los siguientes casos:

a) $\sqrt[4]{729\ a^7\ b^{12}\ c^6}$

b) $\sqrt{a^2\ b - 2\ a\ b^2 + b^3}$

Como norma práctica haremos lo dicho en un apartado anterior, fijándonos en los factores del radicando que son múltiplo del índice de la raiz, aquellos que cumplen esta condición los extraemos del radical, figurando con exponente resultado de dividir su exponente dentro del radical por el índice de la raiz. Los coeficientes los descomponemos en factores primos.

a) Actuando de esta manera obtenemos:

$$\sqrt[4]{729\ a^7\ b^{12}\ c^6} = \sqrt[4]{3^6\ a^6\ a\ b^{12}\ c^6} = 3\ a\ b^2\ c\ \sqrt[4]{a}$$

b) En este caso, aparentemente no existen factores, pero haciendo antes, algunas transformaciones sacando factor común a b y recordando que $(a - b)^2 = a^2 - 2\ a\ b + b^2$, resulta:

$$\sqrt{a^2\ b - 2\ a\ b^2 + b^3} = \sqrt{b\ (a^2 - 2\ a\ b + b^2)} = \sqrt{b\ (a - b)^2} = (a - b)\sqrt{b}$$

5. Reducir a índice común los siguientes radicales:

a) $\sqrt[3]{5\,y^2\,z}$, $\sqrt{\frac{1}{2}y\,z}$, $\sqrt[4]{\frac{1}{3}y^3}$

b) $\sqrt{\frac{4}{a}}$, $\sqrt[3]{\frac{2}{b^2}}$, $\sqrt[4]{\frac{2}{c}}$, a

a) El m.c.m. de los índices 3, 2, 4 es 12, este es el nuevo índice común, luego los radicandos hay que elevarlos a $\frac{12}{3} = 4$, $\frac{12}{2} = 6$, $\frac{12}{4} = 3$ respectivamente. Así tenemos:

$$\sqrt[12]{(5\,y^2\,z)^4}\ ,\ \sqrt[12]{\left(\frac{1}{2}y\,z\right)^6}\ ,\ \sqrt[12]{\left(\frac{1}{3}y^3\right)^3}$$

$$\sqrt[12]{625\,y^8\,z^4}\ ,\ \sqrt[12]{\frac{1}{64}\cdot y^6\,z^6}\ ,\ \sqrt[12]{\frac{1}{27}y^9}$$

b) Cuando no figura el signo radical, puede suponerse uno con índice igual a la unidad. Procediendo lo mismo que en el caso anterior obtenemos.

$$\text{m.c.m. } (2,\ 3,\ 4,\ 1) = 12$$

luego:

$$\sqrt[12]{\left(\frac{4}{a}\right)^6}\ ,\ \sqrt[12]{\left(\frac{2}{b^2}\right)^4}\ ,\ \sqrt[12]{\left(\frac{2}{c}\right)^3}\ ,\ \sqrt[12]{a^{12}}$$

$$\sqrt[12]{\frac{4096}{a^6}}\ ,\ \sqrt[12]{\frac{16}{b^8}}\ ,\ \sqrt[12]{\frac{8}{c^3}}\ ,\ \sqrt[12]{a^{12}}$$

2. OPERACIONES CON RADICALES

2.1. Radicales semejantes

Llamaremos radicales semejantes a aquellos que tienen el mismo radicando y el mismo índice. Así, son radicales semejantes.

$$2\sqrt{a} \qquad 3\sqrt{a} \qquad -7\sqrt{a}$$

todos tienen igual índice y radicando, los únicos que son distintos son los factores que figuran fuera del radical.

Muchas veces, a simple «golpe de vista», no se puede asegurar si definitivamente tenemos radicales semejantes, antes de asegurar nada conviene simplificar o transformar adecuadamente los radicales dados. Así, si tenemos los radicales

$$4\sqrt[3]{81\,a^3\,x}\ ,\ 2\sqrt[3]{192}\,x\ ,\ \sqrt[6]{9\,x^2}$$

que aparentemente, no son semejantes, podemos intentar sacar factores del radicando, simplificarlos en definitiva y obtenemos

$$4\sqrt[3]{3^3\cdot 3\,a^3\,x}\ ,\ 2\sqrt[3]{3\cdot 4^3\,x}\ ,\ \sqrt[6]{3^2\,x^2}$$

en los dos primeros radicales sacamos factores del radical, mientras que en el tercero podemos dividir el indice del mismo y los exponentes del radicando por 2, según lo visto en el párrafo 1.4:

$$4 \cdot 3\, a\sqrt[3]{3\,x} \quad , \quad 2 \cdot 4\sqrt[3]{3\,x} \quad , \quad \sqrt[3]{3x}$$

$$12\, a\sqrt[3]{3\,x} \quad , \quad 8\sqrt[3]{3\,x} \quad , \quad \sqrt[3]{3\,x}$$

que son radicales semejantes.

De igual manera se actúa, en el caso de que sean radicales numéricos. Supongamos los radicales

$$\sqrt{45} \qquad \sqrt{20} \qquad 2\sqrt{\frac{1}{5}}$$

también son radicales semejantes, para ello basta fijarse en que se pueden escribir

$$\sqrt{3^2 \cdot 5} \quad \sqrt{2^2 \cdot 5} \quad 2\sqrt{\frac{5}{5^2}}$$

sacando los factores posibles fuera del radical

$$3\sqrt{5} \quad 2\sqrt{5} \quad \frac{2}{5}\sqrt{5}$$

como se puede comprobar son radicales semejantes.

2.2. Suma algebraica de radicales

Esta operación recuerda mucho a la suma algebraica de monomios. La suma algebraica de varios radicales semejantes puede expresarse sacando el radical como factor común de la suma algebraica de los coeficientes. En el caso de que no sean semejantes los radicales, dejamos la operación indicada.

Veamos algunos ejemplos:

$$\sqrt[3]{54} + \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt[3]{250} - \frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{9}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{128}{25}} - \sqrt[3]{\frac{27}{4}}$$

con algunas transformaciones, pueden ser radicales semejantes:

$$3\sqrt[3]{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} + 5\sqrt[3]{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{4}{5}\sqrt{2} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{2} =$$

$$= \left(3 + 5 - \frac{3}{2}\right)\sqrt[3]{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{4}{5}\right)\sqrt{2} = \frac{13}{2}\sqrt[3]{2} + \frac{21}{20}\sqrt{2}$$

este sería el resultado final, pues estos radicales no son semejantes y no se pueden transformar en radicales sumables.

Considerando otro ejemplo:

$$y^2\sqrt[3]{x^2\,y} - 2\,y\,\sqrt[3]{x^2\,y} + \sqrt[3]{x^2\,y} = (y^2 - 2\,y + 1)\cdot\sqrt[3]{x^2\,y} = (y-1)^2\sqrt[3]{x^2\,y}$$

2.3. Producto y cociente de radicales

Estudiamos juntas estas dos operaciones, porque su realización es, esencialmente, la misma.

Para multiplicar o dividir varios radicales, cuando tienen el mismo índice, se multiplican o dividen los radicandos, resulta, por tanto, otro radical del mismo índice.

En el caso de que los radicales no tengan índice común, se reducen previamente a índice común y se procede como acabamos de decir.

Algunos ejemplos:

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[4]{5}$$

primero reducimos a índice común y luego multiplicamos los radicandos:

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{a^6}\cdot\sqrt[12]{b^4}\cdot\sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125\,a^6\,b^4}$$

De igual manera procedemos en el siguiente ejemplo:

$$\sqrt{\frac{a}{b}}\;\sqrt[3]{\frac{b}{a}} = \sqrt[6]{\left(\frac{a}{b}\right)^3}\;\sqrt[6]{\left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt[6]{\frac{a^3}{b^3}}$$

$$\sqrt[6]{\frac{b^2}{a^2}} = \sqrt[6]{\frac{a^3\,b^2}{b^3\,a^2}} = \sqrt[6]{\frac{a}{b}}$$

Veamos, algunos cocientes de radicales:

$$\sqrt[3]{\frac{3}{4}} : \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{4} : \frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3\cdot 2}{1\cdot 4}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$$

En el caso siguiente, reducimos antes a índice común.

$$\frac{\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[4]{b}} = \frac{\sqrt[12]{(b^2)^4}}{\sqrt[12]{b^3}} = \frac{\sqrt[12]{b^8}}{\sqrt[12]{b^3}} = \sqrt[12]{\frac{b^8}{b^3}} = \sqrt[12]{b^5}$$

2.4. Racionalización de denominadores

En algunas ocasiones las expresiones fraccionarias tienen en el denominador una o varias raíces no exactas. Existen unos procedimientos sencillos para conseguir una fracción equivalente cuyo denominador no tenga radicales, a esta operación la llamamos racionalización de denominadores, para su estudio distinguiremos tres casos.

2.4.1. Denominador es un monomio con una raíz cuadrada

Para racionalizar este tipo de fracciones se multiplica el numerador y el denominador por la raiz que aparece en el denominador.

Algunos ejemplos:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{7}{2\sqrt{6}} = \frac{7\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{7\sqrt{6}}{2\sqrt{36}} = \frac{7\sqrt{6}}{2\cdot 6} = \frac{7\sqrt{6}}{12}$$

$$\frac{4}{2\sqrt{a\ b}} = \frac{4\sqrt{a\ b}}{2\sqrt{a\ b}\cdot\sqrt{a\ b}} = \frac{4\sqrt{a\ b}}{2\sqrt{(a\ b)^2}} = \frac{4\sqrt{a\ b}}{2\ a\ b} = \frac{2\sqrt{a\ b}}{a\ b}$$

Conviene antes de racionalizar simplificar al máximo los radicales, si ha lugar, sacando fuera del radical los factores posibles. Una vez realizada la racionalización expresaremos el resultado de la forma más simplificada posible.

2.4.2. Denominador es un monomio con una raíz de índice cualquiera

Supongamos que en el denominador tenemos una raiz de índice m. Para racionalizar una fracción en estas condiciones multiplicamos los dos términos por la raiz m-ésima de una expresión cuyo producto por el radicando del denominador sea potencia m-ésima perfecta. En general:

$$\frac{a}{\sqrt[m]{b^n}} = \frac{a\sqrt[m]{b^{m-n}}}{\sqrt[m]{b^n}\cdot\sqrt[m]{b^{m-n}}} = \frac{a\sqrt[m]{b^{m-n}}}{\sqrt[m]{b^m}} = \frac{a\sqrt[m]{b^{m-n}}}{b}$$

Presentamos algunos ejemplos:

$$\frac{2}{\sqrt[3]{6}} = \frac{2\sqrt[3]{6^2}}{\sqrt[3]{6}\ \sqrt[3]{6^2}} = \frac{2\sqrt[3]{6^2}}{\sqrt[3]{6^3}} = \frac{2\sqrt[3]{36}}{6} = \frac{\sqrt[3]{36}}{3}$$

$$\frac{5}{10\sqrt[6]{3}} = \frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt[6]{3^5}}{10\sqrt[6]{3}\cdot\sqrt[6]{3^5}} = \frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt[6]{3^5}}{10\sqrt[6]{3^6}} = \frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt[6]{3^5}}{10\cdot 3} = \frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt[6]{3^5}}{30}$$

como el numerador es el producto de dos radicales, que efectuamos reduciendo a índice común previamente:

$$\frac{\sqrt[12]{5^6}\cdot\sqrt[12]{(3^5)^2}}{30} = \frac{\sqrt[12]{5^6\cdot 3^{10}}}{30}$$

2.4.3. El denominador es un binomio

En este caso multiplicamos el numerador y denominador de la fracción a racionalizar por el binomio conjugado del denominador. El binomio conjugado se obtiene cambiando el signo que liga ambos términos.

Ejemplo:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{1\ (\sqrt{2}+\sqrt{3}\ )}{(\sqrt{2}-\sqrt{3}\ )\ (\sqrt{2}+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2-3} =$$

$$= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$\frac{2}{1-\sqrt{2}} = \frac{2(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})} = \frac{2+2\sqrt{2}}{1^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{2+2\sqrt{2}}{1-2} = \frac{2+2\sqrt{2}}{-1} =$$

$$= -2 - 2\sqrt{2}$$

$$\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{(3\sqrt{2}-\sqrt{3})(2\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(2\sqrt{2}+\sqrt{3})(2\sqrt{2}-\sqrt{3})} = \frac{12-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}-3\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+3}{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2} =$$

$$= \frac{12-5\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+3}{8-3} = \frac{15-5\sqrt{6}}{5} = 3-1\sqrt{6} = 3-\sqrt{6}$$

Ejercicios y ejemplos

1. Realizar la siguiente suma:

$$\sqrt{2} + \sqrt{18} - \sqrt{32}$$

Tratamos de conseguir que sean semejantes los radicales:

$$\sqrt{2} + \sqrt{9\cdot 2} - \sqrt{16\cdot 2} = \sqrt{2} + \sqrt{3^2\cdot 2} - \sqrt{4^2\cdot 2} =$$

$$= \sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = (1+3-4)\sqrt{2} = 0$$

2. Calcular la siguiente suma de radicales:

$$2\sqrt{12} - 3\sqrt{75} + 5\sqrt{27}$$

Lo transformamos en radicales semejantes y luego efectuamos su suma:

$$2\sqrt{12} - 3\sqrt{75} + 5\sqrt{27} = 2\sqrt{4\cdot 3} - 3\sqrt{25\cdot 3} + 5\sqrt{9\cdot 3} =$$

$$= 2\cdot 2\sqrt{3} - 3\cdot 5\sqrt{3} + 5\cdot 3\sqrt{3} = 4\sqrt{3} - 15\sqrt{3} + 15\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

3. Efectuar el producto:

$$3\sqrt[3]{20}\cdot 5\sqrt[3]{50}$$

Tienen estos dos radicales el mismo indice, luego:

$$3\sqrt[3]{20}\cdot 5\sqrt[3]{50} = 3\cdot 5\sqrt[3]{20\cdot 50} = 15\sqrt[3]{1000} = 15\cdot 10 = 150$$

4. Efectuar el producto:

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[6]{a^5}$$

Como estos radicales no tienen índice común, hacemos su reducción previamente. El m.c.m. de 2, 3, 4, 6 es 12, luego:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[6]{a^5} = \sqrt[12]{a^6} \cdot \sqrt[12]{a^8} \cdot \sqrt[12]{a^9} \cdot \sqrt[12]{a^{10}} = \sqrt[12]{a^{33}}$$

Se puede simplificar este resultado:

$$a^2\sqrt[4]{a^3}$$

5. Efectuar el siguiente cociente:

$$(6\sqrt[6]{5^7\ a^7}) : (3\sqrt[3]{5^2\ a^2})$$

Estamos en circunstancias semejantes al caso anterior, el mínimo común índice en este caso es 6:

$$\frac{6\sqrt[6]{5^7\ a^7}}{3\sqrt[3]{5^2\ a^2}} = \frac{6\sqrt[6]{5^7\ a^7}}{3\sqrt[6]{5^4\ a^4}} = \frac{6}{3}\sqrt[6]{\frac{5^7\ a^7}{5^4\ a^4}} = 2\sqrt[6]{5^3\ a^3}$$

simplificamos este resultado dividiendo por 3 el índice de la raíz y los exponentes del radicando, luego:

$$2\sqrt{5\ a}$$

6. Racionalizar la expresión:

$$\frac{\sqrt{24} - \sqrt{6}}{\sqrt{6} - \sqrt{5}}$$

Multiplicamos numerador y denominador por la expresión conjugada del denominador

$$\frac{\sqrt{24} - \sqrt{6}}{\sqrt{6} - \sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{24} - \sqrt{6})(\sqrt{6}+\sqrt{5})}{(\sqrt{6} - \sqrt{5})(\sqrt{6}+\sqrt{5})} = \frac{12 + 2\sqrt{30} - 6 - \sqrt{30}}{1} = 6 + \sqrt{30}$$

7. Racionalizar la fracción:

$$\frac{3\ x^2\ y}{\sqrt[3]{x\ y^6}}$$

En este caso no tenemos en el denominador una raíz cuadrada:

$$\frac{3\ x^2\ y}{\sqrt[3]{x\ y^6}} = \frac{3\ x^2\ y\sqrt[3]{(x\ y^6)^2}}{\sqrt[3]{x\ y^6}\sqrt[3]{(x\ y^6)^2}} = \frac{3\ x^2\ y\sqrt[3]{x^2\ y^{12}}}{\sqrt[3]{(x\ y^6)^3}} = \frac{3\ x^2\ y\sqrt[3]{x^2\ y^{12}}}{x\ y^6} = \frac{3\ x\sqrt[3]{x^2\ y^{12}}}{y^5}$$

el radical que aparece en el numerador se puede simplificar sacando factores fuera del radical, queda:

$$\frac{3\ x\ y^4\sqrt[3]{x^2}}{y^5} = \frac{3\ x}{y}\sqrt[3]{x^2}$$

8. Efectuar la operación:

$$\sqrt{a\ b\sqrt{a^2\ b^3\sqrt{a^8\ b^6}}}$$

Podemos expresarla como producto de 3 radicales independientes:

$$\sqrt{a\ b\sqrt{a^2\ b^3\sqrt{a^8\ b^6}}} = \sqrt{a\ b}\cdot\sqrt[4]{a^2\ b^3}\cdot\sqrt[8]{a^8\ b^6} = \sqrt[8]{a^4\ b^4}\cdot\sqrt[8]{a^4\ b^6}\cdot\sqrt[8]{a^8\ b^6} =$$

$$= \sqrt[8]{a^{16}\ b^{16}} = a^2\ b^2$$

3. POTENCIACION

3.1. Potencia de exponente entero negativo

Para hallar el cociente de dos potencias que tienen la misma base se restan los exponentes.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m\ -\ n}$$

Puede ocurrir que el exponente del dividendo es menor que el del divisor

$$\frac{a^m}{a^{m+n}} = a^{m-(m+n)} = a^{m-m-n} = a^{-n}$$

Según la definición de potencia no tiene sentido una potencia con exponente negativo, no se puede repetir «un número negativo «a» veces como factor». Pero podemos llegar a un significado simplificando la fracción precedente

$$\frac{a^m}{a^{m+n}} = \frac{a^m}{a^m\cdot a^n} = \frac{1}{a^n}$$

De esta manera, podemos decir que una potencia de exponente negativo es igual a la unidad dividida por una potencia de la misma base con el exponente cambiado de signo.

$$a^{-\ n} = \frac{1}{a^n}$$

Como consecuencia, toda expresión fraccionaria se puede representar como una expresión entera con exponente negativo. Asi:

$$\frac{a+b}{x-y} = (a+b)\cdot\frac{1}{x-y} = (a+b)\ (x-y)^{-1}$$

$$\frac{3}{a^2\ b^3} = 3\cdot\frac{1}{a^2\ b^3} = 3\ a^{-2}\ b^{-3}$$

$$\frac{2}{5\ a} = 2\cdot\frac{1}{5\ a} = 2\cdot 5^{-1}\cdot a^{-1}$$

3.2. Potencia con exponente cero

Como consecuencia de lo dicho en el apartado 3.1, puede ocurrir que se nos presente el cociente de dos potencias de la misma base y el mismo exponente, al averiguar la diferencia de exponentes, obtenemos una potencia de exponente cero:

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m\ -\ m} = a^0$$

Estamos en circunstancias semejantes a las del caso anterior, una potencia de exponente cero no tiene sentido, carece de significado «repetir la base como factor cero veces». Ahora bien, si dividimos dos potencias de la misma base y el mismo exponente, el cociente es igual a la unidad.

$$\frac{a^m}{a^m} = 1$$

Adoptamos, pues esta representación para las potencias de exponente cero

$$a^0 = 1$$

3.3. Potencia de exponente fraccionario

Ya hemos visto, que la raíz n-ésima de una potencia cuyo exponente es múltiplo de n se obtiene dividiendo el exponente por n. Así:

$$\sqrt[4]{a^8} = a^{8/4} = a^2$$

Es evidente, que cuando el exponente m de a no es divisible por el índice n, la expresión $a^{\frac{m}{n}}$ no tiene sentido. Tomamos como convenio, en que estos casos $a^{\frac{m}{n}}$ represente el radical $\sqrt[n]{a^m}$

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

Todo número afectado de exponente fraccionario representa un radical que tiene por índice el denominador de la fracción, y radicando la base de la potencia con exponente igual al numerador. Así

$$\sqrt[5]{a^3} = a^{3/5}; \sqrt{a} = a^{1/2}$$

Sacamos una consecuencia importante: las operaciones con radicales pueden hacerse utilizando las reglas estudiadas para el cálculo con potencias de exponente entero.

3.4. Potencias con exponentes racionales

Las operaciones con este tipo de potencias, no difieren, en esencia, de las estudiadas con anterioridad. Pensamos que es suficiente recordársela al alumno esquemáticamente:

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{pn}} = \sqrt[nq]{a^{mq+pn}} = a^{\frac{mq+pn}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$$

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^p = \sqrt[n]{a^m} \cdot a^p = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^{pn}} = \sqrt[n]{a^{m+pn}} = a^{\frac{m+pn}{n}} = a^{\frac{m}{n}+p}$$

$$\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{p/q}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[q]{a^p}} = \sqrt[nq]{a^{mq-pn}} = a^{\frac{mq-pn}{nq}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$$

$$\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{p}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[1]{a^p}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{a^{pn}}} = \sqrt[n]{a^{m-pn}} = a^{\frac{m-pn}{n}} = a^{\frac{m}{n}-p}$$

$$\frac{a^m}{a^{p/q}} = \frac{a^m}{\sqrt[q]{a^p}} = \frac{\sqrt[q]{a^{mq}}}{\sqrt[q]{a^p}} = \sqrt[q]{a^{mq-p}} = a^{\frac{mq-p}{q}} = a^{m-\frac{p}{q}}$$

$$(a^m)^{p/q} = \sqrt[q]{(a^m)^p} = \sqrt[q]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{q}} = a^{m\frac{p}{q}}$$

$$(a^{\frac{m}{n}})^p = (\sqrt[n]{a^m})^p = \sqrt[n]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{n}} = a^{\frac{m}{n}\cdot p}$$

$$(a^{\frac{m}{n}})^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{(a^{\frac{m}{n}})^{p/q}} = \frac{1}{\sqrt[q]{(a^{\frac{m}{n}})^p}} = \frac{1}{\sqrt[q]{a^{\frac{mp}{n}}}} = \frac{1}{a^{\frac{mp}{nq}}} = a^{-\frac{mp}{nq}}$$

NOTAS ACLARATORIAS Y COMPLEMENTARIAS

• A lo largo de este tema hemos hablado en varias ocasiones de la importancia que tiene la simplificación de radicales, esto supone expresar el radical en la forma más sencilla posible, aunque en los ejemplos y ejercicios realizados hemos simplificado los radicales y explicado el proceso seguido, conviene resumir el proceso seguido para simplificar radicales:

i) Conseguir que el índice del radical y los exponentes del radical no tengan ningún divisor común, sean primos entre si, para ello basta dividir el índice y los exponentes por su **m.c.d.**

ii) Sacar del radical todos los factores posibles.

iii) Conseguir que el radicando no contenga ninguna fracción, basta para ello multiplicar los dos términos de la fracción por un mismo número, de manera que el denominador de la misma resulte una potencia perfecta del grado que expresa el índice del radical.

• Vamos a generalizar el apartado 2.4.3. En este párrafo hemos tratado el caso en que el denominador es un binomio, se puede generalizar a otro tipo de expresiones, multiplicando el numerador y el denominador por la conjugada del denominador, conseguida siempre cambiando de signo el último monomio del denominador. Consideramos el siguiente caso:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{1\,(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2-2\sqrt{6}+3-5} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}{-2\sqrt{6}}$$

Ahora tenemos que racionalizar una fracción de las ya tratadas:

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}{-2\sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{6})}{(-2\sqrt{6})(\sqrt{6})} =$$

$$= \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{6})}{-2\cdot 6} = \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{6})}{-12}$$

CONCLUSIONES TEMA XVI

RADICAL		Llamamos radical a la raíz indicada de un número o de una expresión algebraica. Excluimos de la denominación de radicales a aquellas que tienen raíz exacta y aquellas que tienen índice par y el radicando negativo.
RAIZ DE UN PRODUCTO		$\sqrt[n]{a \cdot b \cdot c} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$
RAIZ DE UN COCIENTE		$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
POTENCIA DE UNA RAIZ		$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
RAIZ DE UNA RAIZ		$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$
EXTRACCION DE FACTORES DE UN RADICAL		Si alguno de los factores del radicando tiene por exponente un número múltiplo del índice, a este factor se le puede sacar fuera del radical, dividiendo su exponente por el índice.
OPERACIONES CON RADICALES	RADICALES SEMEJANTES	Llamamos radicales semejantes a aquellos que tienen el mismo radicando y el mismo índice.
	SUMA DE RADICALES	La suma algebraica de varios radicales semejantes puede expresarse sacando el radical como factor común de la suma algebraica de los coeficientes. Si los radicales no son semejantes dejamos la operación indicada.
	PRODUCTO Y COCIENTE DE RADICALES	Para multiplicar o dividir varios radicales, cuando tienen el mismo índice, se multiplican o dividen los radicandos, resultando otro radical del mismo índice. Si los radicales no tienen índice común se reducen previamente a índice común y se procede como acabamos de decir.
RACIONALIZACION DE DENOMINADORES	DENOMINADOR ES UN MONOMIO	En general $\frac{a}{\sqrt[m]{b^n}} = \frac{a\sqrt[m]{b^{m-n}}}{b}$ Si el denominador es un monomio con una raíz cuadrada se multiplica numerador y denominador por la raíz que aparece en el denominador.
	DENOMINADOR ES UN BINOMIO	Multiplicamos el numerador y denominador de la fracción a racionalizar por el binomio conjugado del denominador.

POTENCIACION	POTENCIA DE EXPONENTE ENTERO NEGATIVO	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
	POTENCIA CON EXPONENTE CERO	$a^0 = 1$
	POTENCIA DE EXPONENTE FRACCIONARIO	$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$
	POTENCIAS CON EXPONENTES RACIONALES	$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$
		$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^p = a^{\frac{m}{n}+p}$
		$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$
		$a^{\frac{m}{n}} : a^p = a^{\frac{m}{n}-p}$
		$a^m : a^{\frac{p}{q}} = a^{m-\frac{p}{q}}$
		$(a^m)^{\frac{p}{q}} = a^{m\frac{p}{q}}$
		$(a^{\frac{m}{n}})^p = a^{\frac{m}{n}\cdot p}$
		$(a^{\frac{m}{n}})^{-\frac{p}{q}} = a^{-\frac{mp}{nq}}$

EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

Efectuar las siguientes operaciones:

1. $\sqrt{3\,a^2 + \sqrt{6\,a^4 - \sqrt{25\,a^8}}}$

2. $\left(\sqrt{a\,\sqrt{b\,\sqrt{c\,\sqrt{d}}}}\right)^{32}$

Introducir el coeficiente dentro del radical:

3. $\frac{1-a}{a}\sqrt{\frac{1-a}{a}}$

4. $3\,a\sqrt{\frac{1}{27\,a^3}}$

5. $(3\,a-1)^2\,\sqrt{3\,a-1}$

Reducir a índice común los siguientes radicales:

6. $\sqrt[3]{n^2},\ \sqrt[4]{n^3},\ \sqrt[6]{n^5}$

7. $(a+b)^2,\sqrt[3]{a^2}$

Efectuar las siguientes operaciones:

8. $\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{6}}$

9. $\sqrt{18\ y} - \sqrt{\frac{y}{2}} + \sqrt{\frac{y}{8}}$

10. $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[5]{a}$

11. $3\sqrt{a}\ (\sqrt{a} + \sqrt{b}\ )$

12. $\sqrt{a^3\ b} \cdot \sqrt[3]{2\ a^2\ b^2}\ \ a\ b$

13. $\sqrt[3]{2\ a^2} \cdot 3\sqrt[4]{a^3} \cdot 5\sqrt[6]{16\ a^5}$

14. $\sqrt{12} : \sqrt{18}$

15. $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt[3]{12}}$

16. $\dfrac{\sqrt{a - b}}{\sqrt{a + b}} : \dfrac{\sqrt{a + b}}{\sqrt{a - b}}$

17 $\left(3\sqrt{2} - 2\sqrt{8} + 7\sqrt[4]{4}\right) : 2\sqrt{2}$

18. $\dfrac{\dfrac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[6]{a}} : \sqrt[8]{a}}{\dfrac{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[9]{a}}{\sqrt{a}}}$

Racionalizar los denominadores de las siguientes fracciones:

19. $\dfrac{3\ x^2\ y}{\sqrt[5]{(x\ y^3)}}$

20. $\dfrac{3\sqrt{18}}{2\sqrt{3}}$

21. $\dfrac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$

22. $\dfrac{\sqrt{a+b}+\sqrt{c}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{c}}$

23. $\dfrac{6\sqrt{2}+5\sqrt{7}}{5\sqrt{2}-6\sqrt{7}}$

24. *Simplificar los siguientes radicales:*

$\sqrt{200}$, $\sqrt{72}$

$\sqrt{3m^5n}$, $\sqrt{8x^2y^7}$, $\frac{3}{4}\sqrt{32x^2yz}$

$\sqrt{18+9\sqrt{2}}$,

$b\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}$

25. *Escribir sin denominadores las expresiones siguientes:*

$\frac{2x^2}{y}$, $2y^2+5y-2+\frac{3}{y}-\frac{5}{y^2}$

26. *Emplear exponentes fraccionarios en lugar de radicales:*

$9\sqrt[3]{x^7y^4}$, $\sqrt{(a+b)^3}$, $\sqrt[3]{m^2\sqrt{x^3}}$

27. *Hallar el valor numérico de las siguientes expresiones:*

$16^{\frac{1}{2}}$, $25^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{1}{2}}-(-27)^{\frac{2}{3}}$, $4x^0-(7x)^0$

28. *Efectuar las siguientes operaciones indicadas:*

$x^{a+2}:x^{a-2}$

$[(m+n)^{\frac{-1}{3}}]^{-2}$

$(a^{-2}+b^{-2})\,a^{-1}b^{-1}$

$(9m-6m^{\frac{1}{2}}+12):3m^{\frac{1}{2}}$

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. Efectuando ordenadamente las operaciones:

$$\sqrt{3\,a^2 + \sqrt{6\,a^4 - \sqrt{25\,a^8}}} = \sqrt{3\,a^2 + \sqrt{6\,a^4 - 5\,a^4}} =$$
$$= \sqrt{3\,a^2 + a^2} = \sqrt{4\,a^2} = 2a$$

2. $$\left(\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{c\sqrt{d}}}}\right)^{32} = \left(\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{c\,d^{1/2}}}}\right)^{32} = \left(\sqrt{a\sqrt{b\,c^{1/2}\,d^{1/4}}}\right)^{32}$$
$$= \left(\sqrt{a\,b^{1/2}\,c^{1/4}\,d^{1/8}}\right)^{32} = \sqrt{(a\,b^{1/2}\,c^{1/4}\,d^{1/8})^{32}} = a^{16}\,b^8\,c^4\,d^2$$

3. $$\frac{1-a}{a}\sqrt{\frac{1-a}{a}} = \sqrt{\frac{(1-a)^3}{a^3}}$$

4. $$3a\sqrt{\frac{1}{27\,a^3}} = \sqrt{\frac{9\,a^2}{27\,a^3}} = \sqrt{\frac{1}{3\,a}}$$

5. $$(3a-1)^2\ \sqrt{3a-1} = \sqrt{(3a-1)^5}$$

6. m.c.m. (3, 4, 6) = 12
$$\sqrt[12]{n^8}\ ,\ \sqrt[12]{n^9}\ ,\ \sqrt[12]{n^{10}}$$

7. Cuando no aparece el radical podemos considerar un índice unidad
$$\sqrt[1]{(a+b)^2}\ ,\ \sqrt[3]{a^2}\ ;\ \sqrt[3]{(a+b)^6}\ ,\ \sqrt[3]{a^2}$$

8. Como la raíz de un cociente es el cociente de las raíces:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{2} +$$

$$+ \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{2\sqrt{6} + 3\sqrt{6} + \sqrt{6}}{6} = \frac{6\sqrt{6}}{6} = \sqrt{6}$$

9. $$\sqrt{18\,y} - \sqrt{\frac{y}{2}} + \sqrt{\frac{y}{8}} = 3\sqrt{2\,y} - \frac{\sqrt{y}\cdot\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{y}\cdot\sqrt{8}}{8} =$$

$$= 3\cdot\sqrt{2\,y} - \frac{\sqrt{2\,y}}{2} + \frac{2\cdot\sqrt{2\,y}}{8} = 3\sqrt{2\,y} - \frac{\sqrt{2\,y}}{2} + \frac{\sqrt{2\,y}}{4} =$$

$$= \frac{12\sqrt{2\,y} - 2\sqrt{2\,y} + \sqrt{2\,y}}{4} = \frac{11\sqrt{2\,y}}{4}$$

10. $$\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[5]{a} = \sqrt[15]{a^5}\cdot\sqrt[15]{a^3} = \sqrt[15]{a^8}$$

11. $$3\sqrt{a}\,(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = 3\sqrt{a}\cdot\sqrt{a} + 3\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = 3\,a + 3\sqrt{ab}$$

12. $$\sqrt{a^3\,b}\cdot\sqrt[3]{2\,a^2\,b^2}\cdot a\,b = \sqrt[6]{a^9\,b^3}\cdot\sqrt[6]{4\,a^4\,b^4}\cdot\sqrt[6]{a^6\,b^6} =$$

$$= \sqrt[6]{a^9\,b^3\cdot 4\,a^4\,b^4\cdot a^6\,b^6} = \sqrt[6]{4\,a^{19}\cdot b^{13}}$$

13. $$\sqrt[3]{2\,a^2}\cdot 3\sqrt[4]{a^3}\cdot 5\sqrt[6]{16\,a^5}$$

m.c.m. (3, 4, 6) = 12

$$\sqrt[12]{2^4\cdot a^8}\cdot 3\sqrt[12]{a^9}\cdot 5\sqrt[12]{16^2\,a^{10}} = 15\cdot\sqrt[12]{2^{12}\cdot a^{27}} =$$

$$= 15\cdot 2\cdot a^2\sqrt[12]{a^3} = 30\,a^2\sqrt[12]{a^3}$$

14. $$\sqrt{12} : \sqrt{18} = \sqrt{2^2\cdot 3} : \sqrt{3^2\cdot 2} = 2\sqrt{3} : 3\sqrt{2} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

15. $$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt[3]{12}} = \frac{\sqrt{12}\cdot\sqrt[3]{12^2}}{12} = \frac{\sqrt[6]{12^3\cdot 12^4}}{12} = \frac{12\sqrt[6]{12}}{12} = \sqrt[6]{12}$$

16. $$\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}} : \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}} = \frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}}\cdot\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}} = \frac{\sqrt{(a-b)^2}}{\sqrt{(a+b)^2}} = \frac{a-b}{a+b}$$

17. Podemos reducir primero términos semejantes:

$$(3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 7\sqrt{2}) : 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2} : 2\sqrt{2} = 3$$

puesto que $2\sqrt{8} = 2 \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

$$\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt{2}$$

18. Hacemos por separado las operaciones indicadas en el numerador y en el denominador.

$$\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[6]{a}} : \sqrt[6]{a} = \sqrt[12]{\frac{a^3}{a^2}} : \sqrt[8]{a} = \sqrt[12]{a} : \sqrt[8]{a} = \sqrt[24]{a^2 : a^3} = \sqrt[24]{\frac{1}{a}} \quad \text{numerador}$$

$$\frac{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[9]{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt[9]{a^3 \cdot a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt[9]{a^4}}{\sqrt{a}} = \sqrt[18]{\frac{a^8}{a^9}} = \sqrt[18]{\frac{1}{a}} \quad \text{denominador}$$

Efectuando ahora el cociente entre los dos resultados:

$$\frac{\sqrt[24]{\frac{1}{a}}}{\sqrt[18]{\frac{1}{a}}} = \frac{\sqrt[72]{\left(\frac{1}{a}\right)^3}}{\sqrt[72]{\left(\frac{1}{a}\right)^4}} = \sqrt[72]{\frac{1/a^3}{1/a^4}} = \sqrt[72]{\frac{a^4}{a^3}} = \sqrt[72]{a}$$

19. $$\frac{3x^2y}{\sqrt[5]{x\ y^3}} = \frac{3x^2y\sqrt[5]{(x\ y^3)^4}}{x\ y^3} = \frac{3x\sqrt[5]{x^4 \cdot y^{12}}}{y^2} = \frac{3x\ y^2\sqrt[5]{x^4\ y^2}}{y^2} = 3x\sqrt[5]{x^4\ y^2}$$

20. $$\frac{3\sqrt{18}}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{18} \cdot \sqrt{3}}{6} = \frac{3\sqrt{3^3 \cdot 2}}{6} = \frac{3 \cdot 3\sqrt{6}}{6} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$$

21. $$\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} = \frac{(1+\sqrt{x})\ (1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})\ (1+\sqrt{x})} = \frac{(1+\sqrt{x})^2}{1-x} = \frac{1+x+2\sqrt{x}}{1-x}$$

22. $$\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{c}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{c}} = \frac{(\sqrt{a+b}+\sqrt{c})\ (\sqrt{a+b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{a+b}-\sqrt{c})\ (\sqrt{a+b}+\sqrt{c})} =$$

$$= \frac{(\sqrt{a+b}+\sqrt{c})^2}{a+b-c} = \frac{a+b+c+2\sqrt{(a+b)\cdot c}}{a+b-c}$$

23. $$\frac{6\sqrt{2}+5\sqrt{7}}{5\sqrt{2}-6\sqrt{7}} = \frac{(6\sqrt{2}+5\sqrt{7})\ (5\sqrt{2}+6\sqrt{7})}{(5\sqrt{2}-6\sqrt{7})\ (5\sqrt{2}+6\sqrt{7})}$$

$$= \frac{30 \cdot 2 + 36\sqrt{14} + 25\sqrt{14} + 210}{50 - 252} = -\frac{270 + 61\sqrt{14}}{202}$$

24. $\sqrt{200} = \sqrt{2^3 \cdot 5^2} = 10\sqrt{2}$

$\sqrt{72} = \sqrt{2^3 \cdot 3^2} = 6\sqrt{2}$

$\sqrt{3\ m^5\ n} = m^2\sqrt{3\ m\ n}$

$\sqrt{8\ x^2\ y^7} = 2\ x\ y^3 \cdot \sqrt{2\ y}$

$\frac{3}{4}\sqrt{32\ x^2\ y\ z} = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{2^5 \cdot x^2\ y \cdot z} = \frac{3 \cdot 4\ x}{4}\sqrt{2\ y\ z} = 3\ x\sqrt{2\ y\ z}$

$\sqrt{18 + 9\sqrt{2}} = \sqrt{9 \cdot 2 + 9\sqrt{2}} = \sqrt{9\left(2 + \sqrt{2}\right)} = 3\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

$b\sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} = b\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{b^2}} = \frac{b}{b}\sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{b^2 - a^2}$

25. $\frac{2\ x^2}{y} = 2\ x^2\ y^{-1}$

$2\ y^2 + 5\ y - 2 + \frac{3}{y} - \frac{5}{y^2} = 2\ y^2 + 5\ y - 2 + 3\ y^{-1} - 5\ y^{-2}$

26.

$9 \cdot \sqrt[3]{x^7\ y^4} = 9\ (x^7\ y^4)^{1/3} = 9\ x^{7/3}\ y^{4/3}$

$\sqrt{(a + b)^3} = (a + b)^{3/2}$

$\sqrt[3]{m^2\sqrt{x^3}} = \sqrt[3]{m^2\ x^{3/2}} = (m^2\ x^{3/2})^{1/3} = m^{2/3} \cdot x^{1/2}$

27.

$16^{1/2} = \sqrt{16} = \pm 4$

$25^{3/2} - 1^{1/2} - (-27)^{2/3} = \sqrt{25^3} - \sqrt{1} - \sqrt[3]{(-27)^2} = 5^3 - 1 - 3^2 =$

$= 125 - 1 - 9 = 115$

$4\ x^0 - (7\ x)^0 = 4 - 1 = 3$

28.

$\frac{x^{a+2}}{x^{a-2}} = \frac{x^a \cdot x^2}{\frac{x^a}{x^2}} = \frac{x^a \cdot x^4}{x^a} = x^4$

$[(m + n)^{-1/3}]^{-2} = (m + n)^{2/3} = \sqrt[3]{(m + n)^2}$

$$(a^{-2} + b^{-2})\, a^{-1} b^{-1} = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b} = \frac{b^2 + a^2}{a^2 b^2}\cdot\frac{1}{a\, b} = \frac{b^2 + a^2}{a^3 b^3}$$

$$(9\ m - 6\ m^{1/2} + 12) : 3\ m^{1/2} = \frac{9m - 6\sqrt{m} + 12}{3\sqrt{m}} = \frac{\sqrt{m}\,(9\ m - 6\sqrt{m} + 12)}{3m} =$$

$$= \frac{9\ m\sqrt{m} - 6\ m + 12\sqrt{m}}{3\ m} = 3\sqrt{m} - 2 + \frac{4\sqrt{m}}{m}$$

TEMA XVII

ECUACION DE SEGUNDO GRADO

ESQUEMA/RESUMEN

1. Ecuación de segundo grado con una incógnita.
   - 1.1. Resolución de las ecuaciones incompletas.
     - 1.1.1. Ecuación de la forma a $x^2 + c = 0$.
     - 1.1.2. Ecuación de la forma a $x^2 + b\,x = 0$.
     - 1.1.3. Ecuación de la forma a $x^2 = 0$.
   - 1.2. Resolución de la ecuación general de segundo grado.
     - 1.2.1. Discusión de la ecuación de segundo grado.
   - 1.3. Propiedades de las soluciones de una ecuación de segundo grado.
     - 1.3.1. Suma de las raices de una ecuación de segundo grado.
     - 1.3.2. Producto de las raices de una ecuación de segundo grado.
     - 1.3.3. Determinación de una ecuación de segundo grado.
     - 1.3.4. Formación de una ecuación de segundo grado, conocidas sus raices.

2. Trinomio de segundo grado.
   - 2.1. Representación gráfica.
   - 2.2. Resolución gráfica de una ecuación de segundo grado.

3. Ecuaciones reducibles a ecuaciones de segundo grado.
   - 3.1. Ecuaciones bicuadradas.
   - 3.2. Ecuaciones binomias.
   - 3.3. Ecuaciones trinomias.
   - 3.4. Ecuaciones irracionales.
   - 3.5. Ecuaciones que pueden resolverse con una incógnita auxiliar.

4. Sistemas de ecuaciones de segundo grado.

   4.1. Sistema formado por una ecuación lineal y otra de segundo grado.

   4.2. Sistemas de dos ecuaciones de segundo grado.

   4.3. Problemas de segundo grado.

5. Notas aclaratorias y complementarias.

INSTRUCCIONES PARA EL ESTUDIO DEL TEMA

Terminamos esta Unidad Didáctica estudiando las ecuaciones de segundo grado, seguimos un procedimiento semejante al presentado en otras ocasiones, procurando realizar detalladamente gran cantidad de ejemplos y ejercicios para ayudar la labor de aprendizaje de nuestros alumnos.

Al mismo tiempo de que insistimos en el carácter eminentemente práctico de la Unidad, que ahora terminaremos, queremos poner de manifiesto la importancia que supone adquirir una mínima soltura en las operaciones matemáticas, incluso para los alumnos que han escogido una carrera de Letras.

1. ECUACION DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCOGNITA

Toda ecuación completa de segundo grado con una incógnita, consta una vez reducidos los términos semejantes, de tres términos: uno con la incógnita elevada a la segunda potencia, otro con la incógnita elevada a primer grado y, por último, un término independiente de la incógnita.

Se acostumbra a escribirla, de manera que todos los términos aparezcan en el primer miembro y ordenados respecto de las potencias decrecientes de la incógnita. La ecuación escrita asi, constituye la *forma general.*

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

a, b y *c* son los coeficientes numéricos y *x* la incógnita.

Esto no quiere decir que toda ecuación de segundo grado aparece siempre de esta forma, puede ocurrir que falte alguno de los términos de este trinomio, en estos casos la ecuación recibe el nombre de *incompleta.* Es evidente, que existen tres formas de ecuación incompleta de segundo grado:

$$a\,x^2 + c = 0 \quad ; \quad a\,x^2 + b\,x = 0 \quad ; \quad a\,x^2 = 0$$

Si la ecuación es de segundo grado, no podrá ser nulo el coeficiente *a,* de x^2. Además, supondremos siempre que este coeficiente es positivo, si fuera negativo, se cambiará el signo de todos los términos, con lo cual obtendremos una ecuación equivalente con el coeficiente positivo.

Son ecuaciones de segundo grado.

$$0 = 2\,x^2 - 3\,x + 1\,; \quad x^2 - 3 = 0\,; \quad x^2 + 2\,x = 0\,; \quad 7\,x^2 = 0$$

$$x^2\sqrt{2} - 3x - \frac{1}{2} = 0\,; \quad \frac{2\,x^2}{3} - x - \frac{1}{4} = 0$$

1.1. Resolución de las ecuaciones incompletas

La resolución de las ecuaciones incompletas se puede deducir a partir de la resolución de la ecuación general, nosotros optamos por estudiar en primer lugar las ecuaciones incompletas, sin perjuicio de que posteriormente deduzcamos su resolución de la solución general.

1.1.1. Ecuación de la forma $a\,x^2 + c = 0$

Para resolver esta ecuación, pasamos c al segundo miembro y dividimos por a los dos miembros de la ecuación:

$$a\,x^2 + c = 0$$
$$a\,x^2 = -\,c$$

$$\frac{a\,x^2}{a} = -\frac{c}{a}\;;\; x^2 = -\frac{c}{a}\;;\; x = \pm\sqrt{\frac{-\,c}{a}}$$

siempre que $-\frac{c}{a}$ sea positivo (esto si c es negativo, $c < 0$) la ecuación $a\,x^2 + c = 0$ tiene dos soluciones o raices iguales y de signo contrario.

$$x_1 = +\sqrt{\frac{-\,c}{a}} \text{ y } x_2 = -\sqrt{\frac{-\,c}{a}}$$

Resolver la ecuación incompleta: $4\,x^2 - 25 = 0$

Aplicando la ecuación que acabamos de deducir:

$$x = \pm\sqrt{\frac{-\,c}{a}} = \pm\sqrt{\frac{25}{4}} = \pm\frac{5}{2}$$

las dos soluciones son:

$$x_1 = \frac{5}{2} \text{ y } x_2 = -\frac{5}{2}$$

Si el cociente $\frac{-c}{a}$ es negativo, diremos, por ahora, que la ecuación carece de solución o carece de raices, o tiene raices imaginarias. Si tratamos de resolver la ecuación $x^2 + 9 = 0$

Obtenemos:

$$x = \pm\sqrt{-9}$$

decimos que la ecuación dada carece de raíces o que sus raices son imaginarias.

1.1.2. Ecuación de la forma $a\,x^2 + b\,x = 0$

Si sacamos x factor común, esta ecuación puede escribirse también así:

$$x\,(a\,x + b) = 0$$

El primer miembro de esta ecuación es ahora de dos factores, x y a x + b. Para que un producto se anule, debe anularse alguno de los factores, en este caso, se debe verificar:

$$x_1 = 0 \text{ ó } a\ x + b = 0 \quad \text{luego } x_2 = -\frac{b}{a}$$

Las dos soluciones de una ecuación incompleta de la forma $a\ x^2 + b\ x = 0$ serán:

$$x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{b}{a}$$

Sea la ecuación $3\ x^2 - 5\ x = 0$; para resolverla podemos escribirla así: $x\ (3\ x - 5) = 0$, por lo tanto, sus soluciones son

$$x_1 = 0,\ x_2 = \frac{5}{3}$$

1.1.3. Ecuación de la forma $a\ x^2 = 0$

No siendo nulo el factor a, habrá de serlo x. Luego la única solución es $x_1 = x_2 = 0$

1.2. Resolución de la ecuación general de segundo grado

Sabemos que la forma general de la ecuación completa de segundo grado es:

$$a\ x^2 + b\ x + c = 0$$

Vamos a obtener una fórmula general que nos permita hallar directamente las soluciones o raíces de la misma, para ello realizamos una serie de transformaciones en esta ecuación:

Pasamos c al segundo miembro:

$$a\ x^2 + b\ x = -\ c$$

Multiplicamos por 4 a los dos miembros de esta ecuación:

$$4\ a^2\ x^2 + 4\ a\ b\ x = -\ 4\ a\ c$$

Sumamos b^2 a los dos miembros de la ecuación:

$$4\ a^2\ x^2 + 4\ a\ b\ x + b^2 = b^2 - 4\ a\ c$$

El primer miembro de esta ecuación es el cuadrado del binomio 2 a x + b. Por tanto, la ecuación anterior la podemos escribir:

$$(2\ a\ x + b)^2 = b^2 - 4\ a\ c$$

Extrayendo la raíz cuadrada de los dos miembros:

$$\sqrt{(2\ a\ x + b)^2} = \pm\ \sqrt{b^2 - 4\ a\ c}$$

$$2\ a\ x + b = \pm\ \sqrt{b^2 - 4\ a\ c}$$

trasponiendo b,

$$2\,a\,x = -\,b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}$$

despejemos x dividiendo por 2 a, obteniendo finalmente:

$$x = \frac{-\,b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$$

Hay, por tanto, dos raices o soluciones que podemos expresar asi:

$$x_1 = \frac{-\,b + \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}\,,\; x_2 = \frac{-\,b - \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$$

Veamos, algunas aplicaciones. Se trata de resolver la ecuación:

$$2\,x^2 - 7\,x + 3 = 0$$

Vamos a aplicar la fórmula obtenida antes:

$$x = \frac{-\,b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$$

teniendo presente que: a = 2, b = – 7, c = 3, sustituyendo resulta:

$$x = \frac{-\,(-\,7) \pm \sqrt{(-\,7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4} = \begin{cases} \dfrac{7 + 5}{4} = 3 \\ \dfrac{7 - 5}{4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

las soluciones de esta ecuación son $x_1 = 3$ y $x_2 = \frac{1}{2}$

Tratamos de resolver, ahora, la ecuación:

$$\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x + 1} = \frac{5}{12}$$

Primero realizamos una serie de transformaciones. Consiguiendo que la ecuación adopte la forma general, se obtiene:

$$12\,(x + 1) + 12\,(x - 1) = 5\,(x^2 - 1)$$
$$12\,x + 12 + 12\,x - 12 = 5\,x^2 - 5$$
$$5\,x^2 - 24\,x - 5 = 0$$

ahora podemos aplicar la fórmula general, teniendo presente que en este caso, a = 5, b = – 24, c = – 5

$$x = \frac{-\,b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$$

$$x = \frac{-(-24) \pm \sqrt{(-24)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-5)}}{2 \cdot 5} = \frac{24 \pm \sqrt{24^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-5)}}{10}$$

$$x = \frac{24 \pm \sqrt{576 + 100}}{10} = \frac{24 \pm \sqrt{676}}{10} = \begin{cases} \frac{24 + 26}{10} = 5 \\ \frac{24 - 26}{10} = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

Las soluciones de esta ecuación son $x_1 = 5 \quad x_2 = -\frac{1}{5}$

1.2.1. Discusión de la ecuación de segundo grado

Hemos visto que la ecuación de segundo grado $a x^2 + b x + c = 0$ tiene dos soluciones o raices, dadas por la expresión:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 a c}}{2 a}$$

donde se toma el signo + para una raíz y el signo – para la otra.

Para que la raiz cuadrada que figura en la fórmula tenga sentido, es necesario que la expresión $b^2 - 4 a c$ sea positiva o nula.

Si es positiva, la ecuación tiene dos raices.

Si $b^2 - 4 a c = 0$, también la raiz cuadrada es nula y las soluciones obtenidas con el signo + y con el signo –, son iguales.

Si $b^2 - 4 a c < 0$, no existe raiz cuadrada de este número (puesto que los cuadrados siempre son positivos).

La expresión $b^2 - 4 a c$ se llama discriminante de la ecuación de segundo grado y lo representamos por

$$\Delta = b^2 - 4 a c$$

Resumimos lo dicho en este apartado:

$$\Delta = b^2 - 4 a c \begin{cases} \Delta > 0 \text{ la ecuación tiene dos soluciones distintas} \\ \Delta = 0 \text{ la ecuación tiene una única solución y ésta es doble} \\ \Delta < 0 \text{ la ecuación no tiene ninguna solución} \end{cases}$$

Como consecuencia, no hace falta resolver una ecuación de segundo grado para saber el número y tipo de soluciones que tiene, basta estudiar su discriminante.

Vamos a estudiar las soluciones de algunas ecuaciones, calculando su discriminante:

$$3 x^2 + 5 x - 8 = 0$$

Su discriminante es $\Delta = b^2 - 4 a c = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-8) = 25 + 96 = 121$
por tanto, $\Delta > 0$

Esta ecuación tiene dos soluciones distintas.

Consideremos la ecuación: $x^2 + 2x + 5 = 0$

calculamos su discriminante: $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 4 - 20 = -16$

luego $\Delta < 0$. Como consecuencia, esta ecuación no tiene ninguna solución.

Por último, supongamos la ecuación $27x^2 + 18x + 3 = 0$, podemos comprobar que solamente tiene una solución, porque su discriminante es nulo.

$$\Delta = 18^2 - 4 \cdot 27 \cdot 3 = 324 - 324 = 0$$

Cuando una ecuación de segundo grado tiene una única solución, se dice que es una solución doble.

Ejercicios y ejemplos

1. Resolver la ecuación: $\frac{1}{x} + \frac{x}{2} = \frac{3}{x}$

El m.c.m. de los denominadores es $2x$, quitando denominadores resulta:

$$2 + x^2 = 6$$

$$x^2 - 4 = 0$$

luego $x^2 = 4$

$$x = \pm \sqrt{4} = \pm 2$$

Las soluciones de esta ecuación son: $x_1 = +2$ y $x_2 = -2$

2. Resolver:

$$1 - \frac{1}{x} = \frac{x - 1}{2}$$

También en este caso el m.c.m. de los denominadores es $2x$:

$$2x - 2 = x^2 - x$$

escribiéndola ordenadamente, obtenemos la forma general de la ecuación de segundo grado:

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

para resolverla, utilizamos la expresión:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

teniendo presente que $a = 1$, $b = -3$ y $c = 2$.

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} =$$

$$= \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = 2 \\ \frac{3-1}{2} = 1 \end{cases}$$

3. Resolver: $0{,}001\ x^2 = 10$

Es una ecuación incompleta, según lo visto, para resolverla basta despejar x:

$$x^2 = \frac{10}{0{,}001} = 10.000$$

$$x = \pm \sqrt{10.000} = \pm 100$$

4. Resolver la ecuación: $3\ (x + 1) - x\ (x - 1) = 4\ x$

Realizando las operaciones indicadas obtenemos una ecuación de segundo grado incompleta:

$$3\ x + 3 - x^2 + x = 4\ x$$

$$4\ x + 3 - x^2 - 4\ x = 0$$

$$3 - x^2 = 0$$

sus soluciones las averiguamos del modo acostumbrado:

$$x^2 = 3$$

$$x = \pm \sqrt{3}$$

Las dos soluciones son $x_1 = \sqrt{3}$ y $x_2 = -\sqrt{3}$

5. Dada la ecuación $27\ x^2 + 18\ x + c = 0$, determinar c para que la ecuación tenga una sola solución.

Este tipo de ejercicios es muy habitual, averiguar un coeficiente de una ecuación de segundo grado para que sus soluciones sean distintas o para que tenga una solución doble. Ambos casos se resuelven de la misma manera, utilizando el discriminante de la ecuación e imponiéndole la condición dada en el problema.

Así en este caso, como la ecuación ha de tener una sola solución, es necesario que $\Delta = 0$

$$18^2 - 4 \cdot 27 \cdot c = 0$$

tenemos una ecuación lineal con una sola incógnita que es c:

$$324 - 108\ c = 0$$

$$c = \frac{324}{108} = 3$$

6. Resolver la ecuación: $\frac{x}{5} + \frac{30}{x} = 5$

Quitamos denominadores:

$$x^2 + 150 = 25\,x$$

ordenamos, para expresarla en la forma general:

$$x^2 - 25\,x + 150 = 0$$

su solución viene dada por la expresión: $x = \frac{-\,b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$

siendo $a = 1$, $b = -25$ y $c = 150$

$$x = \frac{-(-25) \pm \sqrt{(-25)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 150}}{2 \cdot 1} = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 600}}{2} = \frac{25 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$= \frac{25 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{25 + 5}{2} = 15 \\ \frac{25 - 5}{2} = 10 \end{cases}$$

1.3. Propiedades de las soluciones de una ecuación de segundo grado

1.3.1. Suma de las raíces de una ecuación de segundo grado

Las soluciones o raíces de la ecuación general:

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

pueden expresarse así:

$$x_1 = -\frac{b}{2\,a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$$

$$x_2 = -\frac{b}{2\,a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$$

Sumando miembro a miembro estas igualdades, obtenemos:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{2\,a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a} - \frac{b}{2\,a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$$

los términos que contienen radicales son opuestos, por tanto, desaparecen:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{b}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

Podemos enunciar la siguiente propiedad: La suma de las raíces de una ecuación de segundo grado es igual al coeficiente de x, cambiado de signo, dividido por el coeficiente de x^2

Veamos algunos casos particulares: Sea la ecuación: $x^2 - 7x + 12 = 0$ la suma de sus raíces es:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{7}{1} = 7$$

se puede comprobar que esta suma es cierta, resolviendo la ecuación y sumando sus soluciones. En efecto:

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{2} =$$

$$= \frac{7 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{7+1}{2} = 4 \\ \frac{7-1}{2} = 3 \end{cases}$$

vemos que $x_1 = 4$ y $x_2 = 3$, luego $x_1 + x_2 = 4 + 3 = 7$

suma que coincide con la obtenida indirectamente, sin necesidad de resolver la ecuación.

Calculemos la suma de las raíces de la ecuación: $4x^2 + 20x + 21 = 0$, como $b = 20$ y $a = 4$, resulta:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{20}{4} = -5$$

1.3.2. Producto de las raíces de una ecuación de segundo grado

Hemos visto en el apartado anterior, que las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, se pueden expresar así:

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Calculamos, en esta ocasión, el producto de ambas soluciones:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \cdot \left(-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$$

como ya vimos, en otra parte de esta Unidad, este producto es una suma por una diferencia, siendo, entonces, equivalente a la diferencia de cuadrados:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

operando estas dos fracciones, obtenemos:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Obtenemos así otra importante propiedad: El producto de las raíces de la ecuación de segundo grado es igual al término independiente, dividido por el coeficiente de x^2.

Queremos calcular el producto de las soluciones de la ecuación:

$$2x^2 - 5x - 3 = 0$$

como $a = 2$ y $c = -3$, el producto buscado será:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-3}{2}$$

se puede comprobar que este resultado es cierto, calculando las raíces de la ecuación y efectuando su producto. Averiguamos estas soluciones por el procedimiento ya conocido:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{4} =$$

$$= \frac{5 \pm 7}{4} = \begin{cases} \frac{5 + 7}{4} = 3 \\ \frac{5 - 7}{4} = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

luego $x_1 = 3$ y $x_2 = -\frac{1}{2}$, por lo tanto,

$$x_1 \cdot x_2 = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

Resultado que coincide con el calculado antes.

1.3.3. Determinación de una ecuación de segundo grado

Conocida la suma y el producto de las raíces de una ecuación de segundo grado se puede determinar dicha ecuación.

Si dividimos por a los dos miembros de la ecuación:

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

Obtenemos otra ecuación equivalente a la de partida:

$$x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{c}{a} = 0^*$$

Recordando los párrafos 1.3.1 y 1.3.2, podemos escribir:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{luego} \quad -(x_1 + x_2) = \frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Sustituyendo, obtenemos:

$$x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

como es fácil de ver, esta ecuación la hemos conseguido sustituyendo $\frac{b}{a}$ por $-(x_1 + x_2)$ y $\frac{c}{a}$ por $x_1 \cdot x_2$ en la ecuación*.

Si llamamos $s = x_1 + x_2$ y $p = x_1 \cdot x_2$ la ecuación anterior la escribimos:

$$x^2 - s\,x + p = 0$$

que es la forma general de la ecuación de segundo grado en función de la suma y el producto de sus raíces.

Estudiemos un ejemplo, tratamos de escribir una ecuación de segundo grado, sabiendo que la suma de sus raíces es $-\frac{3}{4}$ y el producto $\frac{5}{2}$.

La ecuación es fácil de escribir pues $s = -\frac{3}{4}$ y $p = \frac{5}{2}$ luego:

$$x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{5}{2} = 0$$

quitando denominadores:

$$4\,x^2 + 3\,x + 10 = 0$$

Se nos puede presentar otro caso semejante al acabado de considerar, si en lugar de la suma de las raíces conocemos la diferencia. Basta considerar la identidad:

$$(x_1 + x_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + 4\,x_1 \cdot x_2$$

fácilmente comprobable. Abreviadamente la podemos escribir:

$$S^2 = d^2 + 4\,p$$

siendo $S = x_1 + x_2$, $d = x_1 - x_2$ y $p = x_1 \cdot x_2$

De esta manera conociendo la diferencia y el producto de las raíces de una ecuación de segundo grado, pasamos a la suma y al producto, estando en el caso expuesto en primer lugar.

A modo de aplicación determinamos la ecuación de segundo grado en la que la diferencia de sus raíces es 5 y el producto — 6

Tenemos:

$$s^2 = d^2 + 4\,p = 5^2 + 4 \cdot (-6) = 25 - 24 = 1$$

$$s = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

luego ya conocemos la suma y el producto, utilizando la forma general:

$$x^2 - s\,x + p = 0$$

Obtenemos dos ecuaciones, según tomemos $s = +1$ ó $s = -1$

$$x^2 - x - 6 = 0 \qquad x^2 + x - 6 = 0$$

ambas son solución del problema como es fácil de comprobar.

1.3.4. Formación de una ecuación de segundo grado, conocidas sus raíces

Si descomponemos en factores el trinomio que aparece en el primer miembro de la ecuación:

$$x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1 \cdot x_2 = 0^*$$

tenemos:

$$(x - x_1)\,(x - x_2) = 0$$

esta expresión constituye la forma general de la ecuación de segundo grado en función de sus raíces.

No hace falta insistir en que las ecuaciones:

$$x^2 - s\,x + p = 0 \text{ y } (x - x_1)\,(x - x_2) = 0$$

son equivalentes.

Analicemos algunos ejemplos:

Formar la ecuación cuyas raíces son $x_1 = \frac{3}{4}$ y $x_2 = -\frac{1}{2}$

En primer lugar, utilizamos la expresión $x^2 - s\,x + p = 0$

como

$$s = \frac{3}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad p = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8}$$

resulta:

$$x^2 - \frac{1}{4}\,x - \frac{3}{8} = 0$$

---

* Para conseguir esta descomposición, basta recordar que:

$$(x + a)\,(x + b) = x^2 + (a + b)\,x + a\,b$$

quitando denominadores, obtenemos una expresión equivalente:

$$8\,x^2 - 2\,x - 3 = 0$$

Igual resultado obtenemos empleando la forma $(x - x_1)\,(x - x_2) = C$ como comprobamos a continuación:

$$\left(x - \frac{3}{4}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) = 0$$

operando el parétesis:

$$x^2 - \frac{3}{4}\,x + \frac{1}{2}\,x - \frac{3}{8} = 0$$

$$x^2 - \frac{1}{4}\,x - \frac{3}{8} = 0$$

$$8\,x^2 - 2\,x - 3 = 0$$

Intentamos, ahora, formar la ecuación cuyas raíces son

$$x_1 = 1 + \sqrt{3} \quad \text{y} \quad x_2 = 1 - \sqrt{3}$$

Según un procedimiento semejante al utilizado en el ejemplo anterior.

$$s = x_1 + x_2 = 1 + \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} = 2$$

$$p = x_1 \cdot x_2 = (1 + \sqrt{3})\,(1 - \sqrt{3}) = 1^2 - (\sqrt{3})^2 = 1 - 3 = -2$$

como $x^2 - s\,x + p = 0$, resulta

$$x^2 - 2\,x - 2 = 0$$

si partimos de $(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$, llegamos al mismo resultado:

$$[x - (1 + \sqrt{3})]\,[x - (1 - \sqrt{3})] = 0$$

$$(x - 1)^2 - (\sqrt{3})^2 = 0$$

$$x^2 - 2\,x + 1 - 3 = 0$$

$$x^2 - 2\,x - 2 = 0$$

Las propiedades de las raíces de una ecuación de segundo grado, nos permiten comprobar si son ciertas las soluciones obtenidas de una ecuación, sin necesidad de sustituir en la misma, la incógnita por el valor de cada raíz.

Así, si resolvemos la ecuación $7\,x^2 - 17\,x - 12 = 0$

$$x = \frac{17 \pm \sqrt{17^2 + 4 \cdot 7 \cdot 12}}{2 \cdot 7} = \frac{17 \pm \sqrt{625}}{14} =$$

$$= \frac{17 \pm 25}{14} = \begin{cases} \dfrac{17 + 25}{14} = 3 \\ \dfrac{17 - 25}{14} = -\dfrac{4}{7} \end{cases}$$

obtenemos las soluciones $x_1 = 3$ y $x_2 = -\frac{4}{7}$, para asegurarnos que la resolución ha sido correcta, es suficiente, hacer la siguiente comprobación

$$x_1 + x_2 = 3 + \left(-\frac{4}{7}\right) = \frac{21 - 4}{7} = \frac{17}{7} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = 3 \cdot \left(-\frac{4}{7}\right) = -\frac{12}{7} = \frac{c}{a}$$

luego, las raíces halladas son las verdaderas.

También basándonos en estas propiedades, podemos conocer el signo que han de tener las raíces de una ecuación de segundo grado, una vez que se ha probado que existen, sin necesidad de resolver la ecuación.

Supongamos la ecuación: $3x^2 - 14x + 8 = 0$

El discriminante de la misma es: $\Delta = b^2 - 4ac = 196 - 96 = 100$, esto es, $\Delta > 0$, luego la ecuación tiene dos soluciones distintas.

Calculamos el producto de las raíces:

$$p = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{8}{3}$$

$p > 0$, luego corresponde a dos raíces del mismo signo.

Como, por otra parte, se verifica que la suma

$$s = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{14}{3}$$

es positiva $s > 0$, las dos raíces llevarán signo +.

Consideremos, ahora, la ecuación $3x^2 - 14x - 8 = 0$

Su discriminante es $\Delta = b^2 - 4ac = 196 + 96 = 292$, es positivo, $\Delta > 0$, luego, la ecuación tiene dos soluciones distintas.

Veamos el producto:

$$p = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{8}{3}$$

como, $p < 0$, las raíces son de signos contrarios. La suma es:

$$s = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{14}{3}$$

como $s > 0$, corresponderá el signo + a la raíz de mayor valor absoluto.

Por último, estudiemos la ecuación: $x^2 + 12x + 36 = 0$

El discriminante es $\Delta = b^2 - 4\,a\,c = 144 - 144 = 0$, luego tiene una raiz doble, esto es, las raices son iguales. Como además, se verifica que

$$s = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-12}{1} = -12$$

la suma es negativa $s < 0$, como consecuencia, las raices son negativas y ambas iguales.

Ejercicios y ejemplos

1. Formar una ecuación de segundo grado cuya suma de raices sea 7 y el producto de las mismas 12.

Aplicamos $x^2 - s\,x + p = 0$, por tanto, solamente tenemos que sustituir, pues $s = 7$ y $p = 12$

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

2. Formar una ecuación de segundo grado, conociendo la diferencia y producto de sus raices, 7 y −6 respectivamente.

En primer lugar, calculamos la suma de las raices, por el procedimiento, ya conocido:

$$s^2 = d^2 + 4p$$

$$s^2 = 7^2 - 4 \cdot 6 = 49 - 24 = 25$$

$$s = \pm\sqrt{25} = \pm 5$$

como consecuencia, podemos escribir dos ecuaciones:

$$x^2 + 5x - 6 = 0 \qquad x^2 - 5x - 6 = 0$$

según se tome $s = -5$ ó $s = +5$ respectivamente.

3. Formar una ecuación cuyas soluciones sean:

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{3}}{5}\,,\; x_2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{5}$$

Optamos por emplear la expresión $(x - x_1)(x - x_2) = 0$, en este caso, nos resulta:

$$\left(x - \frac{2 + \sqrt{3}}{5}\right)\left(x - \frac{2 - \sqrt{3}}{5}\right) = 0$$

$$\left[\left(x - \frac{2}{5}\right) - \frac{\sqrt{3}}{5}\right] \cdot \left[\left(x - \frac{2}{5}\right) + \frac{\sqrt{3}}{5}\right] = 0$$

$$\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right)^2 = 0$$

$$x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{4}{25} - \frac{3}{25} = 0$$

$$x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{1}{25} = 0$$

$$25\,x^2 - 20\,x + 1 = 0$$

4. En la ecuación $2\,x^2 - (5 + a)\,x + 2 = 0$, hallar el valor que ha de tener *a* para que las raíces sean iguales.

Para que las raíces sean iguales, es necesario que el discriminante de la ecuación sea cero.

$$\Delta = b^2 - 4\,a\,c = (5 + a)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 0$$

$$25 + 10\,a + a^2 - 16 = 0$$

$$a^2 + 10\,a + 9 = 0$$

hemos obtenido una ecuación de segundo grado, que resolvemos:

$$a = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \frac{-10 \pm \sqrt{64}}{2} =$$

$$= \frac{-10 \pm 8}{2} = \begin{cases} \dfrac{-10 + 8}{2} = -1 \\ \dfrac{-10 - 8}{2} = -9 \end{cases}$$

luego, *a* puede tomar dos valores -1 y -9.

5. **Dada la ecuación $a\,x^2 + b\,x - 5 = 0$, determinar los valores que deben tener *a* y *b* para que las raíces sean 1 y 2.**

Basta recordar que:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$p = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

como sabemos que $s = 1 + 2 = 3$, $p = 1 \cdot 2 = 2$ y $c = -5$, tenemos:

$$3 = \frac{-b}{a}$$

$$2 = \frac{-5}{a}$$

de esta última ecuación, obtenemos $a = -\frac{5}{2}$ que sustituido en la primera, nos permite calcular b:

$$b = -3\,a = -3 \cdot \frac{-5}{2} = \frac{15}{2}$$

luego la ecuación nos queda:

$$-\frac{5}{2}x^2 + \frac{15}{2}x - 5 = 0$$

quitamos denominadores y cambiamos de signo, para expresarla de la forma general:

$$5x^2 - 15x + 10 = 0$$

2. TRINOMIO DE SEGUNDO GRADO

Como ya hemos visto, llamamos trinomio de segundo grado a la expresión.

$$a x^2 + b x + c$$

en la que *a* es distinto de cero.

Hemos manejado, muchos trinomios de segundo grado, resulta claro que para cada valor de la variable o incógnita *x*, corresponde uno para el trinomio, que será el valor numérico de la expresión para el de *x* considerado.

Por comodidad representamos a los trinomios así:

$$y = a x^2 + b x + c \quad \text{ó} \quad f(x) = a x^2 + b x + c$$

pues se trata de una función entera de x, de segundo grado.

Llamaremos raíces o ceros del trinomio a los valores de *x* para los cuales se anula el trinomio. Son fáciles de calcular, pues basta hacer

$$a x^2 + b x + c = 0$$

y resolver la ecuación de segundo grado que resulta.

2.1. Representación gráfica

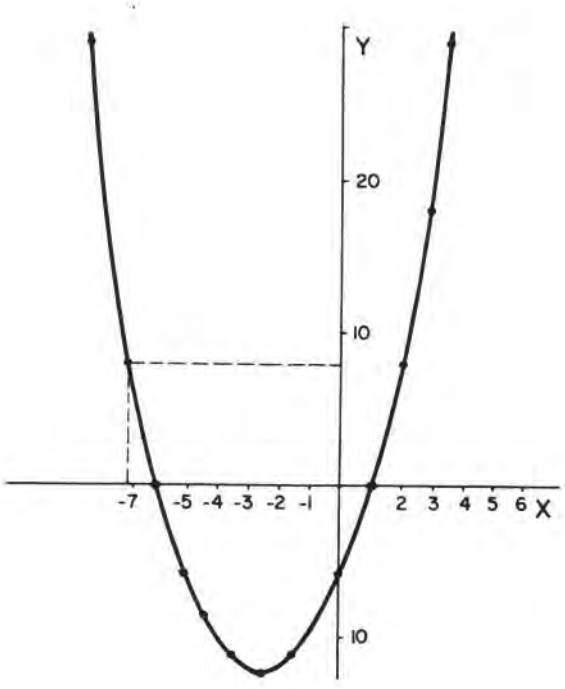
Consideremos, por ejemplo, el trinomio

$$y = x^2 + 5x - 6$$

En primer lugar, obtenemos una tabla de valores, esto supone dar valores a *x* para conseguir los correspondientes de y

x	− 9	− 7	− 6	− 5	− 4	− 3	− 2,5	− 2	− 1	0	1	2	3	4
y	30	8	0	− 6	− 10	− 12	− 12,75	− 12	− 10	− 6	0	8	18	30

Elegimos un sistema de ejes coordenados, como hemos hecho en otras ocasiones, en él señalaremos los puntos que determinan los distintos pares de valores contenidos en la tabla, al unirlos tendremos una curva que es la gráfica correspondiente al trinomio, esta curva recibe el nombre de *parábola*.



En general, la representación gráfica de un trinomio cualquiera de segundo grado es una parábola, como la que acabamos de dibujar, aunque puede tener distinta orientación respecto a los ejes coordenados como veremos más adelante.

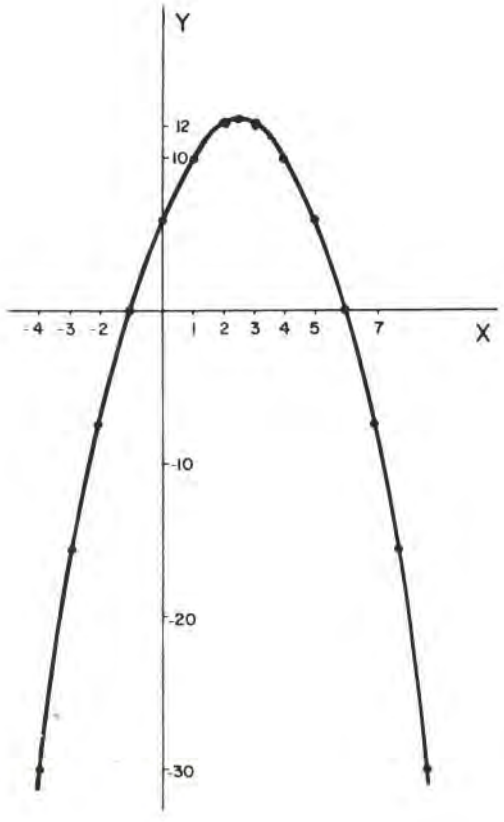
Tratamos de representar, ahora el trinomio:

$$y = - x^2 + 5 x + 6$$

procedemos de igual modo, formando la tabla de valores:

x	− 4	− 3	− 2	− 1	0	1	2	2,5	3	4	5	6	7	8	9
y	− 30	− 18	− 8	0	6	10	12	12,75	12	10	6	0	− 8	− 18	− 30

Llevando este resultado a unos ejes coordenados obtenemos en este caso la siguiente figura:



Observamos que esta parábola se diferencia respecto a la dibujada antes, en su orientación respecto a los ejes coordenados. Esta diferencia radica en que la primera tiene el coeficiente *a* positivo, y en el segundo caso, este coeficiente es negativo.

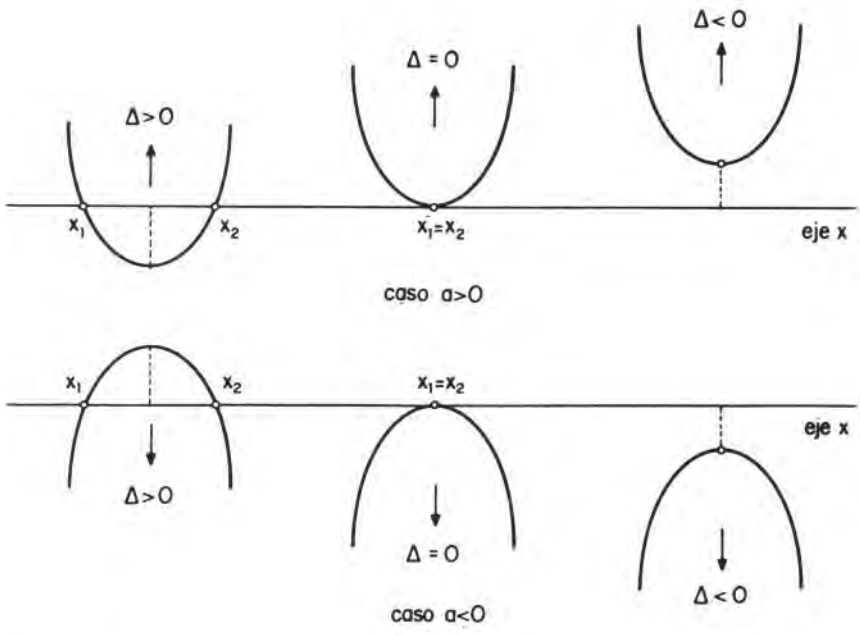
Tanto en el caso de ser $a > 0$ como cuando $a < 0$, pueden darse otras dos posiciones de la parábola que representa al trinomio respecto del eje de abscisas o eje horizontal, según que el discriminante Δ del trinomio sea igual o menor que cero.

$a > 0$ {
- $\Delta = 0$, el trinomio tiene una raíz doble ($x_1 = x_2$) es positivo siempre, y da lugar a una parábola que tiene con el eje x un sólo punto de contacto y la concavidad dirigida hacia arriba.
- $\Delta < 0$, el trinomio carece de soluciones o raíces, es siempre positivo, dando lugar a una parábola que no tiene ningún punto común con el eje horizontal, teniendo la concavidad dirigida hacia arriba.

$a < 0$ {
- $\Delta = 0$, el trinomio tiene una raíz doble ($x_1 = x_2$), es negativo siempre, su representación gráfica es una parábola con un solo punto de contacto con el eje x, estando la concavidad dirigida hacia abajo.
- $\Delta < 0$, el trinomio carece de raíces, es negativo siempre, su gráfica es una parábola que no tiene ningún punto de contacto con el eje horizontal y con la concavidad dirigida hacia abajo.

En definitiva, tenemos seis casos (los dos estudiados en primer lugar y estos cuatro que acabamos de estudiar) que vamos a representar en las figuras siguientes:

BIBLIOTECA PUBLICA PTO. STA. MARIA



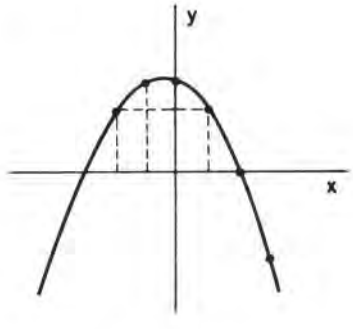
A modo de ejercicio, vamos a representar el trinomio:

$$y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 3$$

Formamos la tabla de valores.

x	0	+ 2	+ 3	− 1	− 2	− 3
y	+ 3	0	− 3	+ 3	+ 2	0

Pasamos estos valores a unos ejes coordenados:



2.2. Resolución gráfica de una ecuación de segundo grado

Dada la ecuación de segundo grado

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

resolver esta ecuación es hallar los valores de x para los cuales se anula el trinomio

$$y = a\,x^2 + b\,x + c$$

El proceso a seguir, es fácil de imaginar, representamos gráficamente este trinomio, determinando luego las abscisas de los puntos de intersección de la parábola con el eje x o eje horizontal (cuyos puntos tienen todos de ordenada cero).

Como hemos dicho antes, la parábola que representa al trinomio puede tener dos, uno o ningún punto de intersección.

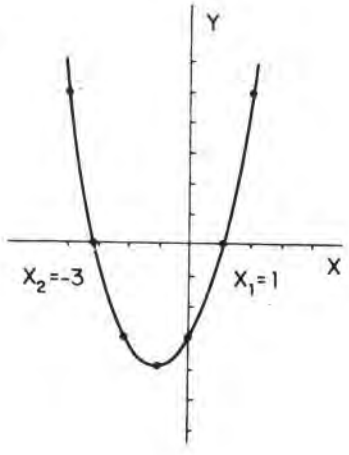
Analicemos algunos ejemplos: Tratamos de resolver gráficamente la ecuación

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

En primer lugar representamos el trinomio: $y = x^2 + 2x - 3$ cuya tabla de valores es:

x	0	1	− 1	2	− 2	− 4
y	− 3	0	− 4	5	− 3	5

Su representación gráfica es:



Averiguamos los puntos en que esta parábola corta al eje x, como fácilmente puede comprobarse $x_1 = 1$ y $x_2 = -3$. Si resolvemos la ecuación, por medio de la expresión

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{-2+4}{2} = 1 \\ \frac{-2-4}{2} = -3 \end{cases}$$

obtenemos el mismo resultado.

Sea ahora la ecuación: $x^2 + 2x + 1 = 0$

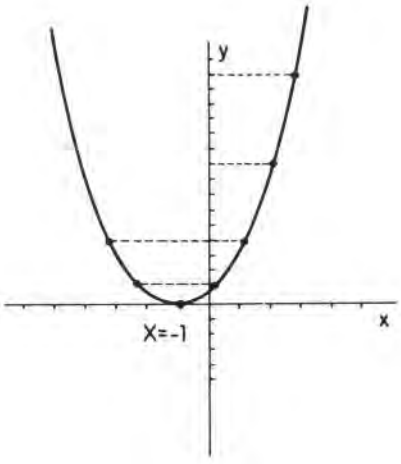
Representamos el trinomio:

$$y = x^2 + 2x + 1$$

cuya tabla de valores es:

x	0	1	− 1	2	− 2	3	− 3
y	1	4	0	9	1	16	4

luego, su representación gráfica es:



El punto de intersección de esta parábola con el eje *x*, nos da la solución de esta ecuación, puede observarse que este punto de intersección es x = − 1. Luego es una ecuación con una sola raiz: Dejamos para el alumno el ejercicio de comprobación de este resultado con el que se obtiene resolviendo la ecuación por el procedimiento visto en el apartado 1.2.

Para terminar vamos a considerar la resolución gráfica de la ecuación:

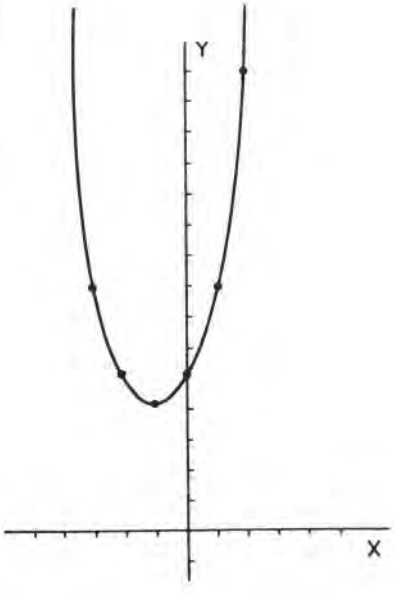
$$x^2 + 2x + 5 = 0$$

Seguimos el mismo procedimiento. Representamos gráficamente el trinomio

$$y = x^2 + 2x + 5$$

cuya tabla de valores es:

x	0	1	− 1	2	− 2	− 3
y	5	8	4	13	5	8



que corresponde a la siguiente representación:

Esta parábola no tiene ningún punto de intersección con el eje x, esto supone decir que la ecuación $x^2 + 2x + 5 = 0$ no tiene ninguna solución. Conviene que el alumno resolviendo esta ecuación, como decíamos antes, compruebe esta afirmación.

3. ECUACIONES REDUCIBLES A ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

3.1. Ecuaciones bicuadradas

Entendemos por ecuaciones bicuadradas, las ecuaciones de cuarto grado que sólo tienen los términos de grado par.

Su forma general es:

$$a\,x^4 + b\,x^2 + c = 0$$

Su resolución está fundada en el procedimiento utilizado para las ecuaciones de segundo grado. Basta tomar una incógnita auxiliar y, de modo que sea $y = x^2$, luego $y^2 = x^4$, por tanto la ecuación bicuadrada queda transformada en

$$a\,y^2 + b\,y + c = 0$$

es una ecuación de segundo grado, cuya incógnita es y, su resolución no tiene dificultad, tiene dos posibles raices

$$y_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a},\ y_2 = \frac{-b - \sqrt{b - 4\,a\,c}}{2\,a}$$

Teniendo en cuenta, el cambio de variable realizado antes, resulta:

$$y_1 = x^2,\ y_2 = x^2$$

luego, la ecuación bicuadrada de partida tiene cuatro raíces que son:

$$x = \pm\sqrt{y_1} \begin{cases} x_1 = +\sqrt{y_1} \\ x_2 = -\sqrt{y_1} \end{cases} \qquad x = \pm\sqrt{y_2} \begin{cases} x_3 = +\sqrt{y_2} \\ x_4 = -\sqrt{y_2} \end{cases}$$

vamos a resolver la ecuación bicuadradada:

$$x^4 - 29\,x^2 + 100 = 0$$

Hacemos el siguiente cambio de variable $y = x^2$, la ecuación dada se convierte en:

$$y^2 - 29\,y + 100 = 0$$

es una ecuación de segundo grado, que se resuelve por los procedimientos ya conocidos:

$$y = \frac{29 \pm \sqrt{841 - 400}}{2} = \frac{29 \pm \sqrt{441}}{2} =$$

$$= \frac{29 \pm 21}{2} = \begin{cases} \dfrac{29 + 21}{2} = 25 \\ \dfrac{29 - 21}{2} = 4 \end{cases}$$

como consecuencia, las cuatro raíces de la ecuación bicuadrada son:

$$x_1 = +\sqrt{25} = +5, \quad x_2 = -\sqrt{25} = -5, \quad x_3 = +\sqrt{4} = +2, \quad x_4 = -\sqrt{4} = -2$$

en este caso tenemos cuatro soluciones distintas.

Sea, ahora, la ecuación:

$$x^4 + 3x^2 - 28 = 0$$

Procedemos, como en el ejemplo anterior, haciendo $y = x^2$, resulta:

$$y^2 + 3y - 28 = 0$$

ecuación de segundo grado que resolvemos:

$$y = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 112}}{2} = \frac{-3 \pm 11}{2} = \begin{cases} \frac{-3+11}{2} = 4 \\ \frac{-3-11}{2} = -7 \end{cases}$$

como consecuencia, tenemos:

$$x_1 = +\sqrt{4} = +2 \qquad x_2 = -\sqrt{4} = -2 \qquad x_3 = +\sqrt{-7} \qquad x_4 = -\sqrt{-7}$$

en este caso, diremos que la ecuación bicuadrada solamente tiene dos soluciones, designadas por x_1 y x_2, puesto que, por ahora, no tienen significado las raíces de números negativos*, ya que estamos considerando soluciones reales.

3.2. Ecuaciones binomias

Vamos a llamar ecuaciones binomias a aquellas que pueden reducirse a la forma:

$$x^m = a$$

Su resolución es sencilla: x es raiz m-ésima de a. Por consiguiente, podemos distinguir tres casos:

- m es par, a es positivo } la ecuación tiene dos soluciones, que son las raíces m-ésimas de a.
- m es par, a es negativo } la ecuación carece de solución.
- m es impar ⟶ la ecuación tiene siempre una solución.

Algunos ejemplos:

Tratamos de resolver la ecuación $x^4 = 3$

* A este tipo de soluciones se les llama soluciones imaginarias. Ver números complejos en la Unidad Didáctica 3.

Las soluciones son las dos raices cuartas de 3

$$x_1 = +\sqrt[4]{3} \qquad x_2 = -\sqrt[4]{3}$$

Tratamos de resolver $x^3 + 1000 = 0$

Podemos escribir:

$$x^3 = -1000\,,\ x = \sqrt[3]{-1000} = -10$$

3.3. Ecuaciones trinomias

Entendemos por ecuaciones trinomias aquellas que pueden reducirse a la forma:

$$a\,x^{2m} + b\,x^m + c = 0$$

Es evidente, que las ecuaciones bicuadradas son ecuaciones trinomias en las que $m = 2$.

Su resolución es sencilla, utilizando una variable auxiliar, hacemos $x^m = y$, obtenemos así la siguiente ecuación:

$$a\,y^2 + b\,y + c = 0$$

resolviendo esta ecuación cada una de las dos raices o soluciones halladas nos permite formar una ecuación binomia.

Vamos a resolver la ecuación:

$$8\,x^6 - 63\,x^3 - 8 = 0$$

Hacemos $x^3 = y$, la ecuación resultante obtenida es:

$$8\,y^2 - 63\,y - 8 = 0$$

la resolvemos

$$y = \frac{63 \pm \sqrt{63^2 + 4 \cdot 8 \cdot 8}}{16} = \frac{63 \pm \sqrt{3969 + 256}}{16} = \frac{63 \pm \sqrt{4225}}{16} =$$

$$= \frac{63 \pm 65}{16} = \begin{cases} \dfrac{63 + 65}{16} = 8 \\ \dfrac{63 - 65}{16} = -\dfrac{1}{8} \end{cases}$$

Consideremos, ahora, las siguientes ecuaciones binomias:

$$x^3 = 8 \text{ cuya solución es } x_1 = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$x^3 = -\frac{1}{8} \quad \text{cuya solución es } x_2 = \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = -\frac{1}{2}$$

Luego, las soluciones de la ecuación dada son 2 y $-\frac{1}{2}$.

3.4. Ecuaciones irracionales

Habitualmente entendemos por *ecuación irracional* a aquélla en la que alguna de las incógnitas figura bajo el signo radical.

En otro tema ya hemos considerado este tipo de ecuaciones, vamos a hacerlo en esta ocasión con suficiente detalle, limitándonos a ecuaciones irracionales con radicales de índice 2.

Para la resolución de este tipo de ecuaciones nos basamos en la siguiente propiedad o teorema: Si se elevan al cuadrado los dos miembros de una ecuación, se obtiene otra que, además de tener las soluciones de la primera, contiene las de una tercera, consecuencia de cambiar el signo a uno de los miembros de la ecuación dada.

Lo que acabamos de decir, se puede justificar fácilmente:

Consideremos la ecuación: $A(x) = B(x)$

Elevando los dos miembros al cuadrado, tenemos:

$$[A(x)]^2 = [B(x)]^2$$

igualando a cero esta ecuación:

$$[A(x)]^2 - [B(x)]^2 = 0$$

que se puede escribir:

$$(A(x) - B(x))\,(A(x) + B(x)) = 0$$

Esta última ecuación se convierte en identidad al sustituir x por cada uno de los valores que anulan a los dos factores, por la solución de:

$$A(x) - B(x) = 0 \text{ o su equivalente } A(x) = B(x)$$

y de

$$A(x) + B(x) = 0 \quad \text{o su equivalente } A(x) = -B(x)$$

Por tanto, la ecuación $[A(x) - B(x)]\,[A(x) + B(x)] = 0$ y su equivalente, $[A(x)]^2 = [B(x)]^2$, contiene, además de las soluciones de $A(x) = B(x)$, las de $A(x) = -B(x)$, tal como queríamos demostrar.

Antes de considerar algunos ejemplos, conviene sacar una consecuencia importante de todo lo dicho: Siempre que la resolución de una ecuación exija elevar sus dos miembros al cuadrado, es preciso comprobar si las soluciones halladas convienen o no a la ecuación propuesta, y desechar las raíces extrañas.

Resolver la ecuación: $18 - \sqrt{x + 10} = 2$

Para que desaparezca el radical es necesario aislarlo en uno de los miembros, se tiene:

$$\sqrt{x + 10} = 16$$

Elevando al cuadrado, los dos miembros, resulta:

$$x + 10 = 256$$

donde,

$$x = 246$$

Comprobemos que efectivamente es una solución, sustituyendo en la ecuación dada:

$$18 - \sqrt{246 + 10} = 18 - 16 = 2$$

luego, la ecuación dada tiene por solución la averiguada $x = 246$.

Sea la ecuación $\sqrt{x + 9} + \sqrt{x - 3} = 6$

Para resolver esta ecuación, aislamos el primer radical, obteniendo:

$$\sqrt{x + 9} = 6 - \sqrt{x - 3}$$

Elevando los dos miembros al cuadrado, resulta:

$$x + 9 = 36 - 12\sqrt{x - 3} + x - 3$$

Reducimos términos semejantes y aislamos nuevamente el radical

$$\sqrt{x - 3} = 2$$

elevando al cuadrado:

$$x - 3 = 4$$
$$x = 4 + 3$$
$$x = 7$$

Comprobamos, que efectivamente es una solución.

$$\sqrt{7 + 9} + \sqrt{7 - 3} = 4 + 2 = 6$$

Por tanto, $x = 7$ es una solución de la ecuación problema.

Finalmente, tratamos de resolver la ecuación: $\sqrt{x + 9} - \sqrt{x - 3} = 6$

Procediendo como en los casos anteriores:

$$\sqrt{x + 9} = 6 + \sqrt{x - 3}$$

Elevando al cuadrado:

$$x + 9 = 36 + 12\sqrt{x - 3} + x - 3$$

Reduciendo términos semejantes y simplificando:

$$-2 = \sqrt{x - 3}$$

De nuevo, elevamos al cuadrado para quitar el radical

$$4 = x - 3$$
$$x = 4 + 3$$
$$x = 7$$

Si hacemos la comprobación, obtenemos:

$$\sqrt{7 + 9} - \sqrt{7 - 3} = 4 - 2 = 2, \quad 2 \neq 6$$

Luego, x = 7 no es solución de la ecuación dada, es una ecuación *imposible*.

A modo de resumen, podemos enunciar que para quitar los radicales de una ecuación cuya incógnita aparece en uno o más radicales de indice 2. Se elevan al cuadrado los dos miembros tantas veces como radicales haya. Antes de realizar estas potencias conviene aislar un radical en uno de los miembros y efectuar todas las reducciones posibles entre los términos del otro miembro.

Una solución de la ecuación final lo será de la propuesta si al sustituir en ella la incógnita por dicha solución, el resultado es una identidad.

3.5. Ecuaciones que pueden resolverse con una incógnita auxiliar

Aunque, bajo este título se pueden considerar muchas ecuaciones, por ahora, solamente nos interesan las que expresamos de la siguiente forma:

$$a\,x^2 + b\,x + c + p\sqrt{a\,x^2 + b\,x + c} = q$$

Para resolverla hacemos el siguiente cambio de incógnita:

$$y = \sqrt{a\,x^2 + b\,x + c}$$

obtenemos:

$$y^2 + p\,y - q = 0$$

que es una ecuación de segundo grado, que ya sabemos resolver, sean y_1 e y_2 sus raíces, tenemos, por tanto:

$$\sqrt{a\,x^2 + b\,x + c} = y_1 \qquad \sqrt{a\,x^2 + b\,x + c} = y_2$$
$$a\,x^2 + b\,x + c = y_1^2 \qquad a\,x^2 + b\,x + c = y_2^2$$

hemos obtenido de esta forma otras dos ecuaciones de segundo grado de las cuales obtendremos cuatro valores de x.

Si y_1 e y_2 son ambas positivas, los cuatro valores de x satisfacen la ecuación de partida. Si y_1 o y_2 es negativa, las raíces halladas de la ecuación cuadrática no satisfacen a la ecuación dada, sino a la ecuación:

$$a\,x^2 + b\,x + c - p\sqrt{a\,x^2 + b\,x + c} = q$$

Como aplicación, vamos a resolver la ecuación:

$$x^2 - 2\,x + 2\sqrt{x^2 - 2\,x - 15} = 30$$

Esta ecuación se puede escribir así:

$$x^2 - 2\,x - 15 + 2\sqrt{x^2 - 2\,x - 15} = 15$$

de esta manera se ajusta al tipo expuesto antes. Hacemos el siguiente cambio:

$$\sqrt{x^2 - 2\,x - 15} = y$$

nos resulta:

$$y^2 + 2\,y - 15 = 0$$

resolviendo esta ecuación de segundo grado:

$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 1 \cdot 15}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2} =$$

$$= \frac{-2 \pm 8}{2} = \begin{cases} \dfrac{-2+8}{2} = 3 \\ \dfrac{-2-8}{2} = -5 \end{cases}$$

luego: $y_1 = 3 \quad y_2 = -5$

$$\sqrt{x^2 - 2\,x - 15} = 3$$

elevando al cuadrado y ordenando: $x^2 - 2\,x - 24 = 0$

que también es una ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 24}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{100}}{2} =$$

$$= \frac{2 \pm 10}{2} = \begin{cases} \frac{2 + 10}{2} = 6 \\ \frac{2 - 10}{2} = -4 \end{cases}$$

Análogamente:

$$\sqrt{x^2 - 2x - 15} = -5$$

$$x^2 - 2x - 40 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 40}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{164}}{2} = \begin{cases} 1 + \sqrt{41} \\ 1 - \sqrt{41} \end{cases}$$

Las soluciones obtenidas son:

$$x_1 = 6, \quad x_2 = -4 \quad x_3 = 1 + \sqrt{41} \qquad x_4 = 1 - \sqrt{41}$$

Dejamos como ejercicio para el alumno la comprobación de cuáles son raíces de la ecuación propuesta.

4. SISTEMAS DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

4.1. Sistema formado por una ecuación lineal y otra de segundo grado

Se puede utilizar cualquiera de los procedimientos estudiados en el caso de sistemas de ecuaciones lineales, pero si tuviéramos que aconsejar alguno nos inclinaríamos por el método de sustitución.

Vamos a resolver el siguiente sistema:

$$x^2 + y^2 = 290$$

$$x + y = 24$$

Despejamos de la segunda ecuación la incógnita y:

$$y = 24 - x$$

Sustituyendo en la primera:

$$x^2 + (24 - x)^2 = 290$$

Es una ecuación de segundo grado, que resolvemos:

$$x^2 + 576 - 48x + x^2 = 290$$

$$2x^2 - 48x + 286 = 0$$

$$x = \frac{48 \pm \sqrt{2304 - 2288}}{4} = \frac{48 \pm \sqrt{16}}{4} = \frac{48 \pm 4}{4} = \begin{cases} \frac{48 + 4}{4} = 13 \\ \frac{48 - 4}{4} = 11 \end{cases}$$

luego los correspondientes valores de y son:

$$y = 24 - 13 = 11$$
$$y = 24 - 11 = 13$$

Las soluciones son:

$$x_1 = 13 \quad y_1 = 11$$

$$x_2 = 11 \quad y_1 = 13$$

4.2. Sistemas de dos ecuaciones de segundo grado

En general, este tipo de sistemas da lugar, al tratar de resolverlos, a una ecuación de segundo grado cuya resolución conocemos.

Solamente vamos a considerar algunos casos particulares, en los que la ecuación que se obtiene es bicuadrada.

Vamos a resolver el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 61 \\ x\,y &= 30 \end{aligned}\right\}$$

Despejamos la incógnita y de la segunda ecuación: $y = \frac{30}{x}$ sustituimos en la primera:

$$x^2 + \frac{30^2}{x^2} = 61$$

$$x^4 + 900 = 61x^2$$
$$x^4 - 61x^2 + 900 = 0$$

es una ecuación bicuadrada, que resolvemos haciendo: $x^2 = y$

$$y^2 - 61y + 900 = 0$$

$$y = \frac{61 \pm \sqrt{61^2 - 4 \cdot 900}}{2} = \frac{61 \pm \sqrt{3721 - 3600}}{2} = \frac{61 \pm \sqrt{121}}{2} =$$

$$= \frac{61 \pm 11}{2} = \begin{cases} \dfrac{61 + 11}{2} = 36 \\ \dfrac{61 - 11}{2} = 25 \end{cases}$$

teniendo en cuenta el cambio que hemos realizado:

$$x = \pm\sqrt{36} = \pm 6 \qquad x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$$

como $y = \dfrac{30}{x}$ tenemos:

$$y = \frac{30}{\pm 6} = \pm 5 \qquad y = \frac{30}{\pm 5} = \pm 6$$

Las soluciones son:

$$x_1 = +6\ ,\ x_2 = -6\ ,\ x_3 = +5\ ,\ x_4 = -5$$
$$y_1 = +5\ ,\ y_2 = -5\ ,\ y_3 = +6\ ,\ y_4 = -6$$

4.3. Problemas de segundo grado

Muchas veces aparecen problemas que para su resolución se necesita una o más ecuaciones de segundo grado. Para la resolución seguimos las normas expuestas en el tema anterior, como podemos comprobar con estos ejemplos:

Se han comprado varios tinteros por 540 ptas. Si se hubieran comprado por la misma cantidad 3 tinteros más, cada uno hubiera costado 15 ptas. menos ¿Cuántos tinteros se han comprado?

Número de tinteros: x. Precio de uno: $\dfrac{540}{x}$

Número de tinteros, 2.ª vez: $x + 3$. Precio de uno: $\dfrac{540}{x + 3}$

Como la diferencia de precio es 15 ptas., se tiene:

$$\frac{540}{x} - \frac{540}{x + 3} = 15$$

quitando denominadores:

$$540\ (x + 3) - 540\ x = 15\ x\ (x + 3)$$

quitando paréntesis y reduciendo términos semejantes:

$$540\ x + 1620 - 540\ x = 15\ x^2 + 45\ x$$

$$15\,x^2 + 45\,x - 1620 = 0$$
$$x^2 + 3\,x - 108 = 0$$

es una ecuación de segundo grado que tiene dos raices:

$$x_1 = 9,\ x_2 = -12$$

por supuesto, prescindimos de la solución negativa, por no satisfacer el problema. Luego, el número primitivo de tinteros comprados es 9.

Ejercicios y ejemplos

1. Resolver la ecuación $x^6 - 1 = 0$

Es una ecuación binomia, por tanto, $x^6 = 1 \quad x = \sqrt[6]{1} = \pm 1$

2. Resolver la ecuación; $x^6 + 7\,x^3 - 8 = 0$

Es una ecuación trinomia, para resolverla hacemos el siguiente cambio, llamamos $x^3 = y$, obteniendo:

$$y^2 + 7\,y - 8 = 0$$

Es una ecuación de segundo grado, cuya solución es:

$$y = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 + 4 \cdot 8}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 32}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{81}}{2} =$$

$$= \frac{-7 \pm 9}{2} = \begin{cases} \dfrac{-7+9}{2} = 1 \\ \dfrac{-7-9}{2} = -8 \end{cases}$$

Luego, las soluciones de la ecuación dada son:

$$x^3 = 1 \qquad x = \sqrt[3]{1} = 1$$

$$x^3 = -8 \qquad x = \sqrt[3]{-8} = -2$$

3. Resolver la ecuación: $\sqrt{13 + \sqrt{5 + \sqrt{x + 2}}} = 4$

Estamos ante una ecuación que tiene radicales, para prescindir de ellos elevamos al cuadrado los dos miembros de la ecuación:

$$\left(\sqrt{13 + \sqrt{5 + \sqrt{x + 2}}}\right)^2 = 4^2$$

$$13 + \sqrt{5 + \sqrt{x + 2}} = 16$$

aislamos el radical y repetimos el proceso:

$$\sqrt{5 + \sqrt{x + 2}} = 3$$

$$\left(\sqrt{5 + \sqrt{x + 2}}\right)^2 = 3^2$$

$$5 + \sqrt{x + 2} = 9$$

repetimos la misma operación otra vez:

$$\sqrt{x + 2} = 4$$

$$\left(\sqrt{x + 2}\right)^2 = 4^2$$

$$x + 2 = 16$$

luego la solución es: $x = 16 - 2 = 14$

4. Obtener la solución de la ecuación:

$$x^2 - 5x + 2\sqrt{x^2 - 5x + 3} = 12$$

Como hemos visto, esta ecuación se puede resolver con ayuda de una incógnita auxiliar, pero primero la escribimos así:

$$x^2 - 5x + 3 + 2\sqrt{x^2 - 5x + 3} = 15$$

llamando $y = \sqrt{x^2 - 5x + 3}$

obtenemos la siguiente ecuación de segundo grado

$$y^2 + 2y - 15 = 0$$

$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 15}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2} \begin{cases} \frac{-2 + 8}{2} = 3 \\ \frac{-2 - 8}{2} = -5 \end{cases}$$

para obtener x, tenemos que resolver, otras dos ecuaciones de segundo grado:

$$\sqrt{x^2 - 5x + 3} = 3 \; ; \; \sqrt{x^2 - 5x + 3} = -5$$

Elevando al cuadrado

$$x^2 - 5x + 3 = 9 \; ; \; x^2 - 5x + 3 = 25$$

$$x^2 - 5x - 6 = 0 \; ; \; x^2 - 5x - 22 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} = \; ; \; x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 88}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{113}}{2} =$$

$$= \frac{5 \pm 7}{2} = \begin{cases} \dfrac{5+7}{2} = 6 = x_1 \\ \dfrac{5-7}{2} = -1 = x_2 \end{cases} \qquad = \begin{cases} \dfrac{5+\sqrt{113}}{2} = x_3 \\ \dfrac{5-\sqrt{113}}{2} = x_4 \end{cases}$$

x_1 y x_2 son las soluciones de la ecuación dada (x_3 y x_4 no son soluciones por ser $y_2 = -5$ negativo).

5. Hallar dos números naturales cuya diferencia es 4 y su producto 117.

Si llamamos a estos dos números buscados *x* e *y*.

Planteamos las siguientes ecuaciones:

Su diferencia es 4: $x - y = 4$

Su producto es 117: $x \cdot y = 117$

Resolver este problema supone considerar el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x - y &= 4 \\ x \cdot y &= 117 \end{aligned}\right\}$$

despejamos y de la primera ecuación

$$y = x - 4$$

sustituimos en la segunda ecuación:

$$x(x - 4) = 117$$
$$x^2 - 4x = 117$$
$$x^2 - 4x - 117 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 468}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{484}}{2} = \frac{4 \pm 22}{2} = \begin{cases} \dfrac{4+22}{2} = 13 \\ \dfrac{4-22}{2} = -9 \end{cases}$$

La solución del sistema:

$$x_1 = 13 \qquad y_1 = 13 - 4 = 9$$
$$x_2 = -9 \qquad y_2 = -9 - 4 = -13$$

por tanto, los números pedidos en el problema son 13 y 9

ONCLUSIONES TEMA XVII

DEFINICION

Ecuación de segundo grado con una incógnita la podemos escribir:

$$a x^2 + b x + c = 0$$

a, *b* y *c* son coeficientes numéricos y *x* la incógnita.

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

RESOLUCION

ECUACIONES INCOMPLETAS

$a x^2 + c = 0$ $\qquad x = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$

$a x^2 + b x = 0$ $\qquad x_1 = 0$

$\qquad\qquad\qquad\quad x_2 = -\frac{b}{a}$

$a x^2 = 0$ $\qquad x_1 = x_2 = 0$

ECUACION GENERAL

$a x^2 + b x + c = 0$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 a c}}{2 a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 a c}}{2 a}$$

DISCRIMINANTE

$\Delta = b^2 - 4 a c$ es el discriminante de una ecuación de segundo grado.

$\Delta > 0$ la ecuación tiene dos soluciones distintas.

$\Delta = 0$ la ecuación tiene una única solución que es doble.

$\Delta < 0$ la ecuación no tiene ninguna solución.

PROPIEDADES DE LAS SOLUCIONES

Si X_1 y X_2 son las soluciones de la ecuación de segundo grado

$$a x^2 + b x + c = 0$$

$$X_1 + X_2 = -\frac{b}{a}, \quad X_1 \cdot X_2 = \frac{c}{a}$$

DETERMINACION

Si *s* y *p* son la suma y el producto, respectivamente, de las soluciones de una ecuación de segundo grado, dicha ecuación se puede escribir así:

$$X^2 - s x + p = 0$$

ECUACIONES REDUCIBLES A ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

ECUACIONES BICUADRADAS	Su forma general es: $a x^4 + b x^2 + c = 0$ Tomamos incógnita auxiliar: $y = x^2$ luego $a y^2 + b y + c = 0$ $y_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $y_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $x_1 = +\sqrt{y_1}$ $x_2 = -\sqrt{y_1}$ $x_3 = +\sqrt{y_2}$ $x_4 = -\sqrt{y_2}$
ECUACIONES BINOMIAS	Su forma general es: $x^m = a$ — si m es par y $a > 0$ — tiene 2 soluciones — si m es par y $a < 0$ — carece de solución — si m es impar tiene una solución $x = \sqrt[m]{a}$
ECUACIONES TRINOMIAS	Su forma general es: $a x^{2m} + b x^m + c = 0$ Utilizamos variable auxiliar $x^m = y$ Se trata entonces de resolver la ecuación: $a y^2 + b y + c = 0$ cada una de las dos raices o soluciones halladas nos permite formar una ecuación binomia.
ECUACIONES IRRACIONALES	Son aquellas en las que alguna de las incógnitas figura bajo el signo radical Para resolver este tipo de ecuaciones nos basamos en la siguiente propiedad: Si se elevan al cuadrado los dos miembros de una ecuación, se obtiene otra que, además de tener las soluciones de la primera, contiene las de una tercera, consecuencia de cambiar el signo a uno de los miembros de la ecuación dada.

NOTAS ACLARATORIAS Y COMPLEMENTARIAS

• Hemos visto que si x_1 y x_2 son las dos soluciones de una ecuación de segundo grado podemos formar dicha solución:

$$x^2 - s\,x + p = 0$$

siendo $s = x_1 + x_2$ y $p = x_1 \cdot x_2$, por tanto:

$$x - (x_1 + x_2)\,x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

se puede escribir también:

$$(x - x_2)\,(x - x_1) = 0$$

es una ecuación de segundo grado en función de sus raíces o soluciones. Esta expresión tiene la utilidad de expresar un trinomio de segundo grado de forma factorial.

EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $x^2 - 8x - (8x + 17) = 0$
2. $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{3}{4}$

Determinar la naturaleza de las raíces de las ecuaciones siguientes, examinando el discriminante.

3. $x^2 - 8x + 15 = 0$
4. $10 = 4x + 5x^2$

Formar las ecuaciones de segundo grado cuyas raíces son:

5. $3 + \sqrt{2},\quad 3 - \sqrt{2}$
6. $\frac{2}{3},\ -\frac{1}{6}$
7. *En la ecuación* $2x^2 - (5 + a)x + 2 = 0$, *hallar el valor que ha de tener* a *para que las raíces sean iguales.*
8. *Determinar* b *en la ecuación* $x^2 + bx + 21 = 0$, *sabiendo que las raíces tienen por diferencia 4.*
9. *Hallar el valor de* c *en la ecuación* $x^2 - 30x + c = 0$ *sabiendo que una de las raíces es la cuarta parte de la otra.*

Resolver gráficamente las siguientes ecuaciones:

10. $x^2 + x - 2 = 0$

11. $x^2 - 4x = 0$

Resolver las siguientes ecuaciones:

12. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
13. $x^3 = -8$
14. $x^4 - 25 = 0$
15. $x^6 - 19x^3 - 216 = 0$
16. $\sqrt{7 + 2x} - \sqrt{3 + x} = 1$
17. $\dfrac{3\sqrt{2x - 1} - 2\sqrt{x + 4}}{9} = \dfrac{1}{\sqrt{x + 4}}$
18. $x^2 + 4x - 6 = 2\sqrt{x^2 + 4x - 3}$
19. $3x^2 - 7 + 3\sqrt{3x^2 - 16x + 21} = 16x$

Resolver los siguientes sistemas:

20. $\left.\begin{aligned} x - 2y^2 &= 0 \\ y + 5 &= 3x \end{aligned}\right\}$

21. $\left.\begin{aligned} 2x^2 + 3y^2 &= 11 \\ xy &= 2 \end{aligned}\right\}$

22. *Hallar dos números pares consecutivos cuyo producto es 168.*

23. *Un grifo tarda 10 minutos menos que otro en llenar un depósito, y los dos juntos tardan 12 minutos ¿Cuánto tardará cada uno por separado?*

24. *Hallar un número que sumado con su raíz dé 132.*

25. *Dos ciclistas salen juntos para recorrer un trayecto de 112 km. El primero recorre 2 km por hora más que el segundo, por lo cual llega al destino 1 hora antes. Averiguar la velocidad de cada uno.*

26 *Hallar dos números, tales que su suma, su producto y su cociente sean iguales entre sí.*

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. $x^2 - 8x - 8x - 17 = 0$

$x^2 - 16x - 17 = 0$

$$x = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 + 4 \cdot 17}}{2} = \frac{16 \pm \sqrt{324}}{2} =$$

$$= \frac{16 \pm 18}{2} = \begin{cases} \frac{34}{2} = 17 \\ \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

Luego las soluciones son $x_1 = 17, x_2 = -1$

2. $$\frac{x + 1 + x - 1}{x^2 - 1} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{3}{4}$$

$8x = 3x^2 - 3$, $3x^2 - 8x - 3 = 0$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 4 \cdot 3 \cdot 3}}{6} = \frac{8 \pm \sqrt{100}}{6} = \frac{8 \pm 10}{6} = \begin{cases} 3 \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$$

luego las soluciones serán $x_1 = 3$ $x_2 = -\frac{1}{3}$

3. El discriminante es:

$$64 - 4 \cdot 15 = 64 - 60 = 4$$

Como $4 > 0$, las dos raices serán distintas.

4. Análogamente

$$5x^2 + 4x - 10 = 0$$

$$\Delta = 4^2 + 4 \cdot 10 \cdot 5 = 16 + 200 = 216$$

al ser $216 > 0$ las dos raíces serán distintas

5. Hallamos su suma y su producto.

$$s = 3 + \sqrt{2} + 3 - \sqrt{2} = 6$$

$$p = (3 + \sqrt{2}) \cdot (3 - \sqrt{2}) = 9 - 2 = 7$$

y la ecuación: $x^2 - 6x + 7 = 0$

6. Análogamente:

$$s = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{4-1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$p = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{2}{18} = -\frac{1}{9}$$

y la ecuación quedará:

$x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{9} = 0$ ó de otra forma:

$18x^2 - 9x - 2 = 0$

7. El discriminante debe ser nulo.

$(5 + a)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 0$
$25 + a^2 + 10a - 16 = 0$
$a^2 + 10a + 9 = 0$

$$a = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \frac{-10 \pm 8}{2} = \begin{cases} -1 \\ -9 \end{cases}$$

y entonces, cualquiera de éstos dos valores, verifica el problema.

8. $x_1 - x_2 = 4$. Determinar *b* equivale a determinar la suma de las raíces.

$s^2 = d^2 + 4p$
$s^2 = 16 + 4 \cdot 21$
$s^2 = 16 + 84$
$s^2 = 100$

De aquí:

$s = \pm \sqrt{100} = \pm 10$

y cambiando el signo, obtendremos el valor de b.

9. $x_1 = \frac{x_2}{4}$ $\quad \frac{x_2}{4} + x_2 = 30$

$x_1 + x_2 = 30$ $\quad \frac{5}{4} x_2 = 30$

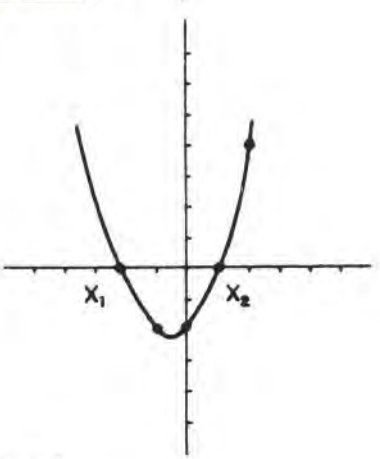
$$x_2 = \frac{30 \cdot 4}{5} = 24$$

Si $x_2 = 24 \Longrightarrow x_1 = 6$ y como *c* es el producto de ambas, valdrá: $c = 144$

10. $y = x^2 + x - 2$

Construimos tabla de valores.

x	0	1	−1	2	−2
y	−2	0	−2	4	0

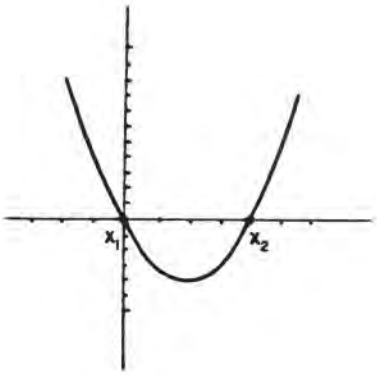


Las soluciones son $x_1 = -2$ y $x_2 = 1$

11. $y = x^2 - 4x$

La tabla de valores

x	0	1	−1	2	−2	3	4	5
y	0	−3	5	−4	12	−3	0	5



Las soluciones son $x_1 = 0$ y $x_2 = 4$

12. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$. Haciendo $x^2 = y$

$y^2 - 13y + 36 = 0$

$$y = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 4 \cdot 36}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} = \begin{cases} 9 \\ 4 \end{cases}$$

Como $y = x^2$, sustituimos cada uno de éstos valores:

$9 = x^2 \rightarrow x = \pm 3$

$4 = x^2 \rightarrow x = \pm 2$

$x_1 = 3$
$x_2 = -3$
$x_3 = 2$
$x_4 = -2$

13. $x^3 = -8$

$x = \sqrt[3]{-8} = -2$

14. $x^4 = 25$

$x^2 = 5$

$x = \pm \sqrt{5}$

15. $x^6 - 19x^3 - 216 = 0$. Llamando $x^3 = y$

$y^2 - 19y - 216 = 0$

$$y = \frac{19 \pm \sqrt{361 + 864}}{2} = \frac{19 \pm 35}{2} = \begin{cases} \frac{54}{2} = 27 \\ \frac{-16}{2} = -8 \end{cases}$$

Sustituyendo estos valores:

$x^3 = 27 \Rightarrow x = \sqrt[3]{27} = 3$

$x^3 = -8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-8} = -2$

16. Aislando un radical en uno de los miembros:

$\sqrt{7 + 2x} = 1 + \sqrt{3 + x}$. Elevando al cuadrado.

$7 + 2x = 1 + 3 + x + 2\sqrt{3 + x}$

$3 + x = 2\sqrt{3 + x}$. Elevando al cuadrado:

$9 + x^2 + 6x = 4(3 + x)$

$x^2 + 6x - 4x = 12 - 9$

$x^2 + 2x - 3 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$$

17. Quitando denominadores:

$9 = 3\sqrt{(2x - 1)(x + 4)} - 2(x + 4)$

Dejando la raiz sola en un miembro:

$9 + 2(x + 4) = 3\sqrt{(2x - 1)(x + 4)}$

Elevando al cuadrado:

$81 + 4(x + 4)^2 + 36(x + 4) = 9(2x - 1)(x + 4)$

Efectuando las operaciones indicadas:

$81 + 4x^2 + 32x + 64 + 36x + 144 = 9(2x^2 + 8x - x - 4)$
$81 + 4x^2 + 32x + 64 + 36x + 144 = 18x^2 + 63x - 36$

Agrupando términos semejantes:

$$-14x^2 + 5x + 325 = 0$$

Multiplicando por -1:

$$14x^2 - 5x - 325 = 0$$

Tenemos una ecuación de segundo grado de fácil resolución.

18 Llamamos $y = x^2 + 4x - 3$, tenemos:

$$y - 3 = 2\sqrt{y}$$

Elevando al cuadrado

$$y^2 + 9 - 6y = 4y$$
$$y^2 - 10y + 9 = 0$$

$$y = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} = \begin{cases} 9 \\ 1 \end{cases}$$

Las soluciones son $y_1 = 9 \qquad y_2 = 1$

y volviendo a poner en lugar de y, su valor, obtendremos x.

19. Agrupando todo en un miembro

$$3x^2 - 16x - 7 + 3\sqrt{3x^2 - 16x + 21} = 0$$

Llamamos $y = 3x^2 - 16x - 7$, tenemos:

$$y + 3\sqrt{y + 28} = 0$$

$$y = -3\sqrt{y + 28}$$

$$y^2 = 9(y + 28)$$

$$y^2 = 9y + 252$$

$$y^2 - 9y - 252 = 0$$

$$y = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 1008}}{2} = \frac{9 \pm 33}{2} = \begin{cases} 21 \\ -12 \end{cases}$$

Si ponemos estos valores en la expresión de y:

$3x^2 - 16x - 7 = 21$ y en la otra $3x^2 - 16x - 7 = -12$

Vamos a resolver sólo una de ellas, porque la otra será análoga.

$$3x^2 - 16x - 28 = 0$$

$$x = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 + 12 \cdot 28}}{6} = \frac{16 \pm \sqrt{592}}{6} =$$

$$= \frac{16 \pm 4\sqrt{37}}{6} = \begin{cases} \dfrac{8 + 2\sqrt{37}}{3} \\ \dfrac{8 - 2\sqrt{37}}{3} \end{cases}$$

20. $\left.\begin{array}{l} x - 2y^2 = 0 \\ y + 5 = 3x \end{array}\right\} x = 2y^2$

luego:

$y + 5 = 6y^2 \qquad 6y^2 - y - 5 = 0$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 120}}{12} = \frac{1 \pm \sqrt{121}}{12} = \frac{1 \pm 11}{12} = \begin{cases} \frac{1 + 11}{12} = 1 \\ \frac{1 - 11}{12} = -\frac{10}{12} = \frac{-5}{6} \end{cases}$$

Si $y = 1$, $x = 2 \cdot 1^2 = 2 \cdot 1 = 2$

Si $y = \frac{-5}{6}$, $x = 2 \cdot \left(-\frac{5}{6}\right)^2 = 2 \cdot \frac{25}{36} = \frac{50}{36} = \frac{25}{18}$

21.

$$\left.\begin{array}{l} 2x^2 + 3y^2 = 11 \\ x \cdot y = 2 \end{array}\right\} \quad x = \frac{2}{y}$$

$$2 \cdot \frac{4}{y^2} + 3y^2 = 11$$

$8 + 3y^4 = 11y^2$ Llamando $y^2 = x$, ordenando:

$3x^2 - 11x + 8 = 0$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 96}}{6} = \frac{11 \pm 5}{6} = \begin{cases} \frac{16}{6} = \frac{8}{3} \\ \frac{6}{6} = 1 \end{cases}$$

Sustituyendo en el valor de y:

Si $x = \frac{8}{3}$ $\quad y = \pm\sqrt{\frac{8}{3}} = \pm 2\sqrt{\frac{2}{3}}$

Si $x = 1$ $\quad y = \pm 1$

Luego $x = \frac{2}{y} = \begin{cases} \frac{2}{\pm 2\sqrt{\frac{2}{3}}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{2}{\pm 1} = \pm 2 \end{cases}$

22. Un número par es siempre $2x$ y el consecutivo será $2x + 2$.

$(2x) \cdot (2x + 2) = 168$
$2x \cdot 2(x + 1) = 168$. Simplificando
$x(x + 1) = 42$
$x^2 + x - 42 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 168}}{2} = \frac{-1 \pm 13}{2} = \begin{cases} 6 \\ -7 \end{cases}$$

y los números pedidos serán: 12 y 14 o bien -14, -12

23. Uno de ellos tardará x minutos en efectuarlo y el otro x − 10 minutos:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x - 10} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{(x - 10) + x}{x\,(x - 10)} = \frac{1}{12}$$

quitando denominadores obtenemos la siguiente ecuación de segundo grado de fácil solución:

$$x^2 - 34\,x + 120 = 0$$

24. $x + \sqrt{x} = 132$

$\sqrt{x} = 132 - x$. Elevando al cuadrado

$x = 17424 + x^2 - 264\,x$ y la ecuación queda:

$x^2 - 265\,x + 17424 = 0$

$$x = \frac{265 \pm \sqrt{529}}{2} = \frac{265 \pm 23}{2} = \begin{cases} 144 \\ 121 \end{cases}$$

El número pedido es 121 si se toma el valor positivo de su raíz y 144 si se toma su valor negativo.

25. Velocidad del 2.º: x km/h. Tiempo empleado: (t + 1) horas.
Velocidad del 1.º: (x + 2) km/h. Tiempo empleado: t horas

$$\left.\begin{aligned} 112 &= x\,(t + 1) \\ 112 &= (x + 2)\cdot t \end{aligned}\right\} \quad x = \frac{112}{t + 1}$$

$$112 = \left(\frac{112}{t + 1} + 2\right)\cdot t; \qquad 112 = \frac{112 \cdot t}{t + 1} + 2\,t$$

$112\,t + 112 = 112\,t + 2\,t^2 + 2\,t$

$2\,t^2 + 2\,t - 112 = 0$

$t^2 + t - 56 = 0$

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 224}}{2} = \frac{-1 \pm 15}{2} = \begin{cases} -8 \\ 7 \end{cases}$$

Como un tiempo negativo no tiene sentido, la solución es 7 horas y entonces las velocidades se obtienen sustituyendo este valor en el de x:

$x = \frac{112}{8} = 14$ km/h. y el otro: 16 km/h.

26 Llamamos *a* y *b* a estos números:

$$a + b = a \cdot b = \frac{a}{b}$$

luego:

$$\left.\begin{array}{l} a + b = \dfrac{a}{b} \\ a \cdot b = \dfrac{a}{b} \end{array}\right\} \rightarrow b^2 = 1 \qquad b = \pm 1$$

Por tanto:

Si $b = 1$ $\quad a + 1 = a$ No tiene solución.

Si $b = -1$ $\quad a - 1 = -a\,,\ 2a = 1\,,\ a = \dfrac{1}{2}$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE
EDUCACION A DISTANCIA

MATEMATICAS BASICAS

UNIDAD DIDACTICA/5

Preparado por los profesores:
C. Herrera González
J. R. Marco Franco
J. Summers Gámez

TEMA XVIII

COMBINATORIA

ESQUEMA/RESUMEN

1. Factoriales
2. Números combinatorios
   - 2.1. Definición
   - 2.2. Propiedades
   - 2.3. Triángulo de Tartaglia
3. Binomio de Newton
4. Variaciones
   - 4.1. Sin repetición
   - 4.2. Con repetición
5. Permutaciones
6. Combinaciones

INSTRUCCIONES PARA EL ESTUDIO DEL TEMA

Iniciamos la quinta Unidad Didáctica estudiando algunos conceptos fundamentales de *Combinatoria*, parte de la matemática, pensamos, conocida por la mayoría de nuestros alumnos por sus varias aplicaciones a la vida de todos los días.

En esta ocasión procedemos, como lo hicimos en otras ocasiones, aplicando algunas ideas estudiadas en la Unidad Didáctica primera. Para comprender las variaciones, permutaciones y combinaciones es muy importante que el alumno tenga claro el concepto de aplicaciones entre dos conjuntos. Si no ocurre así, aconsejamos que repase estos conocimientos antes de adentrarse en el estudio que ahora proponemos.

1. FACTORIALES

Si n es un número natural mayor que uno, se llama factorial de n, y se representa por n!, al producto de los n primeros números naturales, excluido el cero. Es decir,

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$$

Así, factorial de 5 se representa por 5! y es igual a:

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

De la misma forma:

$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

Si n es un número natural menor o igual a uno (es decir, si n es cero o uno), se llama, por definición, factorial de n a la unidad. O sea:

$$1! = 1 \quad \text{y} \quad 0! = 1$$

2. NUMEROS COMBINATORIOS

2.1. Definición

Dados dos números naturales *m* y *n*, siendo $m \geqslant n$, se llama número combinatorio «*m sobre n*», y se representa por $\binom{m}{n}$, al número $\dfrac{m!}{n!\,(m-n)!}$. Al número m se le llama *base* del número combinatorio, y al número n se le llama *orden*.

Así, por ejemplo, 7 sobre 3 será:

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\,(7-3)!} = \frac{7!}{3!\,4!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2} = 35$$

De igual manera, 8 sobre 5 valdrá:

$$\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!\,3!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot \not{5}!}{\not{5}!\,3!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2} = 8\cdot 7 = 56$$

y 3 sobre 3:

$$\binom{3}{3} = \frac{3!}{3!\,0!} = \frac{1}{1} = 1$$

2.2. Propiedades

Veamos algunas propiedades que verifican los números combinatorios:

- $\binom{m}{0} = 1$ para cualquier número natural m

ya que

$$\binom{m}{0} = \frac{m!}{0!\,(m-0)!} = \frac{m!}{m!} = 1$$

- $\binom{m}{1} = m$ para cualquier número natural m

puesto que

$$\binom{m}{1} = \frac{m!}{1!\,(m-1)!} = \frac{m\cdot(m-1)!}{(m-1)!} = m$$

- $\binom{m}{m} = 1$ cualquiera que sea el número natural m

porque

$$\binom{m}{m} = \frac{m!}{m!\,(m-m)!} = \frac{m!}{m!\,0!} = 1$$

- Dos números combinatorios de bases iguales y órdenes complementarios (que sumados dan la base) son iguales. Es decir,

$$\binom{m}{m-n} = \binom{m}{n}$$

Demostración:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$

$$\binom{m}{m-n} = \frac{m!}{(m-n)!\,(m-m+n)!} = \frac{m!}{(m-n)!\,n!}$$

por lo tanto, ambos números combinatorios son iguales.

Así, por ejemplo, los números combinatorios $\binom{6}{4}$ y $\binom{6}{6-4} = \binom{6}{2}$ son iguales

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!\,2!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\,4!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

Análogamente serán iguales los números

$$\binom{10}{7} \text{ y } \binom{10}{3}$$

- La suma de dos números combinatorios de igual base y órdenes consecutivos, es igual a otro número combinatorio que tiene por base la anterior aumentada en una unidad y por orden el mayor de los órdenes anteriores. Es decir,

$$\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+1}{n+1}$$

Demostración:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!} \quad \text{y} \quad \binom{m}{n+1} = \frac{m!}{(n+1)!\,(m-n-1)!}$$

Si sumamos estos dos números:

$$\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!} + \frac{m!}{(n+1)!\,(m-n-1)!} =$$

reducimos a común denominador, multiplicando el primer sumando por $(n+1)$ y el segundo sumando por $(m-n)$

$$= \frac{m!\,(n+1)}{(n+1)!\,(m-n)!} + \frac{m!\,(m-n)}{(n+1)!\,(m-n)!} = \frac{m!\,(n+1) + m!\,(m-n)}{(n+1)!\,(m-n)!} =$$

$$= \frac{m!\,[(n+1) + (m-n)]}{(n+1)!\,(m-n)!} = \frac{m!\,(m+1)}{(n+1)!\,(m-n)!} = \frac{(m+1)!}{(n+1)!\,(m-n)!}$$

y esta expresión coincide con

$$\binom{m+1}{n+1}$$

ya que

$$\binom{m+1}{n+1} = \frac{(m+1)!}{(n+1)!\,(m+1-n-1)!} = \frac{(m+1)!}{(n+1)!\,(m-n)!}$$

Hemos comprobado la certeza de esta propiedad. Así, por ejemplo, se verificará que:

$$\binom{7}{3} + \binom{7}{4} = \binom{8}{4}$$

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\,4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} \quad 35$$

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!\,3!} = 35$$

$$\binom{8}{4} = \frac{8!}{4!\,4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 5}{4} = 70$$

y evidentemente 35 + 35 = 70.

Análogamente se verificará que:

$$\binom{10}{5} + \binom{10}{6} = \binom{11}{6}$$

$$\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!\,5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{5 \cdot 4} = 252$$

$$\binom{10}{6} = \frac{10!}{6!\,4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8} \cdot 7}{\cancel{4} \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot 1} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 7}{3} = 210$$

$$\binom{11}{6} = \frac{11!}{6!\,5!} = \frac{11 \cdot \cancel{10} \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{\cancel{5} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2}} = \frac{11 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3} = 462$$

$$252 + 210 = 462$$

Luego, hemos comprobado que se verifica esta propiedad.

2.3. Triángulo de Tartaglia

En algunas ocasiones los números combinatorios suelen presentarse en una disposición particular, en forma de triángulo:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & & \binom{2}{2} & & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & & \binom{3}{3} & & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}$$

.....

Si sustituimos cada uno de estos números combinatorios por su valor, obtenemos:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Esta disposición de números se conoce con el nombre de *Triángulo de Tartaglia*. Conviene observar que en este triángulo los extremos de cada fila son unos y que cada número se obtiene sumando los dos números que tiene encima; por tanto, los números de cada fila se obtienen de los de la precedente.

Ejercicios y ejemplos

1. Hallar factorial de 7 y factorial de 3

$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$$

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

2. Hallar $\binom{9}{7}$ y $\binom{5}{3}$

$$\binom{9}{7} = \frac{9!}{7!\,2!} = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36$$

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

3. Averiguar si son iguales o distintos los números combinatorios:

$$\binom{10}{4} \text{ y } \binom{10}{6}$$

Son iguales, ya que verifican la propiedad.

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n} \text{ pues } \binom{10}{4} = \binom{10}{10-6} = \binom{10}{6}$$

4. Sabiendo que se verifica la igualdad:

$$\binom{5}{3} + \binom{x}{y} = \binom{6}{3}$$

hallar cuánto vale x e y.

Aplicando la propiedad de los números combinatorios:

$$\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+1}{n+1}$$

se obtiene que x = 5 e y = 2, o sea,

$$\binom{5}{3} + \binom{5}{2} = \binom{6}{3}$$

3. BINOMIO DE NEWTON

Si elevamos a la potencia 1 el binomio (a + b), obtenemos:

$$(a+b)^1 = a + b = 1 \cdot a + 1 \cdot b$$

recordando algunas propiedades de los números combinatorios:

$$\binom{1}{0} = 1 \qquad \binom{1}{1} = 1$$

podemos escribir:

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0} a + \binom{1}{1} b$$

Estos dos números combinatorios son los que aparecen en segunda fila en el triángulo de Tartaglia.

Si elevamos a la potencia 2 el binomio (a + b), obtenemos:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

recordando que:

$$\binom{2}{0} = 1 \; ; \quad \binom{2}{1} = 2 \quad \text{y} \quad \binom{2}{2} = 1$$

podemos poner:

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} ab + \binom{2}{2} b^2$$

Los números combinatorios que aparecen en esta expresión son los de la tercera fila del triángulo de Tartaglia.

Si multiplicamos ambos miembros de la igualdad por (a + b), resulta:

$$(a+b)^2 \cdot (a+b) = \left[\binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} ab + \binom{2}{2} b^2\right](a+b)$$

$$(a+b)^3 = \binom{2}{0} a^2(a+b) + \binom{2}{1} ab(a+b) + \binom{2}{2} b^2(a+b) = \binom{2}{0} a^3 + \binom{2}{0} a^2b +$$

$$+ \binom{2}{1} a^2b + \binom{2}{1} ab^2 + \binom{2}{2} ab^2 + \binom{2}{2} b^3 = \binom{2}{0} a^3 + \left[\binom{2}{0} + \binom{2}{1}\right] a^2b +$$

$$+ \left[\binom{2}{1} + \binom{2}{2}\right] ab^2 + \binom{2}{2} b^3$$

aplicando algunas propiedades de los números combinatorios:

$$\binom{2}{0} + \binom{2}{1} = \binom{3}{1} \quad y \quad \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = \binom{3}{2}$$

$$\binom{2}{0} = \binom{3}{0} = 1 \qquad \binom{2}{2} = \binom{3}{3} = 1$$

podemos escribir:

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0} a^3 + \binom{3}{1} a^2b + \binom{3}{2} ab^2 + \binom{3}{3} b^3$$

Observamos que estos números combinatorios son los que aparecen en cuarta fila en el triángulo de Tartaglia.

Siguiendo el procedimiento anterior, multiplicamos el resultado por a + b

$$(a+b)^3(a+b) = \left[\binom{3}{0} a^3 + \binom{3}{1} a^2b + \binom{3}{2} ab^2 + \binom{3}{3} b^3\right](a+b)$$

$$(a+b)^4 = \binom{3}{0} a^3(a+b) + \binom{3}{1} a^2b(a+b) + \binom{3}{2} ab^2(a+b) + \binom{3}{3} b^3(a+b) = \binom{3}{0} a^4 +$$

$$+ \binom{3}{0} a^3b + \binom{3}{1} a^2b^2 + \binom{3}{1} a^3b + \binom{3}{2} a^2b^2 + \binom{3}{2} ab^3 + \binom{3}{3} ab^3 + \binom{3}{3} b^4 = \binom{3}{0} a^4 +$$

$$+ \left[\binom{3}{0} + \binom{3}{1}\right] a^3b + \left[\binom{3}{1} + \binom{3}{2}\right] a^2b^2 + \left[\binom{3}{2} + \binom{3}{3}\right] ab^3 + \binom{3}{3} b^4$$

recordando que:

$$\binom{3}{0} + \binom{3}{1} = \binom{4}{1} \; ; \; \binom{3}{1} + \binom{3}{2} = \binom{4}{2} \; ; \; \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = \binom{4}{3}$$

$$\binom{3}{0} = \binom{4}{0} = 1 \quad y \quad \binom{3}{3} = \binom{4}{4} = 1$$

y sustituyendo estos valores se obtiene:

$$(a + b)^4 = \binom{4}{0} a^4 + \binom{4}{1} a^3b + \binom{4}{2} a^2b^2 + \binom{4}{3} ab^3 + \binom{4}{4} b^4$$

Por inducción podemos obtener una expresión general para un número natural n cualquiera:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3}b^3 + \ldots + \binom{n}{n-1} \cdot ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

A esta expresión se le llama *binomio de Newton*. Y sirve para calcular la potencia n-sima de un binomio.

Por ejemplo, si queremos calcular $(x + 2)^6$, utilizamos el binomio de Newton, y se obtiene:

$$(x + 2)^6 = \binom{6}{0} x^6 + \binom{6}{1} x^5 \cdot 2 + \binom{6}{2} x^4 \cdot 2^2 + \binom{6}{3} x^3 \cdot 2^3 + \binom{6}{4} x^2 \cdot 2^4 + \binom{6}{5} x \cdot 2^5 + \binom{6}{6} 2^6$$

sustituyendo los números combinatorios por sus correspondientes valores, obtenidos aplicando la definición o utilizando el triángulo de Tartaglia (*):

$$(x + 2)^6 = 1 \cdot x^6 + 6 \cdot 2x^5 + 15 \cdot 4x^4 + 20 \cdot 8x^3 + 15 \cdot 16x^2 + 6 \cdot 32x + 1 \cdot 64 =$$

$$= x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64$$

Veamos otro ejemplo. Vamos a calcular $(x - y)^5$ aplicando el binomio de Newton. Hay que tener en cuenta que

$$x - y = x + (- y)$$

entonces resultará que:

$$(x - y)^5 = [x + (- y)]^5 = \binom{5}{0} x^5 + \binom{5}{1} x^4 (- y) + \binom{5}{2} x^3 (- y)^2 + \binom{5}{3} x^2 (- y)^3 +$$

$$+ \binom{5}{4} x (- y)^4 + \binom{5}{5} (- y)^5$$

(*) La séptima fila del triángulo de Tartaglia está formada por los coeficientes en forma de números combinatorios de $(x + 2)^6$. Si el alumno calcula esta fila se evita el cálculo por el otro procedimiento de estos coeficientes. La séptima fila del triángulo de Tartaglia es: 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1.

los coeficientes de este desarrollo corresponden a la sexta fila del triángulo de Tartaglia. Observemos que las potencias impares de (– y) proporcionan el signo menos delante de los coeficientes, en los términos segundo, cuarto y sexto del segundo miembro:

$$(x - y)^5 = x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$$

Elevemos ahora a la cuarta potencia el binomio $(x^2 - 2xy)$

$$(x^2 - 2xy)^4 = \binom{4}{0}(x^2)^4 + \binom{4}{1}(x^2)^3(-2xy) +$$

$$+\binom{4}{2}(x^2)^2(-2xy)^2 + \binom{4}{3}x^2(-2xy)^3 + \binom{4}{4}(-2xy)^4$$

En este caso los números combinatorios corresponden a la quinta fila del triángulo de Tartaglia. Sustituyendo cada número combinatorio por su valor y operando se obtiene:

$$(x^2 - 2xy)^4 = x^8 - 4x^6 \cdot 2xy + 6x^4 \cdot 4x^2y^2 - 4x^2 \cdot 8x^3y^3 + 16x^4y^4 =$$

$$= x^8 - 8x^7y + 24x^6y^2 - 32x^5y^3 + 16x^4y^4$$

Ejercicios y ejemplos

1. Elevar a la cuarta potencia el binomio

$$\left(\frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}} - y\right)$$

Aplicando el binomio de Newton resulta:

$$\left(\frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}} - y\right)^4 = \binom{4}{0}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}}\right)^4 + \binom{4}{1}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}}\right)^3(-y) + \binom{4}{2}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}}\right)^2(-y)^2 +$$

$$+\binom{4}{3}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}}\right)(-y)^3 + \binom{4}{4}(-y)^4 =$$

$$= \frac{2^4}{3^4}x^2 - 4 \cdot \frac{2^3}{3^3}x^{3/2}y + 6 \cdot \frac{2^2}{3^2}xy^2 - 4 \cdot \frac{2}{3}x^{1/2}y^3 + y^4 = \frac{16}{81}x^2 -$$

$$-\frac{32}{27}x^{3/2}y + \frac{24}{9}xy^2 - \frac{8}{3}x^{1/2}y^3 + y^4$$

2. Averiguar el noveno término de

$$\left(x - \frac{1}{x^{1/2}}\right)^{12}$$

La fórmula del binomio de Newton también se puede escribir abreviadamente, como:

$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

el símbolo $\sum_{r=0}^{n}$ significa que hay que ir sumando, dando valores a r desde cero hasta n, es decir, para $r = 0, r = 1, r = 2, \ldots, r = n$.

En nuestro caso, el primer término empezará por $\binom{12}{0}$, el segundo por $\binom{12}{1}$, el tercero por $\binom{12}{2}$, etc. El noveno empezará por $\binom{12}{8}$, entonces $n = 12$ y $r = 8$; por lo tanto, resulta que el noveno término del desarrollo de

$$\left(x - \frac{1}{x^{1/2}}\right)^{12} \text{ es } \binom{12}{8} x^{12-8} \left(-\frac{1}{x^{1/2}}\right)^8 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} x^4 \frac{1}{x^4} = 495$$

3. Hallar el término en el que aparezca y^{12}, en el desarrollo de

$$\left(y^3 - \frac{x}{3}\right)^9$$

Aparecerá y^{12} cuando elevemos el primer término del binomio, y^3, a la cuarta potencia, es decir, cuando $n - r = 4$. Como $n = 9$, r valdrá 5; por tanto, habrá que elevar a 5 el segundo término del binomio. Así resultará:

$$\binom{9}{5} (y^3)^4 \cdot \left(\frac{-x}{3}\right)^5 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \; y^{12} \cdot \left(\frac{-x^5}{3^5}\right) = 126\, y^{12} \; \frac{-x^5}{243} = \frac{-14}{27} y^{12} x^5$$

que es el sexto término de dicho binomio.

4. Calcular $(1{,}02)^{12}$ con cuatro decimales exactos.

Podemos ponerlo de la forma:

$(1{,}02)^{12} = (1 + 0{,}02)^{12}$ y aplicar la fórmula del binomio de Newton.

$$(1 + 0{,}02)^{12} = \binom{12}{0} 1^{12} + \binom{12}{1} 1^{11} \cdot 0{,}02 + \binom{12}{2} 1^{10} \cdot (0{,}02)^2 +$$

$$+ \binom{12}{3} 1^9 \cdot (0{,}02)^3 + \binom{12}{4} 1^8 \cdot (0{,}02)^4 + \ldots = 1 + 12 \cdot 0{,}02 +$$

$$+ \frac{12 \cdot 11}{2} \cdot (0{,}02)^2 + \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot (0{,}02)^3 + \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot (0{,}02)^4 + \ldots$$

$$\ldots = 1 + 0{,}24 + 0{,}0264 + 0{,}00176 + 0{,}00008 + \ldots = 1{,}26824.$$

Luego $(1{,}02)^{12} = 1{,}2682$.

4. VARIACIONES

4.1. Variaciones sin repetición

Consideremos los conjuntos $M = \{1, 2, 3, ..., m\}$ y $N = \{1, 2, 3, ..., n\}$, de forma que card (M) = m y card (N) = n, siendo $n > m$.

Vamos a averiguar cuántas aplicaciones inyectivas se pueden establecer entre M y N, siendo M el conjunto de partida y N el de llegada. Empezando por el elemento $1 \in M$, hay n posibilidades u opciones para determinar su imagen en N (su imagen puede ser: el 1, el 2 el 3, ... ó el n). Fijada esta imagen, tomamos el elemento $2 \in M$, tenemos ahora $n - 1$ posibilidades para elegir su imagen en N (pues hay un elemento de n que es la imagen del $1 \in M$). Tomamos a continuación otro elemento de M, $3 \in M$, como ya hemos fijado dos imágenes, tenemos $n - 2$ posibilidades para determinar su imagen. Este proceso se puede repetir para todos los elementos de M, de forma que cuando tengamos fijadas las imágenes de los $m - 1$ elementos de M, es decir, de los elementos 1, 2, 3, 4, ..., $m - 1$, para averiguar la imagen del último elemento de M, $m \in M$, quedan $n - (m - 1)$ posibilidades en N.

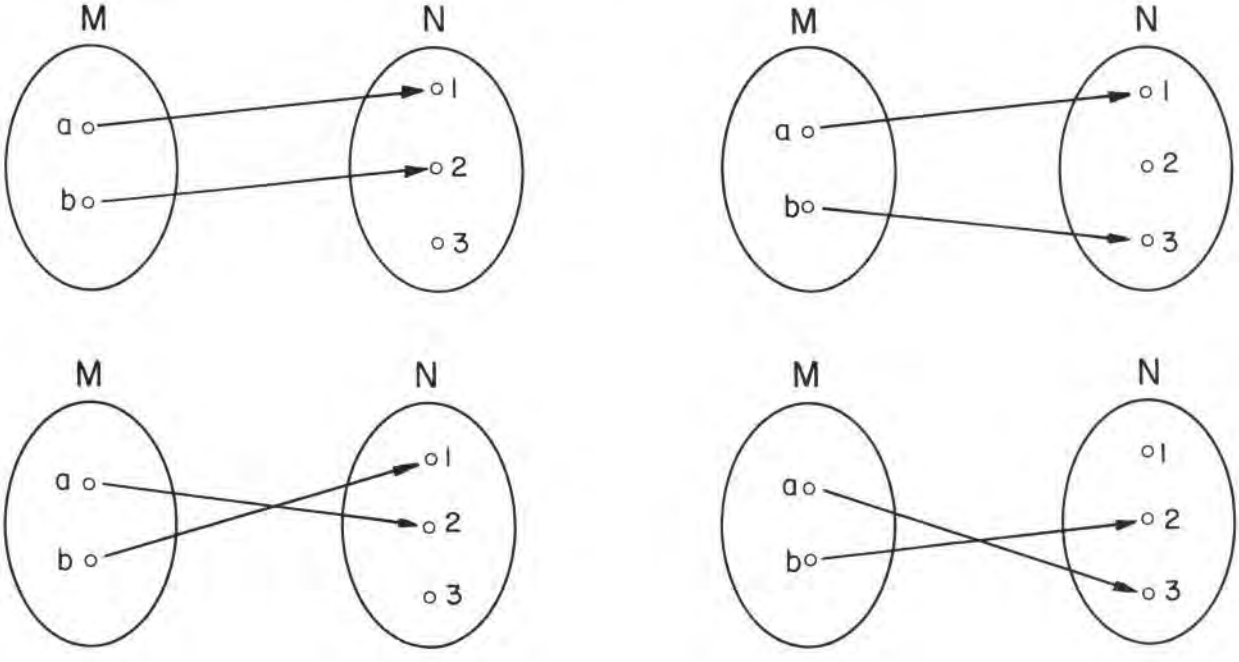
Entonces el número de aplicaciones inyectivas que se pueden establecer entre los conjuntos M y N lo designaremos por $V_{n,m}$ y vendrá dado por la expresión siguiente:

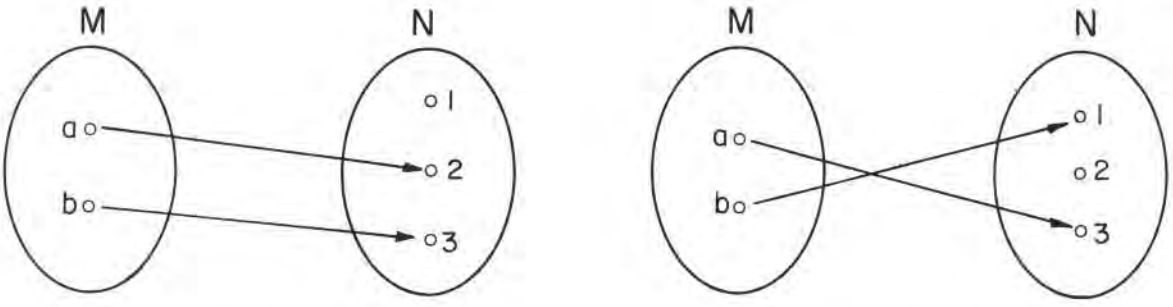
$$V_{n,m} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \ldots (n - m + 1)$$

A cada una de las aplicaciones construidas la llamamos una variación de orden m formada entre n elementos. Es evidente que al dar la imagen de cada aplicación, los elementos aparecen ordenados y sabemos cuál es la imagen de cada elemento.

Y al conjunto de todas las aplicaciones inyectivas (o mejor dicho, al conjunto de las imágenes de dichas aplicaciones) que hemos formado se le llama *variaciones de n elementos tomados de m en m*.

Consideremos un ejemplo. Sean los conjuntos $M = \{a, b\}$ y $N = \{1, 2, 3\}$, vamos a hallar todas las aplicaciones inyectivas de M en N. En este caso $m = 2$ y $n = 3$. Expresaremos con diagramas de Venn todas las posibles aplicaciones inyectivas de M en N.





Estas son las seis aplicaciones inyectivas que existen de M en N. Las imágenes de estas aplicaciones son:

12 13 21 32 23 31

estas imágenes son todas las variaciones de los elementos 1, 2 y 3 tomados de dos en dos.

Conviene tener presente que no es lo mismo la variación 12 que la 21, es decir, influye el orden (no es lo mismo que al elemento *a* le corresponda el elemento *1* y al elemento *b* le corresponda el elemento *2*, que al *a* le corresponda el *2* y al *b* el *1*).

Aplicando la expresión:

$$V_{n,m} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$$

podemos averiguar el número de variaciones que existen, obtenemos:

$$V_{3,2} = 3 \cdot 2 = 6$$

que son precisamente las arriba señaladas.

Veamos otro ejemplo: Con los números 1, 2, 3 y 4, ¿cuántos números diferentes de dos cifras se pueden formar sin repetir ninguna cifra?

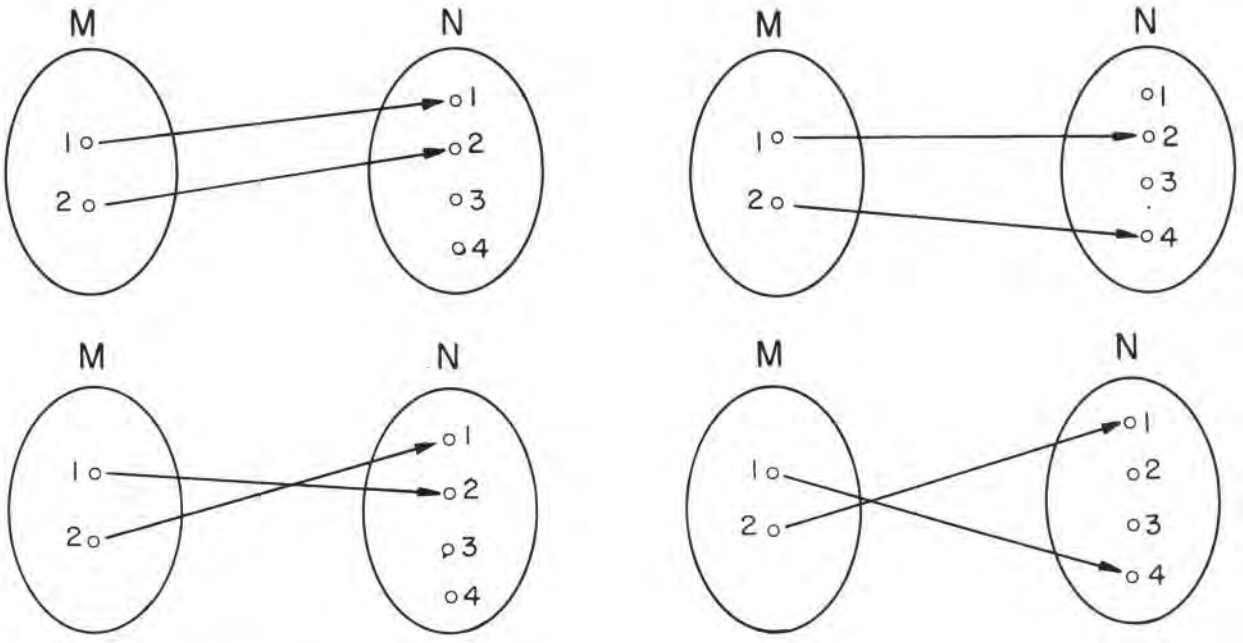
Tenemos que averiguar el número de variaciones sin repetición de cuatro elementos tomados de dos en dos.

$$V_{4,2} = 4 \cdot 3 = 12$$

Habrá, por tanto, 12 números, que serán las imágenes de todas las aplicaciones inyectivas del conjunto M = {1, 2} en el N = {1, 2, 3, 4}. Dichas imágenes serán:

12 21 31 41
13 23 32 42
14 24 34 43

Representamos algunas de estas aplicaciones:



4.2. Variaciones con repetición

Consideremos el mismo planteamiento que en el apartado anterior, pero sin exigir que las aplicaciones sean inyectivas. No importa que dos elementos distintos de M tengan la misma imagen en N. Lo que interesa ahora es que cada elemento de M tenga una sola imagen en N.

Al no exigir que las aplicaciones sean inyectivas, tampoco es necesaria la restricción $m < n$.

Si consideramos el primer elemento de M, existen n posibilidades para determinar su imagen en N. Una vez fijada la imagen del primer elemento, siguen quedando n posibilidades para determinar la imagen del segundo elemento de M. Lo mismo ocurrirá con el tercer elemento y con todos los siguientes de M.

Por tanto, el número de imágenes obtenidas por todas las aplicaciones posibles de M en N lo representamos por $V'_{n,m}$, vendrá dado por la expresión:

$$V'_{n,m} = n \cdot n \cdot n \cdot \overset{m \text{ veces}}{\cdots\cdots} \cdot n = n^m$$

A cada una de estas aplicaciones la llamamos una variación con repetición de orden m entre n elementos. Y al conjunto de todas las aplicaciones (de todas las imágenes), las *variaciones con repetición* de n elementos tomados de m en m.

Veamos un ejemplo: ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con los números 3 y 4 con repetición?

Averiguamos las variaciones de 2 elementos tomados de 3 en 3, o sea:

$$V'_{2,3} = 2^3 = 8$$

Los números pedidos serán:

333, 334, 343, 433, 443, 434, 344 y 444

Otro problema, ¿de cuántas formas diferentes se puede rellenar una quiniela?

Observemos que se trata de constituir todas las aplicaciones posibles entre el conjunto formado por las 14 parejas de equipos y el conjunto formado por símbolos 1, X, 2.

Por tanto, habrá que hallar las variaciones con repetición de tres elementos (1, X, 2) tomados de 14 en 14.

$$V'_{3,14} = 3^{14} = 4782969$$

Es decir, hay 4.782.969 formas diferentes de rellenar una quiniela.

5. PERMUTACIONES

Sean dos conjuntos M y N que tengan el mismo número de elementos, es decir,

$$\text{card } (M) = \text{card } (N) = n$$

Se trata de averiguar el número de aplicaciones biyectivas que se pueden establecer entre ambos conjuntos. Este problema es el mismo que el del apartado 4.1, con la restricción n = m. Si representamos por P_n el número de aplicaciones biyectivas, se verifica que:

$$P_n = n(n-1) \cdot (n-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Recordando la definición de factorial resultará:

$$P_n = n!$$

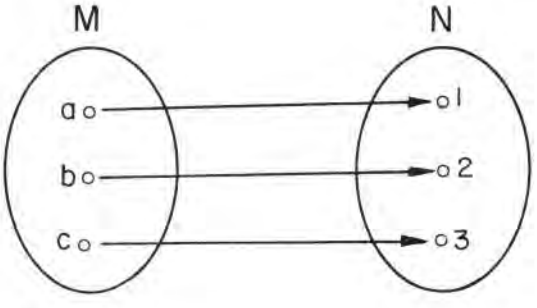
Al conjunto de todas las aplicaciones biyectivas (de todas las imágenes), se les llama *permutaciones de n elementos.*

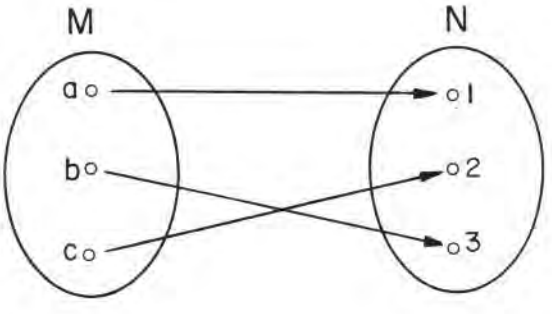
Por ejemplo, vamos a calcular cuántas aplicaciones biyectivas existen entre los conjuntos

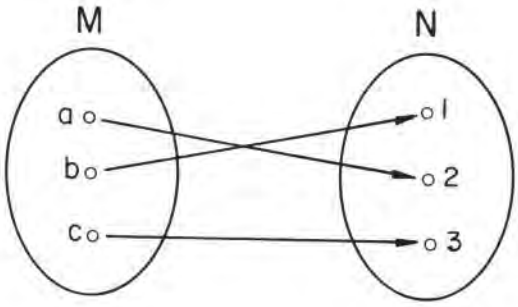
$$M = \{a, b, c\} \text{ y } N = \{1, 2, 3\}$$

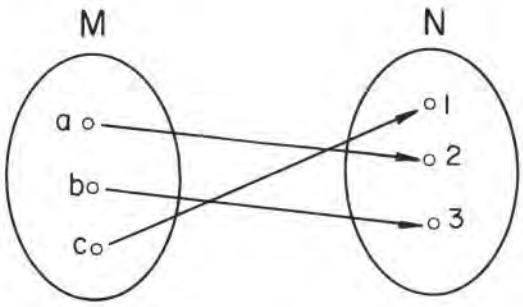
$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

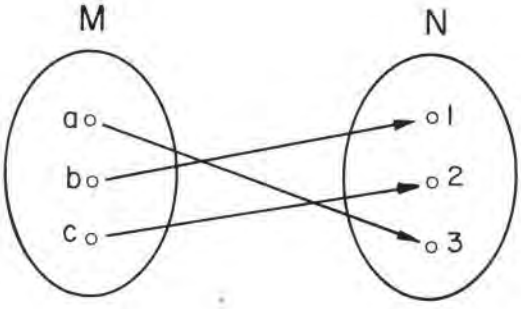
Dichas aplicaciones serán:

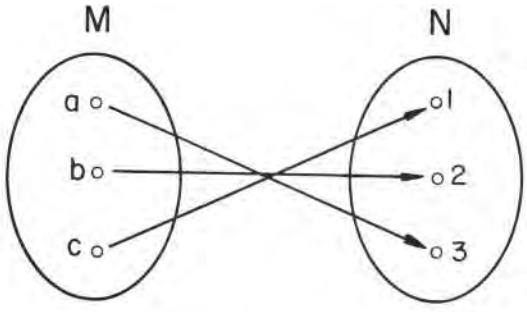












Y las permutaciones de los elementos 1, 2 y 3 serán:

123	213	312
132	231	321

Consideramos otro ejemplo, ¿de cuántas formas posibles se pueden sentar juntos seis amigos en las butacas de un teatro?

Está claro que se trata de hallar el número de aplicaciones biyectivas que se pueden establecer entre el conjunto formado por los seis amigos y el conjunto de las seis butacas.

Por tanto, será:

$$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

Luego hay 720 formas posibles.

6. COMBINACIONES

Consideremos el conjunto A = {1, 2, 3, 4, 5} cuyo cardinal es 5, card (A) = 5.

Formemos todos los subconjuntos de A de un elemento, es decir, todos los subconjuntos unitarios:

$$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$$

hemos formado así las *combinaciones* de orden 1 con los cinco elementos del conjunto A.

BIBLIOTECA PUBLICA PTO. STA. MARIA

Análogamente podemos formar todos los subconjuntos de 3 elementos:

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\},$$

$$\{1, 4, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}$$

Estos subconjuntos son las *combinaciones* de orden 3 que se pueden formar con los 5 elementos de A.

Las combinaciones de orden 4 serán:

$$\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}$$

En general, podemos decir que dado un conjunto finito *N*, de *n* elementos, card (N) = n, llamamos *combinaciones* de orden m, con los elementos de N, a todos los subconjuntos de N cuyo cardinal sea m (*). Y lo representaremos con $C_{n,m}$ (combinaciones de n elementos tomados de m en m).

En el ejemplo anterior construimos ahora las combinaciones de orden 2:

$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}$$

A la vista de los resultados vamos a calcular el número de combinaciones que existen en cada caso.

Sabemos que $\phi \subset A$, y que el vacío es el único subconjunto de cero elementos, por lo que podemos decir que existe una única combinación de orden 0. Representaremos el número de combinaciones de orden 0, formadas a partir de A, por $C_{5,0}$. Podemos escribir:

$$C_{5,0} = 1$$

recordando lo visto al estudiar los números combinatorios:

$$\binom{5}{0} = 1$$

resulta:

$$C_{5,0} = \binom{5}{0}$$

Hemos visto que el número de combinaciones de orden 1, obtenidas a partir del conjunto A eran 5; luego:

$$C_{5,1} = 5$$

como sabemos que

$$\binom{5}{1} = 5,$$

(*) Obsérvese que $m \leqslant n$, pues no se pueden formar subconjuntos cuyo cardinal sea mayor que *n*.

resulta:

$$C_{5,1} = \binom{5}{1}$$

A partir del conjunto A hemos formado 10 subconjuntos de cardinal 2. Luego

$$C_{5,2} = 10$$

pero como

$$\binom{5}{2} = 10,$$

podemos poner:

$$C_{5,2} = \binom{5}{2}$$

Análogamente hemos formado 10 subconjuntos de 3 elementos, 5 subconjuntos de 4 elementos, y existe un único subconjunto de 5 elementos que es el propio conjunto A. Por lo tanto:

$$C_{5,3} = 10 \quad , \quad C_{5,4} = 5 \quad \text{y} \quad C_{5,5} = 1$$

Aplicando los números combinatorios

$$\binom{5}{3} = 10 \qquad \binom{5}{4} = 5 \qquad \text{y} \quad \binom{5}{5} = 1$$

Resulta que:

$$C_{5,3} = \binom{5}{3}, \; C_{5,4} = \binom{5}{4} \text{y} \quad C_{5,5} = \binom{5}{5}$$

Este desarrollo podemos generalizarlo para un conjunto de n elementos, entonces el número de combinaciones de orden m entre los n elementos será:

$$C_{n,m} = \binom{n}{m}$$

Entre $C_{n,m}$, $V_{n,m}$ y P_m se puede establecer una relación, están ligados entre sí, como vamos a comprobar a continuación.

Sabíamos que:

$$V_{n,m} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(m-1))$$

que se puede escribir:

$$V_{n,m} = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Por otra parte:

$$C_{n,m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \quad \text{y} \quad P_m = m!$$

por lo tanto,

$$V_{n,m} = C_{n,m} \cdot P_m$$

pues

$$\frac{n!}{(n-m)!} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \cdot m!$$

Terminamos este apartado con algunos ejemplos para aclarar lo visto en el mismo.

Dado el conjunto A = {a, b, c, d, e, f, g, h}, ¿cuántos subconjuntos de cuatro elementos se pueden formar?

Tenemos que averiguar las combinaciones de ocho elementos tomados de cuatro en cuatro:

$$C_{8,4} = \binom{8}{4} = \frac{8!}{4!\,4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70$$

Por tanto, se pueden formar 70 subconjuntos distintos.

Consideremos ahora los números *2, 3, 4, 5, 6* y *7*, ¿cuántos productos distintos de dos factores podemos formar con ellos? Tenemos que tener presente que obtenemos el mismo resultado al multiplicar *2* por *5* que *5* por *2*. Por tanto, el orden no influye, se trata de calcular el número de combinaciones de seis objetos tomados *2* a 2, y descontar 1, pues al multiplicar 2 por 6 y 3 por 4 se obtiene el mismo resultado 12:

$$C_{6,2} = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\,4!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15 \quad , \quad 15 - 1 = 14$$

Se pueden formar 14 productos distintos.

Ejemplos y ejercicios

1. ¿Cuántos números de dos cifras se pueden escribir con los números 1, 3, 5, 7, 9, sin repetir ninguno?

   En primer lugar observaremos que el orden influye, ya que no sería lo mismo el número 13 que el 31.

   Lo que tendremos que calcular serán las variaciones de 5 elementos tomados de 2 en 2.

   $V_{5,2} = 5 \cdot 4 = 20$

   luego podemos formar 20 números con las cifras 1, 3, 5, 7, 9.

2. Con las cifras dadas en el ejemplo anterior, ¿cuántos números de seis cifras se pueden formar pudiendo repetirlas?

   En este caso habrá que hallar las variaciones con repetición de 5 elementos tomados de 6 en 6:

   $V'_{5,6} = 5^6 = 15.625$

   por tanto, se pueden formar 15.625 números de seis cifras.

3. ¿Cuántas ordenaciones se pueden formar con las letras de la palabra EUROPA?

   Serán permutaciones de 6 elementos:

   $P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

   se pueden formar 720 ordenaciones.

4. Con 10 colores diferentes, hallar cuántas mezclas se pueden hacer tomando 3 colores cada vez.

   Como el orden no interviene, pues se obtendrá la misma mezcla si tomamos los colores en diferente orden, serán las combinaciones de 10 elementos tomados de 3 en 3.

$$C_{10,3} = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!\,7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

   existirán 120 mezclas.

NOTAS ACLARATORIAS Y COMPLEMENTARIAS

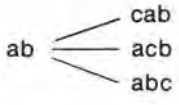
• Vamos a introducir la idea de permutación de otra manera: dado un conjunto finito de cardinal *m*, se llaman permutaciones de los *m* elementos a las ordenaciones totales que pueden hacerse con los elementos de este conjunto. Así podemos decir que un conjunto unitario {a} solamente puede ordenarse de una manera. En el conjunto {a, b} puede hacerse la ordenación de dos formas:

ab y ba

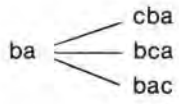
y el conjunto {a, b, c} puede ordenarse de seis modos:

abc , acb , bac , bca , cab , cba

Este proceso se puede sistematizar, por ejemplo, a partir del conjunto {a, b} pasamos al conjunto {a, b, c} sin más que añadir el nuevo elemento c, lo hacemos tomando una permutación del primer conjunto y añadiendo el elemento c en cualquiera de las tres posiciones posibles, delante del primer elemento, entre el primero y el segundo y detrás del segundo elemento.

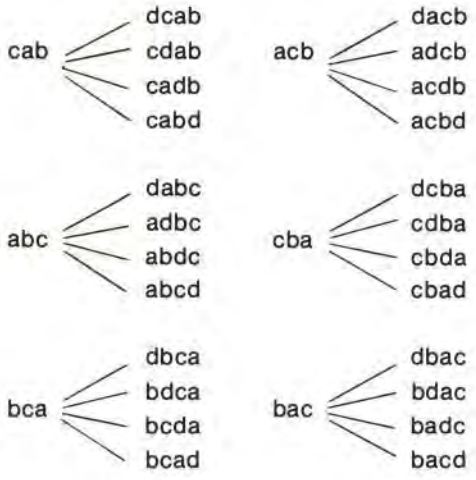


análogamente con la permutación ba



Hemos obtenido así las seis permutaciones del conjunto {a, b, c}, dos cualesquiera de estas permutaciones son distintas: hemos formado todas las posibles ordenaciones del conjunto {a, b, c}.

De forma análoga, conocidas todas las permutaciones del conjunto {a, b, c} podemos formar las del conjunto {a, b, c, d}. Tenemos que añadir el elemento d ocupando todas las posibles posiciones en cada una de las permutaciones de {a, b, c}.



Una vez establecido este criterio generalizable para cualquier cardinal, vamos a contar estas permutaciones.

Llamamos P_1 al número de permutaciones del conjunto {a} o de cualquier conjunto unitario tenemos:

$$P_1 = 1$$

P_2 es el número de permutaciones de {a, b} o de cualquier conjunto de cardinal 2:

$$P_2 = 2 = 2 \cdot 1 = 2!$$

P_3 es el número de permutaciones del conjunto {a, b, c} o de cualquier otro de cardinal 3. Hemos visto que a partir de una permutación de {a, b} obteníamos tres permutaciones de {a, b, c}.

$$P_3 = 3 \cdot P_2 = 3 \cdot 2! = 3!$$

Análogamente, P_4 es el número de permutaciones del conjunto {a, b, c, d} o de cualquier otro de 4 elementos. De cada una de las permutaciones de {a, b, c} obteníamos 4 del conjunto {a, b, c, d}. Luego:

$$P_4 = 4 \cdot P_3 = 4 \cdot 3! = 4!$$

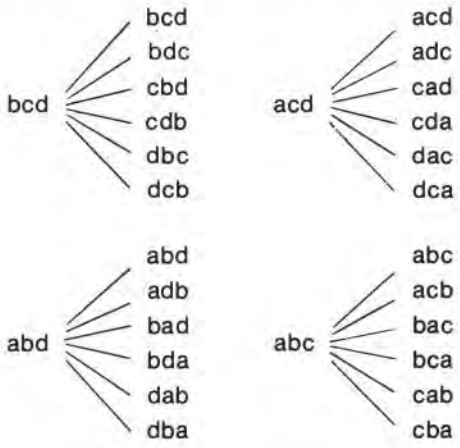
En general, dado un conjunto de cardinal *m*, P_m es el número de permutaciones que pueden construirse con los elementos de este conjunto. Este número se puede expresar por:

$$P_m = m!$$

• Vamos a llegar al concepto de variaciones por un camino distinto al presentado en el apartado 4.1. Sea el conjunto {a, b, c, d}. Vamos a formar todas las combinaciones de orden *3*:

{b, c, d} , {a, c, d} , {a, b, d} , {a, b, c}

permutamos cada uno de estos conjuntos de todos los modos posibles:



De esta manera hemos conseguido todos los posibles subconjuntos totalmente ordenados de *3* elementos, a partir del conjunto {a, b, c, d}. Habitualmente se dice que se han formado todas las variaciones de orden *3* a partir del conjunto {a, b, c, d}.

En general, dado un conjunto finito cuyo cardinal sea *n*, se llaman variaciones de orden *m* a los subconjuntos ordenados cuyo cardinal sea *m*.

En el caso que acabamos de analizar, $V_{4,3}$ sería el número de variaciones de orden *3* que pueden formarse a partir del conjunto {a, b, c, d}. Su número es fácil de calcular:

$$V_{4,3} = C_{4,3} \cdot P_3 = \binom{4}{3} \cdot 3! = \frac{4!}{3!} \cdot 3! = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

CONCLUSIONES TEMA XVIII

<table>
<tr><td rowspan="2">NUMEROS COMBINATORIOS</td><td>DEFINICION</td><td>Dados dos números naturales m y n, siendo $m \geq n$, se llama número combinatorio $\binom{m}{n}$ al número:
$\frac{m!}{n!\,(m-n)!}$</td></tr>
<tr><td>PROPIEDADES</td><td>1. $\binom{m}{0} = 1$
2. $\binom{m}{1} = m$
3. $\binom{m}{m} = 1$
4. $\binom{m}{m-n} = \binom{m}{n}$
5. $\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+1}{n+1}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">BINOMIO DE NEWTON</td><td>$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \ldots +$
$+ \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$
de forma abreviada:
$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^{n-r}b^r$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">VARIACIONES</td><td>SIN REPETICION</td><td>Dados los conjuntos M y N, siendo card (M) = m, card (N) = n y $n > m$. Llamamos variación de n elementos tomados de m en m al conjunto de todas las aplicaciones inyectivas (imágenes de dichas aplicaciones) del conjunto M en N
$V_{n,m} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$</td></tr>
<tr><td>CON REPETICION</td><td>Dados los conjuntos M y N, llamamos variación con repetición al número de imágenes obtenidas por todas las aplicaciones posibles de M en N:
$V'_{n,m} = n \cdot n \cdot n \overset{\text{m veces}}{\ldots\ldots} n = n^m$</td></tr>
</table>

PERMUTACIONES	Dados los conjuntos *M* y *N*, card (M) = card (N) = n, llamamos permutaciones de *n* elementos al conjunto de todas las aplicaciones biyectivas (de todas las imágenes) de M en N $P_n = n!$
COMBINACIONES	Dado un conjunto finito N, de *n* elementos, llamamos combinaciones de orden *m* con los elementos de N, a todos los subconjuntos de N cuyo cardinal sea *m* y lo representamos por $C_{n,m}$ $C_{n,m} = \binom{n}{m}$

EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. Hallar un número combinatorio que sumado al

$\binom{13}{8}$. resulte el número $\binom{14}{8}$

2. Aplicando las propiedades de los números combinatorios, decir cuáles de los siguientes números son iguales:

$\binom{6}{2}$, $\binom{5}{5}$, $\binom{7}{0}$, $\binom{13}{1}$, $\binom{6}{4}$, $\binom{10}{10}$, $\binom{11}{0}$, $\binom{13}{12}$

3. Hallar los números x, y, z en la siguiente expresión:

$$\binom{8}{x} + \binom{8}{y} = \binom{z}{5}$$

4. Desarrollar y simplificar:

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}y\right)^5$$

5. Calcular el término medio del desarrollo de

$$\left(x^{2/3} + \frac{1}{x^{1/2}}\right)^{10}$$

6. Averiguar el término en el que aparece x^4 en el desarrollo de

$$\left(\frac{2}{x} + \frac{x^2}{4}\right)^{14}$$

7. Calcular $(1{,}05)^8$ con tres cifras decimales exactas.

8. Calcular el término décimo del desarrollo de $(2a - 3x)^{10}$.

9. Simplificar la expresión:

$$\frac{n!\,(n-3)!}{(n+2)!\,(n-2)!}$$

10. Resolver la ecuación:

$$3 \cdot \binom{x+2}{3} = 5 \cdot \binom{x+1}{2}$$

11. ¿Cuántas ordenaciones diferentes pueden formarse con todas las letras de la palabra PERMUTACION? ¿Cuántas empiezan por P? ¿Cuántas empiezan por PER?

12. Sumar todos los números de cinco cifras que se pueden formar con las cifras 1, 2, 3, 4, 5 (sin repetición).

13. ¿De cuántas maneras se pueden repartir 12 personas en tres grupos de 2, 4 y 6 personas cada grupo? ¿Y en tres grupos, de 4 personas cada uno?

14. Con los elementos del conjunto A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, ¿cuántos números de tres cifras se pueden formar si la cifra de la izquierda no puede ser cero y no se pueden repetir las cifras?

15. Hallar el número de resultados distintos que pueden producirse en una carrera en la que participan 6 atletas para ocupar los dos primeros puestos.

16. ¿Cuántas representaciones de tres jugadores pueden formarse a partir de los once jugadores de un equipo de fútbol?

17. ¿De cuántos modos diferentes pueden colocarse 6 libros en una fila de una estantería?

18. ¿De cuántas formas se pueden colocar cuatro alumnos alrededor de una mesa redonda?

19. De un total de 5 franceses y 7 ingleses se forma un comité con 2 franceses y 3 ingleses. ¿De cuántas formas se pueden agrupar?

20. Sabiendo que $V_{n,m} = 840$ y $P_m = 24$, hallar $C_{n,m}$.

SOLUCION A LOS EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. Aplicando la propiedad de los números combinatorios:

$$\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+1}{n+1},$$

el número pedido es el $\binom{13}{7}$

2. $\binom{6}{2} = \binom{6}{4}$, $\binom{5}{5} = \binom{10}{10} = \binom{7}{0} = \binom{11}{0} = 1$, $\binom{13}{1} = \binom{13}{12}$

3. $z = 8 + 1 = 9$, $x = 5 - 1 = 4$ e $y = 5$ ó $x = 5$ e $y = 5 - 1 = 4$.

$$\binom{8}{4} + \binom{8}{5} = \binom{9}{5}$$

4. $$\left(x^2 + \frac{1}{2}\,y\right)^5 = \binom{5}{0}(x^2)^5 + \binom{5}{1}(x^2)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\,y\right) + \binom{5}{2}(x^2)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\,y\right)^2 +$$

$$+ \binom{5}{3}(x^2)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\,y\right)^3 + \binom{5}{4}(x^2) \cdot \left(\frac{1}{2}\,y\right)^4 + \binom{5}{5}\left(\frac{1}{2}\,y\right)^5 = x^{10} +$$

$$+ \frac{5}{2}x^8y + \frac{5}{2}x^6y^2 + \frac{5}{4}x^4y^3 + \frac{5}{16}x^2y^4 + \frac{y^5}{32}$$

5. Como hay once términos en total, el término medio es el sexto

$$\binom{10}{5}(x^{2/3})^5 \cdot \left(\frac{1}{x^{1/2}}\right)^5 = 252\ \frac{x^{10/3}}{x^{5/2}} = 252\ x^{5/6}$$

6. Hay que determinar p y q de forma que

$$\left(\frac{2}{x}\right)^p \cdot \left(\frac{x^2}{4}\right)^q$$

resulte el término en x^4. Por tanto, $2q - p = 4$, como además $p + q = 14$, resulta:

$$\left.\begin{array}{l} p + q = 14 \\ 2q - p = 4 \end{array}\right\}$$ resolviendo este sistema, se obtiene: $p = 8$ y $q = 6$.

Luego el término pedido será:

$$\binom{14}{6}\left(\frac{2}{x}\right)^8 \cdot \left(\frac{x^2}{4}\right)^6 = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{2^8}{x^8} \cdot \frac{x^{12}}{4^6} = \frac{3003}{16}\ x^4$$

y es el séptimo término del desarrollo.

7. $(1 + 0{,}05)^8 = \binom{8}{0}1^8 + \binom{8}{1} \cdot 1^7 \cdot 0{,}05 + \binom{8}{2} \cdot 1^6 \cdot (0{,}05)^2 +$

$$+\binom{8}{3}1^5 \cdot (0{,}05)^3 + \binom{8}{4}1^4 \cdot (0{,}05)^4 + \ldots = 1 + 8 \cdot 0{,}05 + \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot$$

$$\cdot\ 0{,}0025 + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} \cdot 0{,}000125 + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot 0{,}00000625 + \ldots = 1 +$$

$$+ 0{,}4 + 0{,}07 + 0{,}007 + 0{,}00043 + \ldots = 1{,}4774$$

La solución es 1'477.

8. $\binom{10}{9}2a \cdot (-3x)^9 = -10 \cdot 2a \cdot 3^9x^9 = -393.660\ ax^9$

9. $$\frac{n!\,(n-3)!}{(n+2)!\,(n-2)!} = \frac{n!\,(n-3)!}{(n+2)(n+1)n!\,(n-2)(n-3)!} =$$
$$= \frac{1}{(n+2)(n+1)(n-2)} = \frac{1}{(n^2-4)(n+1)}$$

10. $$\frac{3 \cdot (x+2)!}{3!\,(x-1)!} = \frac{5 \cdot (x+1)!}{2!\,(x-1)!} \quad ; \quad \frac{3 \cdot (x+2)!}{3 \cdot 2} = \frac{5 \cdot (x+1)!}{2} \quad ; \quad \frac{(x+2)!}{(x+1)!} = 5$$

$(x + 2) = 5 \qquad x = 3$

11. $P_{11} = 11! = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 39.916.800$

empiezan por P: $P_{10} = 10! = 3.628.800$

empiezan por PER: $P_8 = 8! = 40.320.$

12. El número total de sumandos es 5! = 120. Como en cada columna entrará $\frac{120}{5} = 24$ veces cada cifra, la suma de cada columna es:

$$24 \cdot 1 + 24 \cdot 2 + 24 \cdot 3 + 24 \cdot 4 + 24 \cdot 5 = 24 \cdot 15 = 360$$

La suma total es:

$$360 + 3.600 + 36.000 + 360.000 + 3.600.000 = 3.999.960$$

13. El grupo de 2 personas puede elegirse de $C_{12,2}$ maneras distintas, por tanto, el grupo de cuatro se puede formar de $C_{10,4}$ modos diferentes y el grupo de 6 de $C_{6,6} = 1$ manera.

El reparto se puede formar de:

$$C_{12,2} \cdot C_{10,4} \cdot C_{6,6} = 13.860 \text{ maneras.}$$

Veamos el segundo caso: un grupo de 4 se puede formar de $C_{12,4}$ modos distintos, otro de $C_{8,4}$ y el tercero de $C_{4,4}$. Al multiplicar $C_{12,4} \cdot C_{8,4} \cdot C_{4,4}$ obtenemos todos los grupos posibles, pero algunos repetidos en distinto lugar, ya que obtenemos todas las permutaciones de cada combinación, por lo que tenemos que dividir por 3!

$$\frac{C_{12,4} \cdot C_{8,4} \cdot C_{4,4}}{3!} = 5.775 \text{ maneras.}$$

14. Primero hallamos todas las variaciones de 10 elementos tomados de 3 en 3

$$V_{10,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

de todas éstas la décima parte empezará por cero,

$$\frac{720}{10} = 72,$$

restamos éstas del total y se obtiene 720 − 72 = 648 números.

15. $V_{6,2} = 6 \cdot 5 = 30.$

16. Como no influye el orden, son combinaciones

$$C_{11,3} = \frac{11!}{8!\,3!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 2} = 165$$

17. $P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ modos.

18. $\frac{P_4}{4} = \frac{4!}{4} = 3! = 6$

19. $C_{5,2} \cdot C_{7,3} = \binom{5}{2} \cdot \binom{7}{3} = \frac{5!}{2!\,3!} \cdot \frac{7!}{3!\,4!} = \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 5 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 5 = 350$

20. $V_{n,m} = C_{n,m} \cdot P_m$, luego

$$C_{n,m} = \frac{840}{24} = 35$$

TEMA XIX

ALGEBRA DE LOS SUCESOS ALEATORIOS

ESQUEMA/RESUMEN

1. Experimento aleatorio.
2. Sucesos aleatorios.
   - 2.1. Definición.
   - 2.2. Tipos de Sucesos.
3. Operaciones con sucesos.
   - 3.1. Unión.
   - 3.2. Intersección.
4. Algebra de Boole de los sucesos aleatorios.
5. Leyes de Morgan.

INSTRUCCIONES PARA EL ESTUDIO DE ESTE TEMA

En el presente tema, pretendemos poner en contacto al alumno con la idea de experimento aleatorio y sucesos aleatorios, utilizando, para ello, una serie de ejemplos y ejercicios extremadamente sencillos, para facilitar su comprensión.

Una vez aclarados estos conceptos, tratamos de utilizar razonamientos matemáticos, en repetidas ocasiones presentados en este curso de Matemáticas Básicas, para dotar a los sucesos aleatorios de una estructura algebraica.

Es muy interesante que el alumno tenga presente que en la economía de razonamientos que utilizamos, lo único que variamos es el tipo de conjunto con el que trabajamos.

1. EXPERIMENTO ALEATORIO

Supongamos que para estudiar un determinado problema matemático, biológico, sociológico, etc., necesitamos realizar un experimento; diremos que dicho experimento es un *experimento aleatorio*, cuando al repetirlo en análogas condiciones se pueden presentar resultados diferentes.

De lo dicho, se desprende de inmediato, que supuesto realizado un experimento aleatorio varias veces y conocidos sus resultados, no podemos predecir el resultado de una nueva realización.

Por ejemplo consideremos el experimento consistente en lanzar un dado al aire y anotar el número obtenido en la cara superior. Es evidente que, irán apareciendo, en cualquier orden los números *1, 2, 3, 4, 5, 6*. Si tiramos el dado tres veces y se obtienen los números *3, 5* y *2* respectivamente, si las condiciones de lanzamiento no se modifican, ¿podríamos predecir el resultado del lanzamiento siguiente?

La respuesta es rotunda: no es posible. Podríamos obtener cualquiera de los seis números que antes señalábamos. En consecuencia, el experimento de lanzar un dado al aire es un experimento aleatorio o de azar.

Los resultados de este experimento aleatorio son los elementos del conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Veamos ahora, otro experimento, consistente en anotar el sexo de cada niño que nace en un determinado sanatorio. Estamos ante otro experimento aleatorio, supuesto conocido el sexo de los quince primeros niños nacidos en un día, por ejemplo, no podemos averiguar el sexo del niño que ocupa el lugar dieciséis en el sanatorio de referencia.

Los distintos resultados de este experimento son elementos del conjunto {varón, hembra}.

Por último, también, es un experimento aleatorio el lanzar una moneda al aire, resulta claro la imposibilidad de predecir si saldrá cara o cruz.

2. SUCESOS ALEATORIOS O ESTOCASTICOS

Acabamos de ver, por medio de algunos ejemplos sencillos, que al realizar un determinado experimento aleatorio, podemos obtener una variedad de resultados que no podemos predecir de antemano. Pretendemos en este apartado, considerar algunos aspectos de los experimentos aleatorios.

2.1. Definición

Sea *S* el conjunto formado por todos los posibles resultados de un experimento aleatorio y *P(S)* el conjunto de las partes de *S*, o sea, el conjunto de todos los subconjuntos posibles de S.

Llamamos *suceso aleatorio o estocástico* a cada uno de los elementos del conjunto *P(S)*.

Cuando lanzamos una moneda al aire y nos fijamos en el resultado obtenido en la cara superior, el conjunto *S* será:

$$S = \{\text{cara, cruz}\}$$

y el conjunto de las partes de *S*, *P(S)*, es fácil de obtener:

$$P(S) = \{\phi\ \{\text{cara}\}, \{\text{cruz}\}, \{\text{cara, cruz}\}\}$$

cada elemento de *P(S)* es un suceso aleatorio o estocástico:

ϕ es un suceso aleatorio
{cara} es un suceso aleatorio
{cruz} es un suceso aleatorio
{cara, cruz} es un suceso aleatorio

2.2. Tipos de sucesos

Analizamos a continuación algunos tipos de sucesos:

Sucesos elementales: Son los posibles resultados a que puede dar lugar un experimento aleatorio. Por tanto, los sucesos elementales están formados por un solo elemento.

En el ejemplo considerado en el apartado anterior, de tirar una moneda al aire, los sucesos elementales son:

{cara} y {cruz}

En el caso de lanzar un dado, tenemos seis sucesos elementales:

{1} {2} {3} {4} {5} {6}

correspondientes a cada uno de los seis números que aparecen en las caras del dado.

Suceso imposible: Es un suceso que no puede verificarse nunca. Se representa por ϕ.

Al lanzar un dado, sacar un ocho o sacar un número mayor que diez, serían sucesos imposibles.

Cuando lanzamos una moneda al aire, un suceso imposible sería, por ejemplo, obtener el rey de copas.

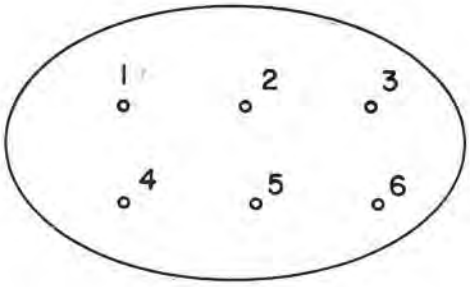
Suceso seguro o espacio muestral: Es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio, es decir, el conjunto de todos los sucesos elementales que se pueden obtener.

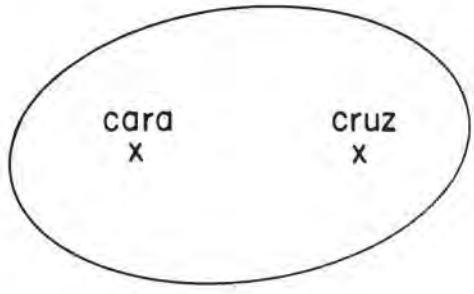
En el experimento de lanzar un dado, el suceso seguro o espacio muestral será:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Y en el de tirar una moneda al aire:

$$S = \{\text{cara, cruz}\}$$





Resulta evidente, que los sucesos aleatorios son subconjuntos del suceso seguro. Así el suceso de sacar un número impar al tirar un dado es {1, 3, 5} que es un subconjunto de {1, 2, 3, 4, 5, 6,}.

Suceso complementario: Dado un suceso aleatorio *A*, sabemos que es subconjunto del suceso seguro *S*, por lo tanto, podemos considerar el conjunto complementario de *A* en *S*. A este conjunto le llamamos suceso complementario del suceso *A*, y le representamos por *A'*.

Un ejemplo nos aclara esta difinición, sea el experimento de lanzar un dado, y el suceso aleatorio de sacar un dos o un cuatro, A = {2, 4}, el suceso complementario del *A*, será sacar un uno, un tres, un cinco o un seis. Es decir:

$$A' = \{1, 3, 5, 6\}$$

No es difícil de comprender que si se verifica un suceso determinado no puede verificarse el suceso complementario. En el experimento de lanzar una moneda al aire, el complementario de sacar cara es obtener cruz.

$$A = \{\text{cara}\} \qquad A' = \{\text{cruz}\}$$

El complementario del suceso seguro S = {cara, cruz}, es el suceso imposible

$$S' = S - S = \phi$$

Hemos visto en repetidas ocasiones que cada subconjunto de un conjunto, tiene su correspondiente conjunto complementario. Trasladado al caso que estamos estudiando supone que cada suceso aleatorio tiene un suceso complementario.

En el ejemplo anterior, el complementario de cada suceso lo especificamos:

$$\{\text{cara}\}' = \{\text{cruz}\}$$
$$\{\text{cruz}\}' = \{\text{cara}\}$$
$$\{\text{cara, cruz}\}' = \phi$$
$$\phi' = \{\text{cara, cruz}\}$$

Un suceso aleatorio *A se realiza* cuando al efectuar el experimento aleatorio se obtiene como resultado uno de los sucesos elementales que componen el suceso *A*. Por ejemplo si A = {2, 4, 6} en el experimento del dado, y obtenemos un 4, diremos que se ha realizado el suceso *A*.

En el caso contrario diremos que *no se realiza* el suceso *A*. En el ejemplo anterior si obtenemos un 1 diremos que no se ha realizado dicho suceso.

Un suceso *A está contenido* en otro *B* y se representa por $A \subset B$, si todo suceso elemental de *A* lo es de *B*.

Por ejemplo, el suceso {cara} está contenido en el suceso {cara, cruz}

$$\{\text{cara}\} \subset \{\text{cara, cruz}\}$$

Dos sucesos A y B son iguales cuando se verifica que $A \subset B$ y $B \subset A$, y se representa por A = B

Ejemplos y ejercicios

1. Presentamos dos nuevos experimentos aleatorios.

   a) Si consideramos las cartas de una baraja, un experimento aleatorio sería el sacar una carta cualquiera, anotar el resultado, volver a meterla en la baraja, volver a sacar otra carta, etc. Nunca podemos predecir cuál será la carta que saquemos del montón.

   b) Sea, ahora, el siguiente experimento aleatorio: Tenemos una urna con tres bolas blancas y dos negras, sacamos una bola, anotamos su color y la introducimos de nuevo, proceso que repetimos tantas veces como queramos. Es un experimento aleatorio, pues supuesto que hemos sacado dos bolas y han resultado ser de color blanco, en la siguiente extracción no podemos asegurar si la bola será blanca o negra.

2. Establecer un ejemplo de un experimento que no sea aleatorio.

   Si en una urna hay veinte bolas blancas, el experimento de sacar dos bolas y apuntar el color no es un experimento aleatorio, pues sabemos de antemano que siempre sacaremos una bola blanca.

3. Consideramos el experimento aleatorio consistente en lanzar dos monedas diferentes y anotar el resultado. Establecer el suceso seguro o espacio muestral y los sucesos elementales.

   Al lanzar las dos monedas al aire se pueden obtener: cara en las dos monedas, la primera cara y

la segunda cruz, la primera cruz y la segunda cara, o en las dos monedas cruz. Si a la cara la representamos por c y a la cruz por f, el espacio muestral o suceso seguro será:

$$S = \{c\ c,\ c\ f,\ f\ c,\ f\ f\}$$

Cada elemento del espacio muestral es un suceso elemental, por lo tanto los sucesos elementales serán:

$$\{c\ c\},\ \{c\ f\},\ \{f\ c\}\ y\ \{f\ f\}$$

4. En el ejemplo anterior, ¿Cuál es el número de los sucesos aleatorios?

Los sucesos aleatorios posibles serán todos los elementos del conjunto P(S). Como S tiene cuatro elementos, P(S) tendrá 2^4 elementos, es decir, 16 elementos. Por lo tanto existen 16 sucesos aleatorios en este experimento.

5. Insistimos en el experimento anterior. Hallar los sucesos complementarios de los siguientes sucesos: $A = \{c\ c,\ f\ c\}$, $B = \{c\ f,\ f\ c,\ f\ f\}$ y $C = \{f\ f\}$

$$A' = S - A = \{c\ f,\ f\ f\}$$
$$B' = S - B = \{c\ c\}$$
$$C' = S - C = \{c\ c,\ c\ f,\ f\ c\}$$

3. OPERACIONES CON SUCESOS ALEATORIOS

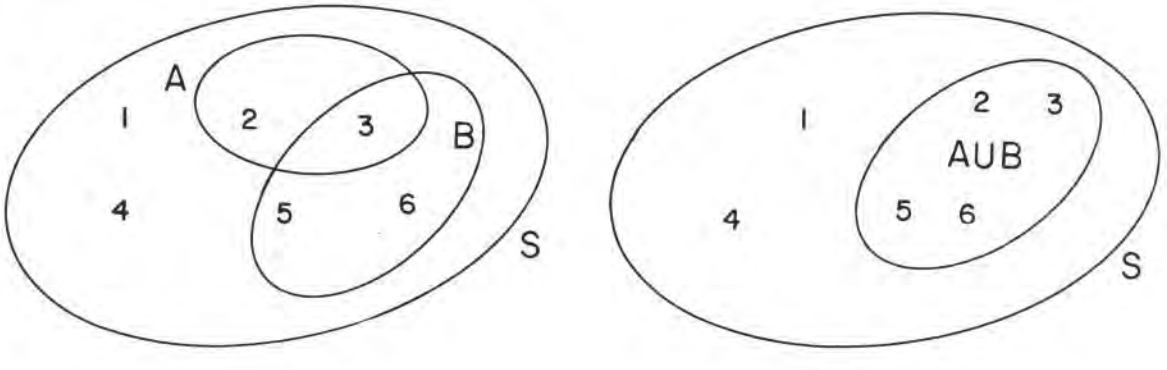
Vamos a definir algunas operaciones con los sucesos aleatorios, conviene señalar antes de empezar, que el procedimiento a emplear es semejante al utilizado cuando definimos las operaciones con los conjuntos o con las proposiciones.

3.1. Unión

Dados dos sucesos aleatorios *A* y *B*, llamaremos suceso *unión* de *A* y *B*, y le representaremos por $A \cup B$, a un nuevo suceso que se realiza cuando se realiza *A*, cuando se realiza *B* o cuando se realizan ambos a la vez.

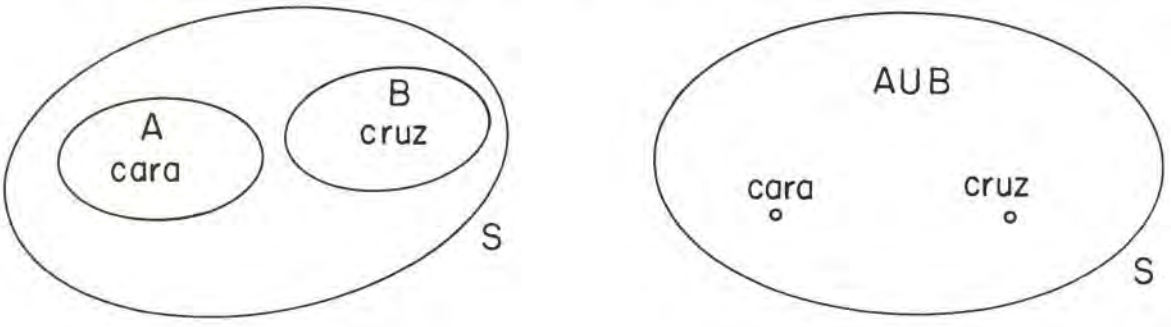
El alumno observará que esta definición es análoga a la dada para la unión de conjuntos y para la disyunción de proposiciones.

Si consideramos el experimento aleatorio del dado y los sucesos $A = \{2, 3\}$ y $B = \{3, 5, 6\}$. El suceso A unión B será: $A \cup B = \{2, 3, 5, 6\}$. La representación gráfica mediante diagramas de Venn, será:



El suceso A∪ B se realizará siempre que al lanzar el dado se obtenga un 2, un 3, un 5 o un 6.

Pensemos ahora, en el experimento de lanzar una moneda al aire, y los sucesos aleatorios A = ={cara} y B = {cruz}. El suceso $A \cup B$ será {cara, cruz}. La representación gráfica es:

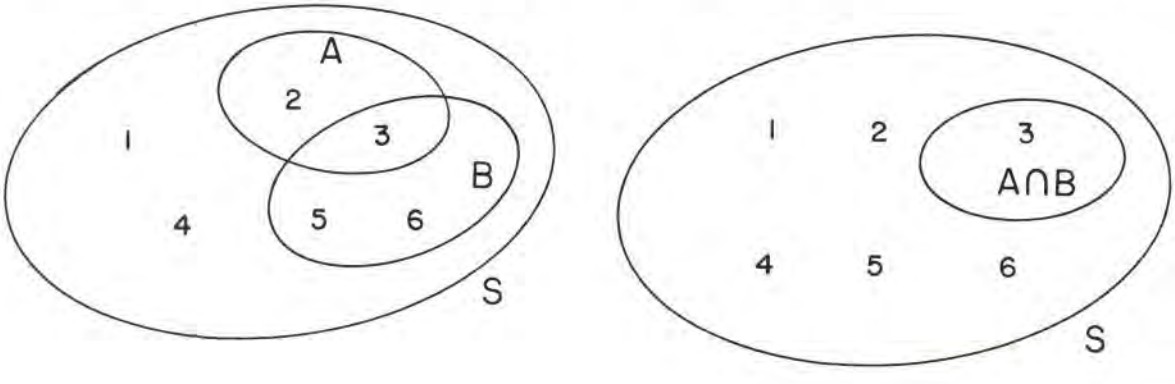


3.2. Intersección

Dados dos sucesos aleatorios *A* y *B*, llamaremos *suceso intersección* de A y B, y lo representaremos por $A \cap B$, a un nuevo suceso que se realiza cuando se realizan los sucesos *A* y *B* simultáneamente. Se comprende fácilmente, que en realidad, el suceso $A \cap B$ es el suceso formado por los sucesos elementales comunes al suceso *A* y al suceso *B*.

En este caso, esta definición es análoga a la presentada para la intersección de conjuntos y para la conjunción de proposiciones.

Recordemos el ejemplo anterior del dado, A = {2, 3} y B = {3, 5, 6}. El suceso *A* intersección *B* será: $A \cap B = \{3\}$. Representándolo mediante diagramas de Venn, resulta:



El suceso $A \cap B$ se realizará únicamente cuando al lanzar el dado, se obtenga un 3.

Veamos otro ejemplo: sea el experimento aleatorio de lanzar una moneda al aire, y los sucesos A = = {cara} y B = {cruz}. El suceso $A \cap B$ será el ϕ, el suceso imposible. Cuando, como en este caso, dos sucesos tienen por intersección el suceso imposible, se dice que ambos sucesos son *incompatibles*. Por lo tanto dos sucesos que sean incompatibles no se pueden realizar a la vez. En el caso de la moneda, es evidente que no puede salir cara y cruz en una misma tirada. También serían sucesos incompatibles, en el experimento del dado, A = {2, 4, 6} y B = {1, 3, 5}, pues es imposible obtener a la vez un número par y un número impar.

Ejemplos y ejercicios

1. Hallar la unión y la intersección de los siguientes sucesos que se obtienen al lanzar un dado:

$$A = \{\text{número par}\} \text{ y } B = \{\text{número no inferior a cuatro}\}.$$

Si definimos los sucesos *A* y *B* por extensión resulta: $A = \{2, 4, 6\}$ y $B = \{4, 5, 6\}$.

Por lo tanto,

$$A \cup B = \{2, 4, 5, 6\} \quad \text{y} \quad A \cap B = \{4, 6\}.$$

2. Al tirar dos dados y anotar la suma, se considera el suceso $A = \{\text{número par mayor que } 5\}$. Sabiendo que

$$A \cup B = \{3, 6, 8, 9, 10, 12\} \text{ y que } A \cap B = \{6, 12\}.$$

Hallar el suceso *B*.

$$A = \{6, 8, 10, 12\}$$

A *B* pertenecerán al 6 y el 12 y todos los elementos de $A \cup B$ que no pertenezcan a *A*.

Luego $B = \{3, 6, 9, 12\}$, o sea *B* es el suceso «obtener un múltiplo de 3».

4. ALGEBRA DE LOS SUCESOS ALEATORIOS

Si consideramos un experimento aleatorio, *S* será el espacio muestral o suceso seguro de dicho experimento y *P(S)* el conjunto de todos los sucesos aleatorios.

En el conjunto *P(S)* consideramos las operaciones unión e intersección de sucesos, que hemos definido anteriormente. Vamos a ver que se verifican las propiedades necesarias para que $(P(S), \cup, \cap)$ sea un álgebra de Boole.

— Idempotente: Cualquier suceso *A* de P(S) verifica:

$$A \cup A = A \quad \text{y} \quad A \cap A = A$$

— Conmutativa: Si *A* y *B* son dos sucesos cualesquiera de P(S), se verifica:

$$A \cup B = B \cap A \quad \text{y} \quad A \cap B = B \cap A$$

— Asociativa: Si *A*, *B* y *C* son tres sucesos cualesquiera de P(S) se verifica que:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad \text{y} \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

— Simplificativa: Sean *A* y *B* dos sucesos cualesquiera de P(S), se verifica que:

$$(A \cap B) \cup A = A \quad \text{y} \quad (A \cup B) \cap A = A$$

Estas propiedades se demuestran de la misma forma que las propiedades de la unión e intersección en el conjunto de partes de un conjunto, que vimos en la segunda Unidad Didáctica. Pues como

hemos dicho en repetidas ocasiones, P(S) es el conjunto de partes de un conjunto y las operaciones $\cup$ e $\cap$ son las mismas que definimos con los conjuntos.

Al verificar *(P(S), $\cup$, $\cap$)* las cuatro propiedades anteriores, podemos afirmar que tiene estructura de *retículo*.

Veamos si el retículo es distributivo y complementario.

— Distributiva: Sean *A, B* y *C* tres sucesos cualesquiera de P(S), se verifica:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

— Complementario: Hemos visto anteriormente que todo suceso $A \in P(S)$, tiene un suceso complementario A' que también pertenece a P(S). Además verifica que:

$$A \cup A' = S \quad \text{y} \quad A \cap A' = \phi$$

es decir, la unión de un suceso y su complementario es el suceso seguro, y la intersección de ambos sucesos es el suceso imposible.

Por lo tanto (P(S), $\cup$, $\cap$) es un retículo distributivo y complementario, es decir, tiene estructura de Algebra de Boole.

5. LEYES DE MORGAN

En las álgebras de Boole que hemos estudiado anteriormente, como son: el álgebra de las proposiciones, el álgebra de las partes de un conjunto, etc, se verificaban las leyes de Morgan. En el álgebra de los sucesos aleatorios también se verifican dichas leyes, y se enuncian:

Si *A* y *B* son dos sucesos aleatorios cualesquiera de P(S), se verifica que:

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

Ejemplos y ejercicios

1. Simplificar la siguiente expresión de sucesos utilizando las propiedades del álgebra de Boole.

$$[A \cup (B \cap A')] \cap (B' \cup A)$$

$[A \cup (B \cap A')] \cap (B' \cup A)$ aplicamos la propiedad distributiva =

$$= (A \cup B) \cap \underbrace{(A \cup A')}_{S} \cap (B' \cup A) = (A \cup B) \cap S \cap (B' \cup A) =$$

$= (A \cup B) \cap (B' \cup A)$ por la propiedad conmutativa $= (A \cup B) \cap (A \cup B')$

por la propiedad distributiva $= A \cup (B \cap B') = A \cup \phi = A$.

ϕ

2. Si consideramos el experimento aleatorio del dado y los sucesos A: «obtener número par» y B: «obtener un 3 o un 6». Comprobar que verifican las leyes de Morgan.

$$A = \{2, 4, 6\}, \quad B = \{3, 6\}$$

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6\} \quad (A \cup B)' = \{1, 5\}$$

$$A' = \{1, 3, 5\}, \quad B' = \{1, 2, 4, 5\}, \quad A' \cap B' = \{1, 5\}$$

$$\text{luego } (A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$A \cap B = \{6\} \quad (A \cap B)' = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$A' \cup B' = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ por lo tanto}$$

$(A \cap B)' = A' \cup B'$ y se verifican las leyes de Morgan.

NOTAS ACLARATORIAS Y COMPLEMENTARIAS

El álgebra de los sucesos aleatorios, que acabamos de estudiar, presenta una analogía con el álgebra de las partes de un conjunto, como hemos intentado poner de manifiesto en repetidas ocasiones.

En el esquema siguiente tratamos de insistir en esta analogía:

Algebra de Partes de un Conjunto	**Algebra de sucesos aleatorios**
Conjunto	Suceso
Conjunto Universal	Suceso Seguro
Conjunto vacio ϕ	Suceso imposible ϕ
Conjuntos disjuntos	Sucesos incompatibles
Conjunto unitario	Suceso elemental

Algebra de Partes de un Conjunto	Algebra de sucesos aleatorios
Inclusión $A \subset B$	Inclusión $A \subset B$
Igualdad $A = B$	Igualdad $A = B$
Unión $A \cup B$	Unión $A \cup B$
Intersección $A \cap B$	Intersección $A \cap B$
Complementario A'	Complementario A'

CONCLUSIONES TEMA XIX

<table>
<tr><td>EXPERIMENTO ALEATORIO</td><td colspan="2">Diremos que un experimento es aleatorio cuando al repetirlo en análogas condiciones se pueden presentar resultados diferentes.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">SUCESOS ALEATORIOS</td><td>DEFINICION</td><td>Sea S el conjunto formado por todos los posibles resultados de un experimento aleatorio y P(S) el conjunto de las partes de S, o sea, el conjunto de todos los subconjuntos posibles de S. Llamaremos suceso aleatorio a cada uno de los elementos de P(S).</td></tr>
<tr><td>TIPOS</td><td>Elementales: Son los posibles resultados a que puede dar lugar un experimento aleatorio.

Imposible: No puede verificarse nunca.

Seguro: Es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.

Complementario: Un suceso aleatorio A es un subconjunto del suceso seguro S. Llamamos suceso complementario de A, al conjunto complementario de A en S.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">OPERACIONES CON SUCESOS</td><td>UNION</td><td>Dados dos sucesos aleatorios A y B, llamaremos suceso unión de A y B, A ∪ B, a un nuevo suceso que se realiza cuando se realiza A, cuando se realiza B o cuando se realizan ambos a la vez.</td></tr>
<tr><td>INTERSECCION</td><td>Dados dos sucesos aleatorios A y B, llamaremos suceso intersección de A y B, A ∩ B, a un nuevo suceso que se realiza cuando se realizan los sucesos A y B simultáneamente.</td></tr>
<tr><td>ALGEBRA DE BOOLE</td><td colspan="2">El conjunto P(S) con las operaciones unión e intersección es un retículo distributivo y complementario o álgebra de Boole, porque verifica las propiedades:

Idempotente: A∪A = A A∩A = A

Conmutativa: A∪B = B∪A A∩B = B∩A

Asociativa: (A∪B)∪C = A∪(B∪C) (A∩B)∩C = A∩(B∩C)

Simplificativa: (A∩B)∪A = A (A∪B)∩A = A

Distributiva: A∪(B∩C) = (A∪B)∩(A∪C)
A∩(B∪C) = (A∩B)∪(A∩C)
Complementario: A∪A′ = S A∩A′ = ϕ</td></tr>
<tr><td>LEYES DE MORGAN</td><td colspan="2">(A∪B)′ = A′∩B′
(A∩B)′ = A′∪B′</td></tr>
</table>

EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. Poner dos ejemplos de experimentos aleatorios.

2. Poner dos ejemplos de experimentos no aleatorios.

3. En el experimento de lanzar dos dados al aire y anotar la suma de los números obtenidos ¿cuál será el espacio muestral o suceso seguro?

4. En el experimento anterior, hallar todos los sucesos elementales.

5. En el experimento del ejercicio número 3, se consideran los sucesos: A = {múltiplo de 3} y B = = {número impar}. Hallar los sucesos complementarios de estos sucesos.

6. Hallar la unión y la intersección de los dos sucesos anteriores.

7. Consideremos el experimento que consiste en extraer una carta de una baraja española. Sean los sucesos: A = {un as}, B = {un oro} y C = {as de copas}. Explicar el significado de los sucesos: A', $A \cup B$, $B \cap C$, $A \cap C'$, $A \cap B$.

8. Determinar todos los sucesos elementales de los siguientes experimentos aleatorios:

   a) Extraer al azar dos bolas de una urna que contiene 3 bolas blancas y 2 negras.

   b) El día de la semana en que ocurre un accidente de tráfico.

9. Sean *A*, *B* y *C* tres sucesos cualesquiera de un experimento aleatorio. Formar los siguiente sucesos:

   a) Se realizan *A* y *B*, pero no *C*.

b) Se realiza al menos uno de los tres.

c) Se realizan al menos dos sucesos.

d) No se realiza ninguno de los tres.

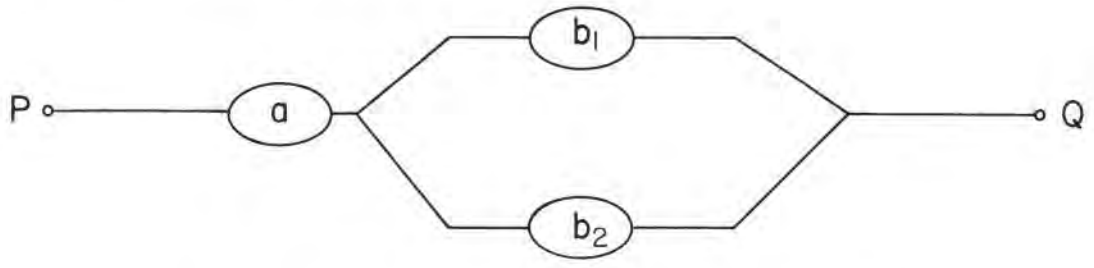
10. Utilizando las propiedades del álgebra de Boole, simplificar la expresión de los sucesos:

$$(A \cup B) \cap (A \cup B') \cap (A' \cup B)$$

11. Establecer una ordenación mediante el símbolo $\subset$ entre los sucesos $A \cap B$, $A \cup B$, ϕ, S, $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.

12. Si $A \subset B$ ordenar los sucesos $A' \cap B'$, A', B' y $A' \cup B'$.

13. Sea el esquema del circuito eléctrico entre dos puntos P y Q:



y los sucesos: A «que el interruptor *a* esté cerrado», B_1 «que el interruptor b_1 esté cerrado», y B_2 «que el interruptor b_2 esté cerrado». Expresar el suceso C de que el circuito esté cerrado entre P y Q.

14. Simplificar la siguiente expresión de sucesos, nombrando las propiedades utilizadas.

$$(A \cup B) \cap (B \cup C)$$

15. Un experimento aleatorio consiste en obtener sucesivamente tres tornillos de una caja y clasificarlos en defectuosos o buenos. Formar el espacio muestral o suceso seguro.

16. En el experimento del ejercicio anterior formar los sucesos aleatorios:

a) El primer tornillo es defectuoso.

b) Ningún tornillo es defectuoso.

17. Hallar la unión y la intersección de los dos sucesos aleatorios del ejercicio anterior.

18. Se lanzan dos dados a la vez. Sea *A* el suceso «la suma de los puntos es impar» y *B* el suceso «se ha obtenido al menos un 3». Describir el suceso $A \cap B$ en los casos:

a) Los dados son idénticos.

b) Los dados son distintos.

19. Consideremos el experimento de lanzar un dado. Sea A el suceso {1, 2, 4}; si se verifica que $A \cup B = \{1, 2, 4, 6\}$ y que $A \cap B = \{2, 4\}$. ¿Cuál será el suceso *B*?

20. En el experimento aleatorio de extraer una carta de una baraja española, se consideran los sucesos: A = {obtener un rey} y B = {obtener un basto}. Hallar los sucesos complementarios y comprobar que verifican las leyes de Morgan.

SOLUCION A LOS EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. Un experimento aleatorio puede ser lanzar dos dados y anotar la suma de los dos números obtenidos.

   Otro experimento aleatorio es el juego de la lotería.

2. Lanzar una moneda que tenga las dos caras completamente iguales; pues podemos asegurar que siempre saldrá cara.

   Lanzar un dado que tenga en las seis caras el mismo número; pues sabemos de antemano que siempre saldrá dicho número.

3. $S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

4. $\{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{8\}, \{9\}, \{10\}, \{11\}, \{12\}$

5. $A = \{3, 6, 9, 12\}$, $B = \{3, 5, 7, 9, 11\}$

   $A' = S - A = \{2, 4, 5, 7, 8, 10, 11\}$

   $B' = S - B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$

6. $A \cup B = \{3, 5, 6, 7, 9, 11, 12\}$

   $A \cap B = \{3, 9\}$

7. $A' = \{\text{carta distinta de un as}\}$

$A \cup B$ = {un as o un oro}

$B \cap C = \phi$ (suceso imposible), luego B y C son incompatibles.

$A \cap C'$ = {as que no sea de copas}

$A \cap B$ = {as de oros}

8. a) Siendo «b» la bola blanca y «n» la negra, los sucesos elementales son: {bb}, {bn} y {nn}.

   b) {lunes}, {martes}, {miércoles}, {jueves}, {viernes}, {sábado}, {domingo}.

9. a) $A \cap B \cap C'$

   b) $A \cup B \cup C$

   c) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

   d) $A' \cap B' \cap C'$

10. $(A \cup B) \cap (A \cup B') \cap (A' \cup B) = [A \cup (B \cap B')] \cap (A' \cup B) =$
    $= (A \cup \phi) \cap (A' \cup B) = A \cap (A' \cup B) = (A \cap A') \cup (A \cap B) =$
    $= \phi \cup (A \cap B) = A \cap B$

11. $\phi \subset A \cap B \subset (A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cup B \subset S$

12. $A' \cap B' = B' \subset A' = A' \cup B'$

13. Para que el circuito esté cerrado ha de verificarse A y B_1 o B_2; por lo tanto

$$C = A \cap (B_1 \cup B_2)$$

14. $(A \cup B) \cap (B \cup C) = (B \cup A) \cap (B \cup C) = B \cup (A \cap C)$

    conmutativa distributiva

15. S = {BBB, BBD, BDB, DBB, BDD, DBD, DDB, DDD}
    (Representamos por B los tornillos buenos, y por D los defectuosos.)

16. a) {DBB, DDB, DBD, DDD}

    b) {BBB}

17. {DBB, DDB, DBD, DDD} $\cup$ {BBB} = {DBB, DDB, DBD, DDD, BBB}
    {DBB, DDB, DBD, DDD} $\cap$ {BBB} = ϕ

18. $A \cap B$ es «la suma es impar y se ha obtenido al menos un 3». Luego:

a) $A \cap B = \{(3, 2), (3, 4), (3, 6)\}$

b) $A \cap B = \{(2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (3, 6), (6, 3)\}$

(Ya que, por ejemplo, si un dado es verde y otro azul, es distinto que se obtenga un 2 en el verde y un 3 en el azul, que un 3 en el verde y un 2 en el azul.)

19. $B = \{2, 4, 6\}$

20. $A' = \{$carta distinta de un rey$\}$

$B' = \{$oros, copas, o espadas$\}$

$A' \cap B' = \{$oros, copas o espadas distintas de un rey$\}$

$A \cup B = \{$un rey o un basto$\}$

$(A \cup B)' = \{$que no sean reyes ni bastos$\}$

luego: $A' \cap B' = (A \cup B)'$

$A' \cup B' = \{$carta distinta de un rey u oros, copas o espadas$\} =$

$= \{$todas las cartas menos el rey de bastos$\} = (A \cap B)'$

pues: $A \cap B = \{$rey de bastos$\}$

luego: $A' \cup B' = (A \cap B)'$

TEMA XX

FRECUENCIA Y PROBABILIDAD

ESQUEMA/RESUMEN

1. Frecuencia de un suceso aleatorio.
   - 1.1. Frecuencia absoluta.
   - 1.2. Frecuencia relativa.
2. Propiedades de la frecuencia.
3. Definición clásica de probabilidad.
4. Definición axiomática de probabilidad.
   - 4.1. Consecuencias de los axiomas.

INSTRUCCIONES PARA EL ESTUDIO DE ESTE TEMA

Vamos a dar tratamiento matemático a dos conceptos muy utilizados en la vida diaria. Nos referíamos a la frecuencia y a la probabilidad de un suceso aleatorio. El planteamiento del tema es muy sencillo y sin grandes dificultades si el alumno ha estudiado y asimilado lo que antecede. Una vez definidos los conceptos que estimamos fundamentales, tratamos de aclararlos con numerosos ejemplos y relacionarlos con ideas ya presentadas en otra ocasión. Es muy importante para el lector que preste atención a estos aspectos del tema y se esfuerce en realizar y comprender todos los ejercicios intercalados en el tema, primero, y después los ejercicios de autocomprobación.

1. FRECUENCIA DE UN SUCESO ALEATORIO

Tratamos de caracterizar para un suceso aleatorio cualquiera dos nuevas magnitudes que llamaremos frecuencia absoluta y frecuencia relativa. Para definir estas dos magnitudes nuevas *establecemos el planteamiento previo siguiente:* realizamos un determinado experimento aleatorio un número n de veces, sin variar las condiciones iniciales, y sea A un suceso aleatorio de dicho experimento. Supongamos que en las n pruebas realizadas se ha presentado el suceso A un número n_A de veces.

1.1. Frecuencia absoluta

Llamaremos frecuencia absoluta del suceso A al número n_A. Ya se comprende que $n_A \leq n$, pues no se puede obtener el suceso A un número mayor de veces que el número n de realizaciones del experimento.

En muchas ocasiones, no es suficiente conocer la frecuencia absoluta de un suceso para saber si dicho suceso se ha presentado muchas o pocas veces en las pruebas realizadas, por lo que nos vemos en la necesidad de definir otro tipo de frecuencia.

1.2. Frecuencia relativa

Llamaremos frecuencia relativa del suceso A, y lo representaremos por $f_r(A)$, al cociente entre la frecuencia absoluta del suceso A y el número n de pruebas realizadas.

Es decir:

$$f_r(A) = \frac{n_A}{n}$$

La frecuencia relativa nos informa sobre el número de veces que se ha repetido el suceso A en relación al número de veces que se realiza el experimento aleatorio.

Por lo tanto, es mucho más interesante conocer la frecuencia relativa de un suceso que conocer solamente la frecuencia absoluta. A la frecuencia relativa de un suceso A la llamaremos simplemente: *frecuencia del suceso A.*

Consideremos algunos ejemplos. Si lanzamos un dado *25* veces y A es el suceso aleatorio {5, 6}, es decir, sacar un *5* ó un *6*. Sabiendo que hemos obtenido dicho suceso 12 veces, diremos que la frecuencia absoluta del suceso *A* es *12:*

$$n_A = 12$$

y la frecuencia relativa o frecuencia de A será:

$$f_r\ (A) = \frac{12}{25}$$

Veamos, ahora, el suceso complementario de A:

$$A' = \{1, 2, 3, 4\},$$

y se habrá obtenido 13 veces, por tanto, $n_{A'} = 13$ y

$$f_r\ (A') = \frac{13}{25}$$

Otro experimento aleatorio es lanzar una moneda al aire. Si la hemos lanzado 20 veces, obteniendo el suceso A = {cara}, *7* veces; podemos asegurar que la frecuencia absoluta de A es *7* y la frecuencia de A es $\frac{7}{20}$, es decir:

$$n = 20\ ,\ n_A = 7\ \text{ y }\ f_r\ (A) = \frac{7}{20} = 0{,}35$$

Ejercicios y ejemplos

1. Supongamos que al lanzar 10 veces una moneda, el suceso A = {cruz} aparece 6 veces. Hallar la frecuencia absoluta y la frecuencia de los sucesos A y A'.

$$A' = \{\text{cara}\}$$

se obtiene 4 veces

$$n_A = 6 \quad \text{y} \quad n_{A'} = 4$$

luego

$$f_r\ (A) = \frac{6}{10} \quad \text{y} \quad f_r\ (A') = \frac{4}{10}$$

2. En una clase de alumnos, han aprobado las mátemáticas el 60 %, la geografía el 50 % y la literatura el 80 %. Hallar la frecuencia de alumnos que han aprobado cada una de las asignaturas anteriores.

$$f_r \text{ (matemáticas)} = \frac{60}{100} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$f_r \text{ (geografía)} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

$$f_r \text{ (literatura)} = \frac{80}{100} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

2. PROPIEDADES DE LA FRECUENCIA

Vamos a deducir a continuación algunas propiedades de la frecuencia.

1. Si A es un suceso cualquiera de un experimento aleatorio, su frecuencia es un número racional comprendido entre *0* y *1*. Es decir:

$$0 \leq f_r\ (A) \leq 1$$

En efecto, puesto que si hemos realizado *n* pruebas y ha aparecido n_A veces el suceso *A*, se tiene que: $0 \leq n_A \leq n$, y dividiendo por n resulta:

$$\frac{0}{n} \leq \frac{n_A}{n} \leq \frac{n}{n},$$

es decir:

$$0 \leq f_r\ (A) \leq 1$$

como queríamos demostrar.

2. La frecuencia del suceso seguro es 1. Es decir: $f_r\ (S) = 1$, puesto que si realizamos *n* pruebas de un experimento aleatorio, la frecuencia absoluta del suceso seguro es n, entonces:

$$f_r\ (S) = \frac{n}{n} = 1$$

3. La frecuencia del suceso imposible es 0

$$f_r\ (\phi) = 0$$

pues si efectuamos *n* pruebas, el suceso imposible no se realiza ninguna vez, su frecuencia absoluta es 0, por tanto:

$$f_r\ (\phi) = \frac{0}{n} = 0$$

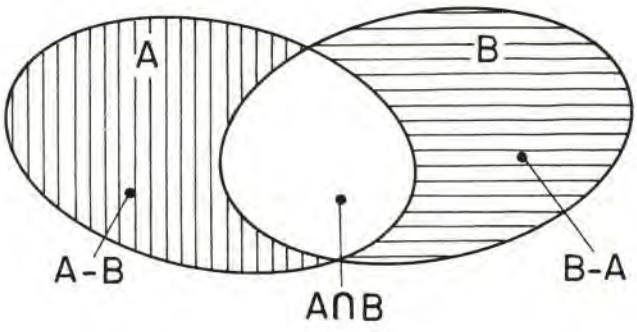
4. Si *A* y *B* son dos sucesos de un experimento aleatorio, se verifica que:

$$f_r\ (A \cup B) = f_r\ (A) + f_r\ (B) - f_r\ (A \cap B)$$

Para demostrarlo consideremos los sucesos:

$$A - B \ ; \ A \cap B \ \text{ y } \ B - A$$

Si los representamos mediante diagramas de Veen, tendremos



una partición del suceso A ∪ B, por tanto:

$$A \cup B = (A - B) + (A \cap B) + (B - A)$$

Si llamamos:

$n_{A \cup B}$ a la frecuencia absoluta del suceso A∪ B

$n_{A - B}$ a la frecuencia absoluta del suceso A − B

$n_{A \cap B}$ a la frecuencia absoluta del suceso A ∩ B

$n_{B - A}$ a la frecuencia absoluta del suceso B − A

podemos escribir:

$$n_{A \cup B} = n_{A - B} + n_{A \cap B} + n_{B - A}$$

sumando y restando al segundo miembro de esta expresión $n_{A \cap B}$ resulta:

$$n_{A \cup B} = n_{A - B} + n_{A \cap B} + n_{B - A} + (n_{A \cap B} - n_{A \cap B})$$

que podemos escribir:

$$n_{A \cup B} = (n_{A - B} + n_{A \cap B}) + (n_{B - A} + n_{A \cap B}) - n_{A \cap B} \quad (\cdot)$$

recordando que se verifica:

$$A = (A - B) + (A \cap B) \qquad \text{y} \qquad B = (B - A) + (A \cap B)$$

como se puede comprobar en la figura anterior, tenemos que:

$$n_A = n_{A-B} + n_{A \cap B} \qquad \text{y} \qquad n_B = n_{B-A} + n_{A \cap B}$$

si sustituimos estos valores en la expresión (•) obtenemos:

$$n_{A\cup B} = n_A + n_B - n_{A\cap B}$$

dividiendo ambos miembros de esta igualdad por el número n de veces que se realiza el experimento, resulta:

$$\frac{n_{A\cup B}}{n} = \frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n} - \frac{n_{A\cap B}}{n}$$

teniendo presente la definición de frecuencia de un suceso, obtenemos finalmente:

$$f_r\ (A\cup B) = f_r\ (A) + f_r\ (B) - f_r\ (A\cap B)$$

expresión que queríamos demostrar.

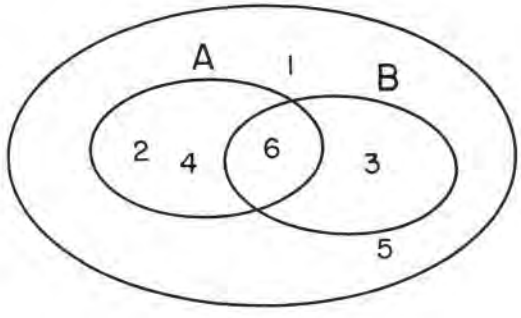
Un ejemplo aclarará esta expresión: suponemos que se han hecho 20 lanzamientos de un dado, obteniéndose los siguientes resultados:

5 veces un número par, no múltiplo de 3

4 veces un múltiplo de 3, no par.

2 veces el número 6.

Si consideramos los sucesos A = {2, 4, 6} y B = {3, 6}



resulta que:

$$A\cup B = \{2, 3, 4, 6\}$$
$$A - B = \{2, 4\}$$
$$A\cap B = \{6\}$$
$$B - A = \{3\}$$

y

$$n = 20\ ,\ n_{A-B} = 5\ ,\ n_{B-A} = 4\ ,\ n_{A\cap B} = 2$$

por tanto:

$$n_A = 5 + 2 = 7$$

$$n_B = 4 + 2 = 6$$

$$n_{A\cup B} = 11$$

$$f_r(A) = \frac{7}{20} \quad ; \quad f_r(B) = \frac{6}{20} \quad ; \quad f_r(A \cap B) = \frac{2}{20}; \quad f_r(A \cup B) = \frac{11}{20}$$

y se verifica que

$$f_r(A \cup B) = f_r(A) + f_r(B) - f_r(A \cap B),$$

pues:

$$\frac{11}{20} = \frac{7}{20} + \frac{6}{20} - \frac{2}{20} = \frac{7 + 6 - 2}{20}$$

En el caso particular, en que los sucesos *A* y *B* sean incompatibles, $A \cap B$ será el suceso imposible.

$$A \cap B = \phi \quad y \quad f_r(A \cap B) = 0$$

la expresión obtenida anteriormente queda reducida a la siguiente:

$$f_r(A \cup B) = f_r(A) + f_r(B)$$

Como *A* y *B* son incompatibles, podemos escribir:

$$A \cup B = A + B$$

luego, la expresión queda finalmente:

$$f_r(A + B) = f_r(A) + f_r(B)$$

Es decir, la frecuencia de la suma de dos sucesos aleatorios es igual a la suma de las frecuencias de ambos sucesos.

Así, por ejemplo, en el experimento aleatorio de extraer una carta de una baraja española, los sucesos C = {copas} y E = {espadas} son incompatibles, por tanto:

$$f_r(C + E) = f_r(C) + f_r(E)$$

Ejercicios y ejemplos

1. Si lanzamos 15 veces un dado al aire y obtenemos 4 veces el suceso A = {1, 5} y 7 veces el B = {3, 6}. Hallar la frecuencia del suceso $A \cup B$.

Como A y B son sucesos incompatibles, se verifica que:

$$A \cup B = A + B \quad y \quad f_r(A + B) = f_r(A) + f_r(B) = \frac{4}{15} + \frac{7}{15} = \frac{11}{15}$$

por tanto, la frecuencia de $A \cup B$ es $\frac{11}{15}$

2. En un experimento aleatorio, sabiendo que la frecuencia de un suceso A es 0,20, la del suceso B es 0,40 y la del suceso A∪ B es 0,50. Hallar la frecuencia del suceso A ∩ B.

Sabemos que se verifica que:

$$f_r\ (A \cup B) = f_r\ (A) + f_r\ (B) - f_r\ (A \cap B)$$

por tanto,

$$0{,}50 = 0{,}40 + 0{,}20 - f_r\ (A \cap B)$$

$$f_r\ (A \cap B) = 0{,}40 + 0{,}20 - 0{,}50 = 0{,}10$$

La frecuencia de A ∩ B es 0,1.

3. DEFINICION CLASICA DE PROBABILIDAD

El origen de la teoría de la probabilidad data del siglo XVII, en el que los matemáticos Pascal y Fermat mantuvieron una abundante correspondencia sobre un problema planteado por el jugador Caballero de Meré. La cuestión planteada se refería a la división de apuestas en el juego de los dados.

Las respuestas a estos problemas están contenidas en las correspondencias de los dos grandes matemáticos franceses.

Más tarde, el matemático Laplace estableció la que durante mucho tiempo se ha llamado definición clásica de Probabilidad, que dice así:

En un experimento aleatorio, la probabilidad de que se verifique un suceso A es igual al cociente entre el número de sucesos elementales favorables y el número de sucesos elementales posibles, cuando éstos son igualmente probables y se representa por P(A). Es decir:

$$P(A) = \frac{\text{n.º sucesos elementales favorables a A}}{\text{n.º sucesos elementales posibles}}$$

Conviene insistir en que la regla de Laplace solamente es aplicable cuando los sucesos elementales son igualmente posibles. Si consideramos el experimento aleatorio de lanzar un dado y queremos hallar la probabilidad del suceso A = {3, 6}, averiguaremos el número de sucesos elementales favorables y el número de sucesos elementales que existen.

Al lanzar el dado, los sucesos elementales posibles son 6, todos ellos son:

$$\{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{4\},\ \{5\},\ \{6\}$$

igualmente posibles.

Los sucesos favorables al suceso A son 2: {3} y {6}.

Por tanto, la probabilidad de A será:

$$P(A) = \frac{\text{n.º sucesos favorables}}{\text{n.º sucesos posibles}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

En el experimento de lanzar una moneda al aire. La probabilidad de sacar cruz será $\frac{1}{2}$, ya que hay dos sucesos elementales posibles: {cara} y {cruz}, y solamente el último es favorable; por lo tanto,

$$P\,(\text{cruz}) = \frac{1}{2}$$

Ejercicios y ejemplos

1. Al extraer una carta de una baraja española, averiguar la probabilidad de que pertenezca a los «bastos». ¿Cuál sería la probabilidad de extraer un «caballo»?

   El número de sucesos elementales posibles es 40, ya que hay 40 cartas distintas. En el primer caso, el número de sucesos elementales favorables es 10, pues hay 10 bastos, y en el segundo caso es 4, ya que son 4 los caballos de la baraja. Por tanto:

   $$P\,(\text{bastos}) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

   $$P\,(\text{caballo}) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$$

2. Si se lanzan tres monedas diferentes al aire, ¿cuál es la probabilidad de que las tres sean caras o las tres cruces?

   Si designamos cara por C y cruz por + todos los casos posibles son:

   C C C, C C +, C + C, + C C, C + +, + C +, + + C, + + +

   y favorables solamente son 2, el primero y el último. Por tanto, la probabilidad pedida será:

   $$\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

3. Se saca una bola de una bolsa que contiene 3 bolas blancas, 4 rojas y 5 negras. ¿Cuál es la probabilidad de que sea:

   a) blanca, b) blanca o roja, c) no roja?

   Como hay 12 bolas en total, el número de sucesos elementales posibles es 12.

   a) Hay 3 bolas blancas, luego:

   $$P = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

   b) Los casos favorables para sacar una bola blanca o una roja son: $3 + 4 = 7$. Por tanto, la probabilidad pedida es: $\frac{7}{12}$.

c) Sacar una bola que no sea roja es lo mismo que sacar una bola blanca o negra. Los casos favorables son: 3 + 5 = 8; luego:

$$P = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

4. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar dos dados diferentes se obtenga por suma un 3 ó un 4?

Los casos posibles son las variaciones con repetición de 6 elementos tomados de 2 en 2:

$$V'_{6,2} = 6^2 = 36$$

Los casos favorables son 5:

1 + 2 = 3 3 + 1 = 4
2 + 1 = 3 2 + 2 = 4
1 + 3 = 4

Luego la probabilidad será: $\frac{5}{36}$

4. DEFINICION AXIOMATICA DE PROBABILIDAD

Después de la ya clásica definición de Laplace, casi generalmente admitida, el estudio de la probabilidad queda algo estancado, hasta que en el siglo XIX, en Rusia, surgen dos matemáticos de gran relieve, Chebychev y Marcov, quienes, estudiando la íntima relación que existe entre frecuencia relativa de un suceso en un elevado número de pruebas y su probabilidad, presentan una nueva definición de probabilidad, a partir de un sistema de axiomas basados en las propiedades de las frecuencias.

En un experimento aleatorio, a cada suceso podemos asignarle un número, su frecuencia, de forma análoga, la probabilidad asocia a cada suceso un número.

Como consecuencia, podemos decir que la *probabilidad* es una aplicación del conjunto de los sucesos en el conjunto de los números reales, que ha de verificar unas determinadas propiedades.

Del concepto de frecuencia, realizando un proceso de abstracción, podemos pasar al concepto de probabilidad.

Aclaramos lo expuesto con el ejemplo de la moneda, ya utilizado en otras ocasiones. El experimento aleatorio consiste en lanzar al aire la moneda. Cuando el número de experiencias realizadas se hace muy grande, la frecuencia relativa del suceso {cara} tiende a estabilizarse hacia el número $\frac{1}{2}$. Esto supone que si lanzamos dos veces al aire una moneda, no vamos a obtener una vez el suceso {cara} y otra el suceso {cruz}. Ahora bien, si este proceso le repetimos un número elevado de veces, la frecuencia relativa del suceso {cara} tiende a estabilizarse hacia el número $\frac{1}{2}$.

En general, llamamos probabilidad a una aplicación P entre el álgebra de los sucesos aleatorios de un experimento y el cuerpo de los números reales. De forma que a cada suceso A del experimento aleatorio le asocia un número real que llamamos probabilidad de A(*) y representamos por $P(A)$, verificando las propiedades siguientes:

(*) Llamamos probabilidad a la imagen de la aplicación.

i) Para cualquier suceso A, se verifica que

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$$

P(A) está comprendido entre *0* y *1*.

ii) La probabilidad del suceso seguro es *1*

$$P(S) = 1$$

iii) Dados dos sucesos aleatorios cualesquiera *A* y *B* incompatibles

$A \cap B = \phi$ se verifica:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

4.1. Consecuencias de los axiomas

— Dado un suceso aleatorio A, la probabilidad del suceso complementario A' es igual a : 1 menos la probabilidad del suceso A

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Demostración

Como A y A' son sucesos incompatibles, $A \cap A' = \phi$ que verifican $A \cup A' = S$, podemos aplicar el tercer axioma:

$$P(S) = P(A \cup A') = P(A) + P(A') = 1$$

luego

$$P(A') = 1 - P(A)$$

— La probabilidad del suceso imposible es cero

$$P(\phi) = 0$$

Demostración

$$P(\phi) = 1 - P(S) = 1 - 1 = 0$$

— Si A y B son dos sucesos aleatorios cualesquiera, se verifica:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Demostración

Podemos escribir $A' \cup B = A \cup (B \cap A')$, de tal forma que *A* y $B \cap A'$ son sucesos incompatibles y podemos aplicar el tercer axioma de la probabilidad:

$$P(A' \cup B) = P[A \cup (B \cap A')] = P(A) + P(B \cap A') \quad (1)$$

Ahora bien, como

$$B = (B \cap A) \cup (B \cap A')$$

siendo $B \cap A$ y $B \cap A'$ sucesos incompatibles, también podemos aplicar el mismo axioma y resulta:

$$P(B) = P[(B \cap A) \cup (B \cap A')] = P(B \cap A) + P(B \cap A')$$

de donde:

$$P(B \cap A') = P(B) - P(B \cap A) \qquad (2)$$

y sustituyendo la expresión (2) en la (1) obtenemos la expresión que buscábamos

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

— Si A y B son dos sucesos aleatorios tales que $A \subset B$, se verifica que:

$$P(A) \leqslant P(B)$$

Demostración

Si $A \subset B$, llamamos C al conjunto $B - A$

que verifica: $\begin{cases} A \cup C = B \\ A \cap C = \phi \end{cases}$

como A y C son incompatibles tenemos que:

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) = P(B)$$

Por el primer axioma de la probabilidad sabemos que $P(C) \geqslant 0$, luego:

$$P(A) \leqslant P(B)$$

Ejercicios y ejemplos

1. En un experimento aleatorio, hallar la probabilidad del suceso $A \cup B$, sabiendo que la probabilidad de A es 0,2, la de B es 0,6 y la de $A \cap B$ es 0,1.

   Sabemos que

   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

   luego

   $$P(A \cup B) = 0,2 + 0,6 - 0,1 = 0,7$$

2. Si la probabilidad de un suceso A es 0,3, ¿cuánto valdrá la probabilidad de A'?

   $$P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0,3 = 0,7$$

BIBLIOTECA PUBLICA PTO. STA. MARIA

CONCLUSIONES TEMA XX

<table>
<tr><td colspan="2">FRECUENCIA ABSOLUTA</td><td>Si se ha realizado un experimento n veces y se ha presentado un suceso A, n_A veces, se llama frecuencia absoluta del suceso A al número n_A.</td></tr>
<tr><td colspan="2">FRECUENCIA RELATIVA</td><td>Frecuencia relativa fr(A) de un suceso A es el cociente entre la frecuencia absoluta del suceso A y el número n de pruebas realizadas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">PROPIEDADES</td><td>1. $0 \leqslant fr(A) \leqslant 1$
2. $fr(S) = 1$
siendo S el suceso seguro.
3. $fr(\phi) = 0$
Por ϕ representamos al suceso imposible.
4. $fr(A \cup B) = fr(A) + fr(B) - fr(A \cap B)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">PROBABILIDAD</td><td>DEFINICION CLASICA</td><td>En un experimento aleatorio, la probabilidad de que se verifique un suceso A, P(A), es igual al cociente entre el número de sucesos elementales favorables y el número de sucesos elementales posibles, cuando éstos son igualmente probables.</td></tr>
<tr><td>DEFINICION AXIOMATICA</td><td>Llamamos probabilidad a una aplicación P entre el álgebra de los sucesos aleatorios de un experimento y el cuerpo de los números reales. De forma que a cada suceso A del experimento aleatorio le asocia un número real que llamamos probabilidad de A, P(A), que verifica:
i) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$
ii) $P(S) = 1$
iii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si $A \cap B = \phi$
consecuencias:
$P(A') = 1 - P(A)$
$P(\phi) = 0$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Si $A \subset B$, $P(A) \leqslant P(B)$</td></tr>
</table>

EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. Si lanzamos una moneda al aire 80 veces y se obtiene 38 veces cara, ¿cuál es la frecuencia absoluta del suceso {cruz}? ¿Y la del suceso {cara}?

2. En el experimento anterior, averiguar la frecuencia de cada uno de los dos sucesos.

3. En una determinada ciudad, la frecuencia de personas mayores de 40 años es $\frac{7}{20}$ y la frecuencia de los menores de 15 años es de $\frac{3}{10}$. Hallar el tanto por ciento de cada uno de estos dos grupos.

4. En una fábrica el 15 por 100 de los tornillos producidos son defectuosos y el 85 por 100 no lo son. Hallar la frecuencia de tornillos defectuosos y de tornillos no defectuosos.

5. ¿Cuánto vale la suma de las frecuencias de todos los sucesos elementales de un experimento aleatorio?

6. En un experimento aleatorio consideramos dos sucesos *A* y *B*. Sabiendo que realizamos 40 pruebas y se obtiene 12 veces el suceso *A*, 30 veces el suceso $A \cup B$ y 6 veces el suceso $A \cap B$. Calcular la frecuencia relativa del suceso B.

7. Se lanzan dos monedas distintas al aire. Determinar la probabilidad de que las dos sean caras.

8. En una urna hay 10 bolas blancas y 6 negras. Hallar la probabilidad de que al sacar una, sea negra.

9. Si se tiran dos dados, uno rojo y otro verde, ¿qué probabilidad hay de que los puntos que marquen sumen 8?

10. Hallar la probabilidad de que al sacar una carta de una baraja española sea un «as» o una «sota».

11. Al extraer dos cartas de una baraja española, ¿cuál es la probabilidad de que sean ambas de espadas?

12. Hallar la probabilidad de obtener dos números pares al tirar dos dados diferentes.

13. Si extraemos una carta de una baraja española, ¿cuál es la probabilidad de que sea «copa» o «as»?

14. Para conocer la habilidad de una persona se toman 5 cartas, de entre ellas se eligen dos y se le invita a que las acierte, ¿cuál es la probabilidad de que las acierte?

15. Al repartir entre cuatro personas las 52 cartas de una baraja, ¿cuáles son las probabilidades para un jugador determinado de obtener 0, 1, 2, 3, 4 ases?

16. Una urna contiene 8 bolas rojas, 5 amarillas y 7 verdes. Se extrae una al azar. Determinar la probabilidad de que: a) sea roja, b) sea amarilla, c) sea verde, d) no sea roja, e) sea roja o verde, f) no sea verde.

17. Si A y B son dos sucesos incompatibles de un experimento aleatorio, siendo $P(A) = \frac{1}{3}$ y $P(A \cup B) = \frac{2}{5}$. Calcular $P(B)$.

18. Siendo A y B dos sucesos aleatorios tales que $P(A) = 0{,}35$, $P(A \cup B) = 0{,}5$ y $P(A \cap B) = 0{,}1$. Hallar cuánto vale $P(B)$.

19. Hallar una expresión para calcular $P(A \cup B \cup C)$.

20. Si la probabilidad de un suceso A es $\frac{2}{3}$, ¿cuánto valdrá la probabilidad del suceso complementario?

SOLUCION A LOS EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. Llamamos A = {cruz} y B = {cara}

   $n_A = 42$ y $n_B = 38$

2.

$$fr(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{42}{80} = \frac{21}{40} \quad ; \quad fr(B) = \frac{38}{80} = \frac{19}{40}$$

3. Llamamos A = {mayores de 40 años} y B = {menores de 15 años}

$$fr(A) = \frac{7}{20} = \frac{35}{100} \quad ; \quad 35\ \%\ \text{de A}$$

$$fr(B) = \frac{3}{10} = \frac{30}{100} \quad ; \quad 30\ \%\ \text{de B}$$

4.

$$fr\ (\text{defectuoso}) = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}$$

$$fr\ (\text{no defectuoso}) = \frac{85}{100} = \frac{17}{20}$$

5.

$$fr(S) = 1$$

6.

$$fr(A) = \frac{12}{40} \quad ; \quad fr(A \cup B) = \frac{30}{40} \quad ; \quad fr(A \cap B) = \frac{6}{40}$$

$$fr(A \cup B) = fr(A) + fr(B) - fr(A \cap B)$$

$$\frac{30}{40} = \frac{12}{40} + fr(B) - \frac{6}{40} \quad ; \quad fr(B) = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}$$

7. Los resultados posibles son: {cara, cara}, {cara, cruz}, {cruz, cara} y {cruz, cruz}. Como el único caso favorable es el primero, la probabilidad es $\frac{1}{4}$

8.

$$P = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

9.

N.° casos posibles = $V'_{6,2} = 6^2 = 36$

N.° casos favorables = 5; 2 y 6; 6 y 2; 3 y 5; 5 y 3; 4 y 4

$$P = \frac{5}{36}$$

10.

$$P = \frac{8}{40} = \frac{1}{5}$$

11.

N.° casos posibles = $C_{40,2} = \binom{40}{2} = \frac{40 \cdot 39}{2} = 780$

N.° casos favorables = $C_{10,2} = \binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$

$$P = \frac{45}{780} = \frac{3}{52}$$

12.

N.° casos posibles = $V'_{6,2} = 6^2 = 36$

N.° casos favorables = $V'_{3,2} = 3^2 = 9$

Ya que los números pares son: el 2, el 4 y el 6. Los casos favorables serán las variaciones de estos tres números tomados de 2 en 2 con repetición:

$$P = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

13. N.º casos favorables = 10 + 3 = 13, ya que hay 10 copas y 3 ases que no son de copas.

$$P = \frac{13}{40}$$

14.

$$\text{Casos posibles} = C_{5,2} = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

Caso favorable = 1

$$P = \frac{1}{10}$$

'5. A cada jugador le corresponden 13 cartas, los casos posibles son:

$$C_{52,13} = \binom{52}{13}$$

Casos favorables de 0 ases : $C_{48,13} = \binom{48}{13}$

Casos favorables de 1 as : $C_{4,1} \cdot C_{48,12} = \binom{4}{1} \cdot \binom{48}{12}$

Casos favorables de 2 ases : $C_{4,2} \cdot C_{48,11} = \binom{4}{2} \cdot \binom{48}{11}$

Casos favorables de 3 ases: $C_{4,3} \cdot C_{48,10} = \binom{4}{3} \cdot \binom{48}{10}$

Casos favorables de 4 ases: $C_{4,4} \cdot C_{48,9} = \binom{4}{4} \cdot \binom{48}{9}$

Por tanto:

$$P(0 \text{ ases}) = \frac{\binom{48}{13}}{\binom{52}{13}} \qquad P(1 \text{ as}) = \frac{\binom{4}{1}\binom{48}{12}}{\binom{52}{13}}$$

$$P(2\text{ ases}) = \frac{\binom{4}{2}\binom{48}{11}}{\binom{52}{13}} \qquad P(3\text{ ases}) = \frac{\binom{4}{3}\binom{48}{10}}{\binom{52}{13}}$$

$$P(4\text{ ases}) = \frac{\binom{4}{4}\binom{48}{9}}{\binom{52}{13}}$$

16.

a) $P = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$;

b) $P = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$;

c) $P = \frac{7}{20}$;

d) $P = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$;

e) $P = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$;

f) $P = \frac{13}{20}$

17.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;

$P(B) = \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$

18.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(B) = 0,5 - 0,35 + 0,1 = 0,25$

19.

$P(A \cup B \cup C) = P[(A \cup B) \cup C] = P(A \cup B) + P(C) - P[(A \cup B) \cap C] =$

$= P(A \cup B) + P(C) - P[(A \cap C) \cup (B \cap C)]$

Pero:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

y

$$P[(A \cap C) \cup (B \cap C)] = P(A \cap C) + P(B \cap C) - P[(A \cap C) \cap (B \cap C)] =$$

$$= P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)$$

luego:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

20.

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

TEMA XXI

DISTINTOS TIPOS DE PROBABILIDAD

ESQUEMA/RESUMEN

1. Probabilidad condicionada
2. Probabilidad total
3. Probabilidad compuesta
4. Sucesos dependientes e independientes
5. Teorema de Bayes

INSTRUCCIONES PARA EL ESTUDIO DE ESTE TEMA

Para completar las ideas ya presentadas sobre el concepto de probabilidad, hablamos en este tema de los distintos tipos de probabilidad —condicionada, total, compuesta—, terminando con el teorema de Bayes. En ningún momento hemos intentado profundizar en los puntos aquí presentados, pues entendemos no es necesario, aunque sí consideramos preciso que el alumno se familiarice con las aplicaciones inmediatas de los mismos.

1. PROBABILIDAD CONDICIONADA

Supongamos que de 5.700 individuos de una determinada ciudad, 4.100 tienen los ojos claros y 1.600 los tienen oscuros; por otra parte, hay 2.500 que son rubios y 3.200 que son morenos. Los datos los podemos expresar mediante esta tabla:

	Rubios = A	Morenos = A'	Suma
Ojos claros = B	1.500	2.600	4.100
Ojos oscuros = B'	1.000	600	1.600
Suma	2.500	3.200	5.700

Fácilmente se puede averiguar que la frecuencia de los individuos rubios es:

$$fr(A) = \frac{2.500}{5.700}$$

este número es diferente a la frecuencia de rubios que tienen ojos claros, que llamaremos frecuencia de A condicionado a B (frecuencia de rubios condicionados a que tengan los ojos claros), la representaremos por fr(A/B) y será igual a:

$$fr(A/B) = \frac{1.500}{4.100}$$

Análogamente, la frecuencia de individuos con ojos claros condicionados a que sean rubios será:

$$fr(B/A) = \frac{1.500}{2.500}$$

y la de individuos rubios y con ojos claros será:

$$fr(A \cap B) = \frac{1.500}{5.700}$$

Este último resultado se puede obtener de la siguiente manera:

$$fr(A \cap B) = fr(A) \cdot fr(B/A)$$

puesto que:

$$\frac{1.500}{5.700} = \frac{2.500}{5.700} \cdot \frac{1.500}{2.500}$$

o también:

$$fr(B/A) = \frac{fr(A \cap B)}{fr(A)}$$

Si tenemos en cuenta la íntima relación, ya estudiada, entre la frecuencia de un suceso tras una larga serie de pruebas y su probabilidad, podemos generalizar lo anterior llegando al concepto de *probabilidad condicionada.*

Si *B* es un suceso, cuya probabilidad es distinta de cero, llamaremos *probabilidad del suceso A condicionado al suceso B,* y la representaremos por P(A/B), al siguiente cociente:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Se comprende fácilmente la necesidad de que la probabilidad del suceso B sea distinta de cero, ya que figura en el denominador.

De la definición anterior, resulta que:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$$

Análogamente podemos definir:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

siendo $P(A) \neq 0$, y tendremos, de igual manera:

$$p(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Ejercicios y ejemplos

1. Si extraemos una carta de una baraja española, sabiendo que esta carta es una copa, ¿cuál es la probabilidad de que sea un caballo?

   Llamamos A al suceso: «extraer copa», luego

$$P(A) = \frac{1}{4}$$

   y B al suceso: «extraer caballo», se tiene que

$$P(B) = \frac{1}{10}$$

   El suceso $A \cap B$ será obtener «el caballo de copas», cuya probabilidad es:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{40}$$

   La probabilidad de sacar un caballo, condicionado a que es una copa, será:

$$P(\text{caballo/copa}) = P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{40}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{10}$$

2. Si consideramos el experimento aleatorio de lanzar un dado, y los sucesos,

$$A = \{\text{impar}\} \quad \text{y} \quad B = \{\text{mayor que } 3\}.$$

   Hallar la probabilidad de que hallamos obtenido un número mayor que 3, sabiendo de antemano que dicho número es impar.

   Tendremos que hallar P(B/A).

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{2},$$

$$A \cap B = \{\text{impar mayor que } 3\} = \{5\},$$

   luego

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

   entonces:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$$

2. PROBABILIDAD TOTAL

En el tema anterior vimos, como consecuencia de los axiomas de la probabilidad, el llamado teorema de las probabilidades totales. Dicho teorema expresa la manera de averiguar la probabilidad de la unión de dos sucesos. Es decir:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

La probabilidad de la unión de dos sucesos es igual a la suma de las probabilidades de ambos, menos la probabilidad de la intersección.

Esta expresión es totalmente generalizable para el caso de más sucesos, sin más que utilizar las propiedades del Algebra de Boole de los sucesos. Por ejemplo, para el caso de tres sucesos será:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Veamos algunas aplicaciones de este teorema. Si queremos hallar la probabilidad de sacar de una baraja española, un rey o el 3 de copas o el 7 de bastos; llamando:

$$A = \{\text{rey}\} \quad , \quad B = \{3 \text{ de copas}\} \quad \text{y} \quad C = \{7 \text{ de bastos}\}$$

tendremos que hallar la probabilidad del suceso $A \cup B \cup C$. Como los tres sucesos son incompatibles dos a dos entre sí, tenemos que:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

$$P(A) = \frac{1}{10} \quad ; \quad P(B) = \frac{1}{40} \quad \text{y} \quad P(C) = \frac{1}{40} \ ,$$

luego:

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{1}{10} + \frac{1}{40} + \frac{1}{40} = \frac{6}{40} = \frac{3}{20}$$

Otro ejemplo: Supongamos que en una casa hay 14 hombres y 12 mujeres, de los cuales la mitad de los hombres y la tercera parte de las mujeres tienen el pelo blanco. Si elegimos una persona al azar, hallar la probabilidad de que sea hombre o tenga el pelo blanco.

Sea A = {hombre} y B = {pelo blanco}, tenemos que hallar la probabilidad de $A \cup B$.

$$P(A) = \frac{14}{26} = \frac{7}{13} \quad ; \quad P(B) = \frac{7+4}{26} = \frac{11}{26}$$

$A \cap B$ será el suceso «ser hombre y tener el pelo blanco», luego:

$$P(A \cap B) = \frac{7}{26} \ ,$$

entonces:

$$P(A \cup B) = \frac{7}{13} + \frac{11}{26} - \frac{7}{26} = \frac{9}{13}$$

3. PROBABILIDAD COMPUESTA

Al estudiar la probabilidad condicionada vimos que:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

expresión que corresponde al teorema de la probabilidad compuesta, que se puede enunciar así: la probabilidad de la realización simultánea de dos sucesos aleatorios es igual al producto de la probabilidad de que ocurra uno de ellos (supuesta no nula) por la probabilidad de que ocurra el otro suceso condicionado al primero. Es decir:

$$\text{si } P(A) \neq 0 \quad , \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Análogamente si tenemos 3 sucesos A, B y C, tal que $P(A) \neq 0$, se verifica:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P\left(\frac{C}{A \cap B}\right)$$

puesto que:

$$P[(A \cap B) \cap C] = P(A \cap B) \cdot P\left(\frac{C}{A \cap B}\right)$$

y sustituyendo $P(A \cap B)$ por $P(A) \cdot P(B/A)$ resulta:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P\left(\frac{C}{A \cap B}\right)$$

Expresión generalizable a cualquier número de sucesos.

A continuación realizamos una aplicación de este teorema. Supongamos que tenemos una caja con 4 bolas blancas y 6 negras. Sea A el suceso «la primera bola extraída es negra», y B «la segunda bola extraída es negra». Queremos averiguar cuál es la probabilidad de que en la primera extracción se obtenga negra y en la segunda extracción también se obtenga negra. Es decir, queremos hallar: $P(A \cap B)$.

Podemos considerar dos casos:

a) Sin reemplazamiento: es decir, una vez extraída la primera bola, no la volvemos a introducir de nuevo, y extraemos la segunda bola.

En este caso:

$$P(A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Una vez obtenida la primera bola negra, la retiramos y la composición de la caja antes de la segunda extracción ha variado, pues tiene 4 bolas blancas y 5 negras. Por tanto:

$$P(B/A) = \frac{5}{9}$$

entonces:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{3}$$

b) Con reemplazamiento: en este caso después de sacar la primera bola, la volvemos a meter, con lo cual no varía la composición de la caja antes de la segunda extracción.

En este caso la probabilidad del suceso A no afecta para nada la probabilidad del suceso B. Por tanto:

$$P(A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$P(B/A) = P(B) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \quad ; \quad P(A \cap B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$$

4. SUCESOS DEPENDIENTES E INDEPENDIENTES

Si consideramos dos sucesos *A* y *B* de un experimento aleatorio, en general ocurre que $P(B/A) \neq P(B)$. En este caso diremos que el suceso *B* depende del suceso *A*.

Si se verifica que $P(B/A) = P(B)$, diremos que el suceso *B* es independiente del suceso A.

En el anterior ejemplo, caso b) se cumple que $P(B/A) = P(B)$, luego el suceso *B* es independiente del suceso *A*. Y en el caso a), el suceso *B* depende del suceso *A*.

En el caso en que el suceso *B* sea independiente de *A*, quedará:

$$P(B/A) = P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

sustituyendo esta expresión en la que nos da la probabilidad de A/B, resulta:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$$

Luego si *B* es un suceso independiente de *A*, también se verifica que el suceso *A* es independiente del suceso *B*. Entonces podemos dar como definición de sucesos independientes, la siguiente:

Se dice que dos sucesos *A* y *B* son *independientes* si se verifica que:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Esta expresión se puede generalizar para tres o más sucesos independientes.

En el caso en que la igualdad anterior no se verifique, se dice que *A* y *B* son dependientes.

Algunos ejemplos de sucesos dependientes e independientes nos ayudarán a comprender la diferencia entre ellos.

Si tenemos una urna con 3 bolas blancas y 7 negras, y otra con 4 bolas blancas y 5 negras, y extraemos una bola de cada urna, siendo los sucesos A: «sacar negra de la primera urna» y B: «sacar

negra de la segunda urna»; averiguar si los sucesos A y B son dependientes o independientes entre sí, y hallar $P(A \cap B)$.

$$P(A) = \frac{7}{10} \quad ; \quad P(B) = \frac{5}{9}$$

$$P(B/A) = P(B) = \frac{5}{9}$$

ya que no influye para nada que hallamos sacado bola negra en la primera urna, para que saquemos negra en la segunda.

Luego los sucesos A y B son independientes, y:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{7}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{7}{18}$$

Ejercicios y ejemplos

1. Si lanzamos un dado una vez y consideramos los sucesos:

$$A = \{\text{obtener} \leq 5\} \quad , \quad B = \{\text{obtener un 3}\}.$$

Hallar si A y B son dependientes o independientes y P(B/A).

B/A es el suceso «obtener un 3 sabiendo que es un número ≤ 5».

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(A) = \frac{5}{6} \quad ; \quad P(A \cap B) = \frac{1}{6} \quad ; \quad P(B) = \frac{1}{6}$$

entonces:

$$P(B/A) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{6}} = \frac{1}{5}$$

como $P(B) \neq P(B/A)$, B depende de A, por lo tanto, A y B son dependientes.

2. Si extraemos una carta de una baraja española. Llamando A al suceso «sacar un as» y B al suceso «sacar un oro». Averiguar si estos sucesos son dependientes o independientes.

$$P(A) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} \quad ; \quad P(B) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{40} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{4}$$

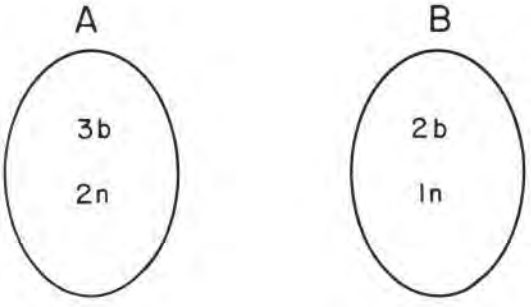
luego:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

A y B son independientes.

5. TEOREMA DE BAYES

Consideremos el siguiente experimento aleatorio: supongamos que tenemos dos urnas A y B, la primera contiene 3 bolas blancas y 2 negras, y la segunda 2 blancas y una negra.



Si llamamos X al suceso «obtener bola blanca» e Y al «obtener bola negra», y hacemos una prueba que consiste en elegir una urna al azar y extraer una bola de dicha urna, tendremos los siguientes sucesos:

X/A es el suceso «obtener blanca supuesto que hemos elegido la urna A
X/B es el suceso «obtener blanca supuesto que hemos elegido la urna B
Y/A es «obtener negra supuesto que hemos elegido la urna A
Y/B es «obtener negra supuesto que hemos elegido la urna B

Podemos considerar también el suceso $X \cap A$, que será «elegir la urna A y extraer blanca» y sabemos que:

$$P(X \cap A) = P(X) \cdot P(A/X) = P(A) \cdot P(X/A)$$

luego:

$$P(A/X) = \frac{P(A) \cdot P(X/A)}{P(X)} \qquad (1)$$

que es esencialmente la *fórmula de Bayes,* aunque suele expresarse de una forma más apropiada para el cálculo; teniendo en cuenta que en el caso de las urnas que estamos considerando, se verifica:

$$X = X \cap (A \cup B) = (X \cap A) \cup (X \cap B)$$

luego:

$$P(X) = P(X \cap A) + P(X \cap B) = P(A) \cdot P(X/A) + P(B) \cdot P(X/B)$$

y sustituyendo este valor en (1) queda la fórmula de Bayes:

$$P(A/X) = \frac{P(A) \cdot P(X/A)}{P(A) \cdot P(X/A) + P(B) \cdot P(X/B)}$$

En el caso de las dos urnas que consideramos, tendremos:

P(A/X): Probabilidad de que hayamos elegido la urna A sabiendo que se ha obtenido bola blanca.

$$P(A) = \frac{1}{2} \quad ; \quad P(B) = \frac{1}{2}$$

ya que es igualmente probable que elijamos una urna u otra.

$$P(X/A) = \frac{3}{5}$$

pues si hemos elegido la urna A, hay 3 casos favorables de sacar blanca y 5 casos posibles.

$$P(X/B) = \frac{2}{3}$$

pues si hemos elegido la urna B, hay 2 casos favorables de sacar blanca y 3 casos posibles.

Por tanto:

$$P(A/X) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{19}{30}} = \frac{9}{19}$$

Si en lugar de ser dos sucesos *A* y *B* imcompatibles, son *n* sucesos:

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$$

que verifican

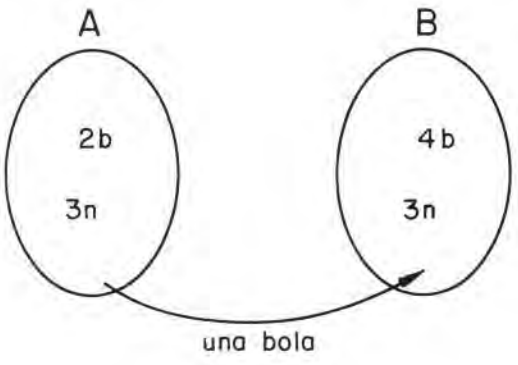
$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n = S \text{ (suceso seguro)}$$

tendremos, en condiciones análogas a las indicadas, la fórmula de Bayes en general:

$$P(A_1/X) = \frac{P(A_1) \cdot P(X/A_1)}{P(A_1) \cdot P(X/A_1) + P(A_2) \cdot P(X/A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(X/A_n)}$$

Una aplicación del teorema de Bayes puede ser la siguiente:

Sea una urna *A* que contiene 2 bolas blancas y 3 negras, y otra *B* compuesta de 4 blancas y 3 negras. Sacamos una bola al azar de la urna *A* y sin verla se echa en *B*; a continuación se saca una bola de *B* y resulta ser negra. ¿cuál es la probabilidad de que la bola pasada de *A* a *B* fuese blanca?



Llamamos X, Y, Z a los sucesos:

X: «bola pasada de A a B, blanca»

Y: «bola pasada de A a B, negra»

Z: «bola extraída de B, negra»

Tenemos que hallar la probabilidad de que la bola pasada de A a B sea blanca, sabiendo que la bola extraída de B es negra, es decir, la P(X/Z), que será igual a:

$$P(X/Z) = \frac{P(X) \cdot P(Z/X)}{P(X) \cdot P(Z/X) + P(Y) \cdot P(Z/Y)}$$

$P(X) = \frac{2}{5}$ (probabilidad de sacar blanca de A)

$P(Y) = \frac{3}{5}$ (probabilidad de sacar negra de A)

P(Z/X) será la probabilidad de sacar bola negra de *B*, sabiendo que hemos introducido una bola blanca; por lo tanto, habrá en *B* 5 bolas blancas y 3 negras, entonces:

$$P(Z/X) = \frac{3}{8}$$

P(Z/Y) será la probabilidad de extraer bola negra de *B*, sabiendo que hemos introducido anteriormente una bola negra; luego en *B* hay 4 blancas y 4 negras.

$$P(Z/Y) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

y sustituyendo estos valores, resulta:

$$P(X/Z) = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{8}}{\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{9}{20}} = \frac{1}{3}$$

La probabilidad pedida es $\frac{1}{3}$

CONCLUSIONES TEMA XXI

PROBABILIDAD CONDICIONADA	Si B es un suceso cuya probabilidad es distinta de cero, llamaremos probabilidad del suceso A condicionado al suceso B, P(A/B) a $$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
PROBABILIDAD TOTAL	$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$ $$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$ generalizable a cualquier número de sucesos.
PROBABILIDAD COMPUESTA	La probabilidad de la realización simultánea de dos sucesos aleatorios es igual a la probabilidad de que ocurra uno de ellos (supuesta no nula) por la probabilidad de que ocurra el otro suceso condicionado al primero. $$\text{Si } P(A) \neq 0 \;\; ; \;\; P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$
SUCESOS DEPENDIENTES E INDEPENDIENTES	Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio Si: $P(B/A) \neq P(B)$ — el suceso B depende del suceso A $P(B/A) = P(B)$ — el suceso B es independiente del suceso A
TEOREMA DE BAYES	$$P(A/X) = \frac{P(A) \cdot P(X/A)}{P(A) \cdot P(X/A) + P(B) \cdot P(X/B)}$$

EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. Una urna se ha llenado lanzando un dado y colocando bolas blancas en número igual al número de puntos obtenidos al lanzar el dado. A continuación se añadieron bolas negras en número determinado por una segunda tirada del dado. Se sabe también que el número total de bolas en la urna es 8. ¿Cuál es la probabilidad de que contenga exactamente 5 bolas blancas?

2. Sabiendo que

$$P(A) = \frac{1}{2} \quad ; \quad P(A/B) = \frac{3}{5} \quad \text{y} \quad P(B/A) = \frac{2}{5}$$

   Hallar el valor de P(B).

3. Si extraemos una carta de una baraja española. Sabiendo que es una figura, ¿cuál es la probabilidad de que sea un basto?

4. Si lanzamos un dado, y sabemos que el número obtenido no es ni un *2* ni un *4*, hallar la probabilidad de que sea un *1*.

5. Si al lanzar un dado sabemos que se ha obtenido un número par, hallar la probabilidad de que sea un *5*.

6. Sabiendo que *A*, *B* y *C* son tres sucesos aleatorios igualmente probables, de probabilidad $\frac{1}{4}$, e incompatibles dos a dos. Hallar cuánto vale: $P(A \cup B \cup C)$.

7. Dados dos sucesos aleatorios *A* y *B*, ¿puede verificarse que

$$P(A) = \frac{2}{5} \quad ; \quad P(B) = \frac{1}{5} \quad \text{y} \quad P(A \cap B) = \frac{4}{5} \; ?$$

8. Una urna contiene *3* bolas blancas y *7* negras. Otra contiene *4* blancas y *5* negras. Extraemos una bola de cada urna. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean negras?

9. Sean *A* y *B* dos sucesos independientes tales que la probabilidad de que ocurran ambos es $\frac{1}{6}$ y la de que no ocurra ninguno es $\frac{1}{3}$. Determinar P(A) y P(B).

10. Un experimento consiste en el lanzamiento de una moneda y la extracción de una carta de una baraja española. Sea A el suceso «salir cara» en la moneda y sea B el suceso «extraer un oro» de la baraja. Calcular:

    a) P(A).

    b) P(A').

    c) P(B).

    d) P(B').

11. Considerando el mismo experimento y los mismos sucesos del problema anterior, calcular:

    a) $P(A \cap B)$.

    b) $P(A \cap B')$.

    c) $P(A' \cap B)$.

    d) $P(A \cup B)$.

12. En una caja tenemos dos bolas blancas, una negra y siete rojas. Extraemos dos bolas sucesivamente. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una bola negra en la primera extracción y una blanca en la segunda extracción?

    a) Devolviendo la primera bola.

    b) Sin devolverla.

13. Hallar la probabilidad de ganar tres juegos independientes si la probabilidad de ganar cada uno de ellos es 0,1.

14. Al lanzar un dado consideramos los sucesos, A = {obtener menor que 3} y B = {obtener mayor que 4}. Hallar $P(A \cup B)$.

15. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar un dado tres veces seguidas salga la primera vez un *1*, la segunda vez un *2* ó un *3* y la tercera un *4*, un *5* ó un *6*?

16. Se toma una carta de una baraja y sin devolverla se toma otra. ¿Qué probabilidad hay de que la primera sea una sota y la segunda un caballo?

17. Hallar la probabilidad de que en una tirada de dos dados distintos salga, por lo menos un 1 y la suma de sus números sea impar.

18. ¿Qué probabilidad hay de que al volver una ficha de un dominó se obtenga un doble o sumen sus puntos más de 8? (el dominó consta de 28 fichas).

19. Supongamos que existiera una prueba diagnóstica para el cáncer, siendo C el suceso de que «una cierta persona tiene cáncer» y A el suceso «el test aplicado es positivo». Sabiendo que

$$P(A/C) = 0{,}95 \ , \ P(A/C') = 0{,}05 \text{ y que } P(C) = 0{,}005.$$

Calcular la probabilidad de que una persona tenga cáncer sabiendo que el test ha resultado positivo.

20. Tenemos *6* cajas que contienen *12* tornillos buenos y defectuosos cada una, tales que una caja tiene *8* tornillos buenos y *4* defectuosos, dos cajas tienen *6* buenos y *6* defectuosos, y tres cajas *4* buenos y *8* defectuosos. Si elegimos una caja al azar y extraemos un tornillo que resulta ser bueno. ¿Cuál es la probabilidad de que la caja elegida contenga *6* tornillos buenos y *6* defectuosos?

SOLUCION A LOS EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. Si llamamos A «en la primera tirada salga un 5» y B«la suma de las dos tiradas es 8». Tenemos que hallar P(A/B):

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

pues, de los 36 casos posibles sólo uno cumple a la vez A y B (el 5,3).

$$P(B) = \frac{5}{36}$$

hay 5 casos que dan de suma 8. Estos son:

(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)

luego

$$P(A/B) = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{1}{5}$$

2. $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$; $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

luego:

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) = P(B/A) \cdot P(A)$$

$$P(B) = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{3}{5}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{3}$$

3. A = {bastos} , B = {figura}

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{40}}{\frac{12}{40}} = \frac{1}{4}$$

4. A: «obtener un 1».

   B: «obtener un número distinto de 2 y de 4».

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{4}{6}} = \frac{1}{4}$$

5. A: «obtener un 5».

   B: «obtener par».

$$\text{Como} \quad A \cap B = \phi \;\; ; \;\; P(A \cap B) = 0 \quad \text{y} \quad P(A/B) = \frac{0}{\frac{1}{2}} = 0$$

6. $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$

   $A \cap B = B \cap C = \phi = A \cap C$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

7. No, porque:

$$P(A \cup B) = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} - \frac{4}{5} = -\frac{1}{5}$$

   y la probabilidad nunca puede ser negativa.

8. A: «obtener negra en la 1.ª urna».

   B: «obtener negra en la 2.ª urna»

Como los dos sucesos son independientes:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{7}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{7}{18}$$

9.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6}$$

$P(A' \cap B')$: probabilidad de que no ocurra A ni B:

$$P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$$

de donde

$$P(A) + P(B) = 1 + P(A \cap B) - P(A' \cap B') = 1 + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \\ P(A) + P(B) = \frac{5}{6} \end{array}\right\}$$ resolviendo el sistema se obtiene:

$$P(A) = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad P(B) = \frac{1}{3}$$

10. $P(A) = \frac{1}{2}$; $P(A') = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$; $P(B') = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

11. Como los sucesos A y B son independientes:

a) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

b) $P(A \cap B') = P(A) \cdot P(B') = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$

c) $P(A' \cap B) = P(A') \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

d) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$

12. a) A: «negra en la primera extracción».

B: «blanca en la segunda extracción».

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{1}{50}$$

b)

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{45}$$

13. $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}001$
Por ser A, B y C independientes.

14. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} - 0 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

15. A: «obtener 1 en la primera tirada».

B: «obtener 2 ó 3 en la segunda tirada».

C: «obtener 4, 5 ó 6 en la tercera tirada»

Como A, B y C son independientes, se verifica:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{36}$$

16. A: «primera carta una sota».

B: «segunda carta un caballo».

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{39} = \frac{4}{390} = \frac{2}{195}$$

17. A: «obtener por lo menos un 1».

B: «su suma sea impar».

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

$P(A) = \frac{11}{36}$, los casos favorables son:

11	21
12	31
13	41
14	51
15	61
16	

$$P(B/A) = \frac{6}{11}$$

de los 11 casos posibles sólo 6 suman impar, luego

$$P(A \cap B) = \frac{11}{36} \cdot \frac{6}{11} = \frac{1}{6}$$

18. A: «obtener un doble».

B: «sumar más de 8»

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{7}{28} + \frac{6}{28} - \frac{2}{28} = \frac{11}{28}$$

13. $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}001$
Por ser A, B y C independientes.

14. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} - 0 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

15. A: «obtener 1 en la primera tirada».

B: «obtener 2 ó 3 en la segunda tirada».

C: «obtener 4, 5 ó 6 en la tercera tirada»

Como A, B y C son independientes, se verifica:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{36}$$

16. A: «primera carta una sota».

B: «segunda carta un caballo».

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{39} = \frac{4}{390} = \frac{2}{195}$$

17. A: «obtener por lo menos un 1».

B: «su suma sea impar».

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

$P(A) = \frac{11}{36}$, los casos favorables son:

11	21
12	31
13	41
14	51
15	61
16	

$$P(B/A) = \frac{6}{11}$$

de los 11 casos posibles sólo 6 suman impar, luego

$$P(A \cap B) = \frac{11}{36} \cdot \frac{6}{11} = \frac{1}{6}$$

18. A: «obtener un doble».

B: «sumar más de 8»

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{7}{28} + \frac{6}{28} - \frac{2}{28} = \frac{11}{28}$$

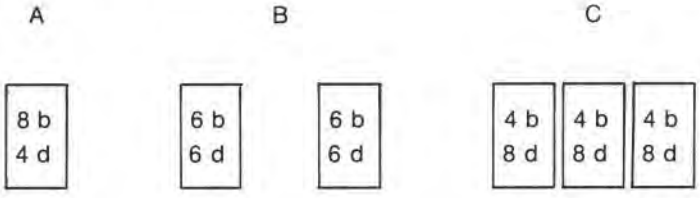
19. Hay que calcular P(C/A), por el teorema de Bayes, es:

$$P(C/A) = \frac{P(C) \cdot P(A/C)}{P(C) \cdot P(A/C) + P(C') \cdot P(A/C')}$$

$$P(C') = 1 - P(C) = 0{,}995$$

$$P(C/A) = \frac{0{,}005 \cdot 0{,}95}{0{,}005 \cdot 0{,}95 + 0{,}995 \cdot 0{,}05} = 0{,}087$$

20. Aplicamos el teorema de Bayes.



Sea X el suceso: «extraer tornillo bueno». Tenemos que hallar: P(B/X).

$$P(B/X) = \frac{P(B) \cdot P(X/B)}{P(B) \cdot P(X/B) + P(A) \cdot P(X/A) + P(C) \cdot P(X/C)}$$

$$P(A) = \frac{1}{6} \quad ; \quad P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad ; \quad P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(X/B) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \quad ; \quad P(X/A) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \quad ; \quad P(X/C) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

luego

$$P(B/X) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{4}{9}} = \frac{3}{8}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE
EDUCACION A DISTANCIA

MATEMATICAS BASICAS

UNIDAD DIDACTICA/6

Preparado por los profesores:
C. Herrera González
J. R. Marco Franco
J. Summers Gámez

TEMA XXII

VARIABLES ESTADISTICAS

ESQUEMA/RESUMEN

1. Generalidades.
   - 1.1. Muestra y población.
   - 1.2. Justificación de la teoría del muestreo. Tipos de muestreo.
   - 1.3. Inferencia estadística.
2. Variables estadísticas.
   - 2.1. Variables estadísticas discretas.
   - 2.2. Variables estadísticas continuas.
3. Representaciones gráficas.
   - 3.1. Histogramas.
4. Estudio de la información.
   - 4.1. Recogida y ordenación de datos.
   - 4.2. Tabla de frecuencias.
   - 4.3. Intervalos de clase.

INSTRUCCIONES PARA EL ESTUDIO DEL TEMA

La estadística es una parte de las Matemáticas que en pocos años ha tomado un auge extraordinario, pudiendo asegurar, sin miedo a equivocarnos, que el lenguaje estadístico es común a las Ciencias Sociales, a la Psicología, la Medicina, la Historia, la Geografía, etc., y habitual en los periódicos y revistas de carácter general.

Es interesante que un alumno que va a iniciar unos estudios universitarios tenga unas nociones elementales de Estadística.

Con este tema iniciamos, pues, esta Unidad Didáctica dedicada a la Estadística. Nos vamos a preocupar de introducir algunas nociones elementales de estadística descriptiva. Este tema no debe presentar dificultad para los estudiantes, solamente pretende la familiarización con los procedimientos estadísticos más simples; población, muestra, variable estadística, tabla de frecuencias, etc.

1. GENERALIDADES

A la palabra «estadística» estamos muy acostumbrados y la utilizamos con diferentes acepciones:

i) De forma más común, entendemos por estadística una colección de datos numéricos ordenados y clasificados según un determinado criterio, así hablamos de estadísticas de producción, de cotizaciones bursátiles, demográficas, etcétera.

ii) También decimos que es una ciencia que, utilizando como instrumento a las matemáticas, estudia las leyes de comportamiento de aquellos fenómenos que dependen del azar. Generalizadas estas leyes y basándose en ellas predice e infiere resultados.

iii) Finalmente, la estadística significa la técnica o el método que se sigue para recoger, organizar, resumir, presentar, analizar, generalizar y contrastar los resultados de las observaciones de los fenómenos reales.

Su importancia es grande: En Metereología, cada resultado observado es consecuencia de muchas causas, temperatura, presión, velocidad, dirección del viento, etcétera, las cuales a su vez lo son de otras muchas, dándose normalmente la circunstancia de que unas pequeñas variaciones en dichas causas pueden ser suficientes para que haya grandes cambios en los resultados. En las ciencias sociales, la determinación de los resultados obedece a innumerables relaciones posibles entre individuos y colectividades. La gran cantidad de factores que operan sobre las enfermedades (algunos de los cuales son: la naturaleza del individuo, regímenes alimenticios, medio ambiente humano, clima, etcétera) hace indicada la utilización de una parte de la matemática en Medicina. En Agricultura, en Sicología, en Genética, en Química y en otras muchas disciplinas, no es posible la experimentación efectuada en condiciones tales que se pueda estudiar la influencia de uno o dos factores solamente.

En todos estos casos, y en otros muchos, se puede lograr la interpretación y explicación matemática de los resultados siguiendo los denominados métodos estadísticos. La rama de la Matemática que se ocupa de tales métodos es la *estadística*, en la que podemos distinguir dos partes: una, *estadística descriptiva*, que se ocupa de

recoger los datos proporcionados por las observaciones y experimentaciones, con los cuales se forman las tablas estadísticas, y después efectuar la reducción de éstas en unos pocos números que los representen de modo significativo. La segunda parte, *estadística inferencial*, utiliza los resultados obtenidos en la primera parte para poder efectuar previsiones y tomar decisiones.

En este tema solamente nos vamos a preocupar de introducir algunas nociones elementales de estadística descriptiva.

1.1. Muestra y población

Si pretendemos conocer la opinión de los españoles, por ejemplo, sobre un determinado programa musical, no existe más solución que preguntárselo a todos los españoles. Para ello sería necesario disponer de unos equipos de entrevistadores para recoger esta opinión. No hace falta señalar que este procedimiento sería muy costoso, por eso es habitual en estos casos seleccionar a un grupo representativo de españoles, *muestra*, para conocer su opinión en vez de entrevistar a su totalidad, *población*.

La palabra *población* se emplea en estadística para designar el conjunto de todos los elementos que cumplen las características planteadas. Es imposible o impracticable examinar la población completa, pero puede examinarse una parte o muestra de la misma, y sobre la base de esta investigación limitada hacer inferencias relativas a la población total.

La población puede ser finita o infinita. Ejemplos del primer tipo pueden ser los alumnos matriculados en la UNED, los enfermos de un hospital, las llamadas telefónicas que diariamente recibe la UNED, etc. Por el contrario, son ejemplos de poblaciones infinitas el lanzamiento de un dado, extracción con reemplazamiento de una carta en una determinada baraja, etc.

Es muy importante tener presente que al estudiar una muestra nos proponemos sacar conclusiones para toda la población, por tanto la muestra ha de ser representativa, de lo contrario, las conclusiones deducidas no tendrían validez.

Un ejemplo puede ilustrar lo que acabamos de decir. Si queremos averiguar el nivel cultural de los habitantes de una ciudad y realizamos la recogida de datos en una muestra formada por alumnos de la Universidad, las conclusiones obtenidas para la población total no son válidas, pues la muestra no es representativa.

1.2. Justificación de la teoría del muestreo. Tipos de muestreo

En el apartado anterior, hemos puesto de manifiesto la necesidad de tomar una muestra, en función de unos criterios prácticos o económicos. Hay ocasiones en las que no existe otra posibilidad para realizar un experimento que recurrir a una muestra de la población a estudiar. Un caso, puede ser, cuando se trata de una población infinita. También hay que utilizar una muestra cuando en el experimento se destruyen los elementos de la población. Tal ocurre, por ejemplo, si tratamos de estudiar la resistencia a la rotura de las barras metálicas, fabricadas en unas condiciones determinadas, es imprescindible utilizar la teoría de muestreo, por motivos obvios.

De los distintos procedimientos utilizados para elegir una muestra entre una población, para que sea representativa, el más utilizado es el denominado *muestreo al azar*. Su mismo nombre indica en qué consiste; se trata de seleccionar «por sorteo» o mediante una «urna» los elementos de la población que deben integrar la muestra escogida. Por este procedimiento todos los elementos de la población tienen la misma probabilidad de ser incluidos en la muestra.

Supongamos que hemos caracterizado los elementos de una población cualquiera, asignándolos unos números que introducimos en una urna, para obtener una muestra, siguiendo el procedimiento anterior. Existen dos posibilidades: una, consiste en una vez extraído un número de la urna volverlo a introducir en la misma y, otra, no introducir en la urna el número sacado. En el primer caso, muestreo con reemplazamiento, un elemento de la población puede aparecer más de una vez en la muestra, mientras que en el segundo, muestreo sin reemplazamiento, solamente puede aparecer una vez.

El muestreo al azar puede presentar una variante, consistente en asignar a cada elemento de la población un número perteneciente a la llamada tabla de números aleatorios, que es una serie de números obtenidos por procedimientos mecánicos. De manera que para seleccionar una determinada muestra podemos hacerlo escogiendo, por ejemplo, los cien primeros números aleatorios de la tabla, así obtenemos una muestra al azar, puesto que los cien primeros números de la tabla de números aleatorios no coinciden con los cien primeros elementos de la población, por decirlo de alguna manera. Con esta tabla de números aleatorios se evita, también, cualquier tipo de tendencias que puede tener el encargado de tomar la muestras.

1.3. Inferencia estadística

Hemos analizado, entre otras, la posibilidad de que un experimento se pueda realizar infinitas veces y dada la imposibilidad de su realización, se suele reducir tomando una muestra, a partir de la cual se suele deducir el comportamiento de la población total. Así, si queremos lanzar una moneda una infinidad de veces, para deducir un resultado de este experimento es suficiente realizarlo 20 ó 30 veces, por ejemplo. De forma análoga, si queremos determinar el peso medio de los españoles, podemos optar por averiguar el peso de los españoles de edad comprendida entre treinta y cuarenta años, esta sería la muestra observada y de sus resultados deducimos el peso medio de la población española. Si nos limitásemos a expresar estadísticamente el peso de los españoles comprendidos entre treinta y cuarenta años, no tendríamos una muestra significativa. Para tener tal significado es necesario deducir unos resultados generales, resultados válidos para toda la población, partiendo de unos pocos.

En resumen, llamaremos *inferencia estadística* al paso de lo particular a lo general. Es decir, una vez estudiada una determinada muestra hemos de sacar conclusiones para la totalidad de la población.

El lector puede adivinar la importancia que tiene en Estadística este concepto, pues es muy interesante saber cuándo las conclusiones referidas a una población y obtenidas a partir de una muestra son válidas y cuál es su grado de credibilidad.

2. VARIABLES ESTADISTICAS

Cuando se realizan varias pruebas de un experimento aleatorio, el resultado obtenido varía de unas pruebas a otras, tenemos una *variable estadística* o *variable aleatoria*.

Así, al preguntar a los alumnos de una clase la nota obtenida en Matemáticas, tenemos diversas puntuaciones, diversos valores de una variable estadística. Cuando lanzamos un dado, el punto que obtenemos es una variable aleatoria. La talla de los habitantes de Alicante forma distintos valores de una variable estadística.

La tabla estadística de una variable viene a ser una recopilación ordenada de los valores de dicha variable y las frecuencias que corresponden a estos valores.

Consideramos el siguiente ejemplo: En una clase de Matemáticas tenemos 50 alumnos que hemos calificado en un examen, asignándoles un número natural comprendido entre 0 y 10

En este caso la variable estadística x es la calificación obtenida por los alumnos, de acuerdo con los conocimientos mostrados. Los valores que aparecen en la lista de alumnos son:

6, 7, 3, 4, 4, 5, 8, 9, 2, 4, 5, 5, 9, 4, 1, 1, 0, 2, 0, 6, 5, 7, 1, 6, 5, 5, 4, 3, 3, 7, 1, 3, 4, 6, 5, 1, 8, 5, 3, 3, 6, 3, 2, 3, 5, 5, 0, 3, 4, 3

Agrupando a los alumnos que han obtenido una misma calificación efectuamos un recuento, por medio del cual queda asignado a cada valor de x una frecuencia, y la distribución de notas queda reseñada en la tabla:

TABLA 1

X	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*Total*
Frecuencia absoluta	3	5	3	10	7	10	5	3	2	2	0	50
Frecuencia relativa	0,06	0,1	0,06	0,2	0,14	0,2	0,1	0,06	0,04	0,04	0	1

Otro ejemplo: La variable estadística, en este caso, es el resultado de medir, en centímetros, las estaturas de 100 personas.

Obtenemos la siguiente tabla:

TABLA 2

X	*Frecuencia absoluta*	*Frecuencia relativa*
150	1	0,01
155	1	0,01
160	8	0,08
165	21	0,21
170	31	0,31
175	24	0,24
180	10	0,10
185	4	0,04
Total	100	1,00

Llamaremos *dominio* de una variable estadística al conjunto de los posibles valores que puede tomar.

2.1. Variables estadísticas discretas

Una variable estadística es discreta cuando entre dos valores cualesquiera no puede tomar una infinidad de valores.

Si consideramos la variable aleatoria «*Número de hijos de un matrimonio*», tenemos una variable estadística discreta, puesto que entre dos valores cualesquiera 3 y 5 hijos, por ejemplo, sólo puede existir el valor 4.

2.2. Variables estadísticas continuas

Una variable estadística es continua cuando entre dos valores cualesquiera puede tomar, en teoría, una infinidad de valores.

Así la variable aleatoria «vida media de una bombilla» es una variable estadística, puesto que, por ejemplo, entre 20 y 25 horas, esta variable puede tomar una infinidad de valores.

Ejercicios y ejemplos

1. Queremos analizar el nivel de audiencia de un cierto programa de la televisión, para ello entrevistaremos a 100 personas. ¿Cuál es la población?, ¿cuál es la muestra?

   La población es el conjunto de personas que ven la televisión y la muestra será las 100 personas entrevistadas.

2. En los dos casos siguientes seleccionar la muestra representativa:

   a) Para estudiar la delincuencia española, se toman las siguientes muestras:

      — 20 presos comunes.

      — 20 universitarios.

      — 20 personas sacadas al azar de entre toda la población.

   b) Se quiere hacer una encuesta sobre el funcionamiento de una determinada línea de autobuses, tomando las siguientes muestras:

      — 20 usuarios de la línea a las 8 de la mañana.

      — 20 usuarios de la línea a las 12 de la mañana.

      — 20 usuarios repartidos a lo largo de todo el día.

   En el primer caso, es evidente que la muestra representativa será la tercera, y en el segundo caso será también la tercera, ya que los problemas serán distintos a las 8 de la mañana que a las 12.

3. Dadas las siguientes variables aleatorias:

   — «Número de libros de una biblioteca».

   — «Velocidad de los coches en un determinado momento».

   — «Peso de los universitarios».

   — «Llamadas telefónicas recibidas en la oficina en un día».

   Indicar razonadamente las variables estadísticas continuas y las discretas.

   La primera y la cuarta son variables discretas, ya que entre dos valores cualesquiera no puede haber una infinidad. La segunda y la tercera son continuas, ya que sí los puede haber, así por ejemplo, entre 60 km/h y 80 km/h podemos encontrar infinitos valores: 65 km/h, 65,5 km/h, 65,55 km/h, 65,555 km/h, etc.

   Lo mismo ocurre con la tercera, entre 70 kg y 80 kg puede haber infinitos valores.

4. Dadas las siguientes variables estadísticas, decir cuáles son sus correspondientes dominios:

   a) Capacidad de un depósito de gasolina.

   b) Puntos obtenidos en el lanzamiento de un dado.

   c) Palos obtenidos en la extracción de una carta de una baraja.

   d) Número de empleados en una fábrica.

   e) Velocidad de un proyectil.

   ¿Son discretas o continuas?

   a) La variable es continua. Dominio desde cero al número máximo de litros de capacidad.

   b) Es discreta. Dominio: (1, 2, 3, 4, 5, 6).

   c) Es discreta. Dominio: (oros, copas, espadas, bastos).

   d) Es discreta. Dominio: de 0 al número máximo de empleados que tenga.

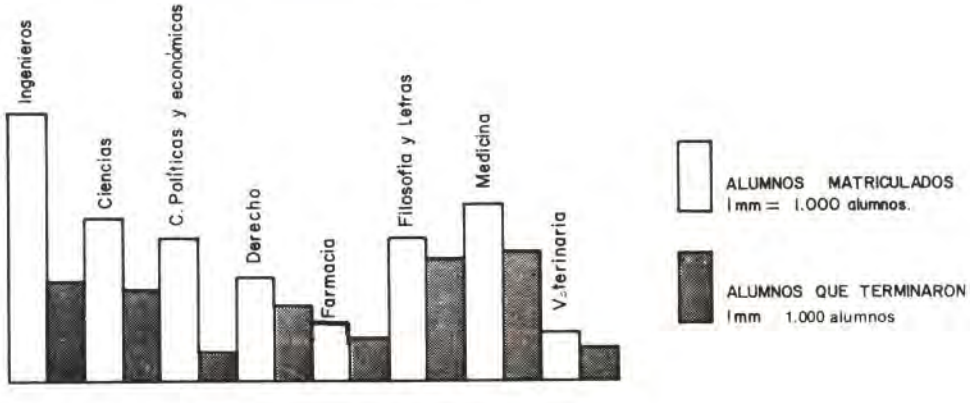
   e) Es continua. Dominio: desde 0 a la velocidad máxima.

3. REPRESENTACIONES GRAFICAS

La idea comparativa de las diversas cantidades expresadas en una tabla estadística, se percibe de una manera más rápida por medio de las representaciones gráficas.

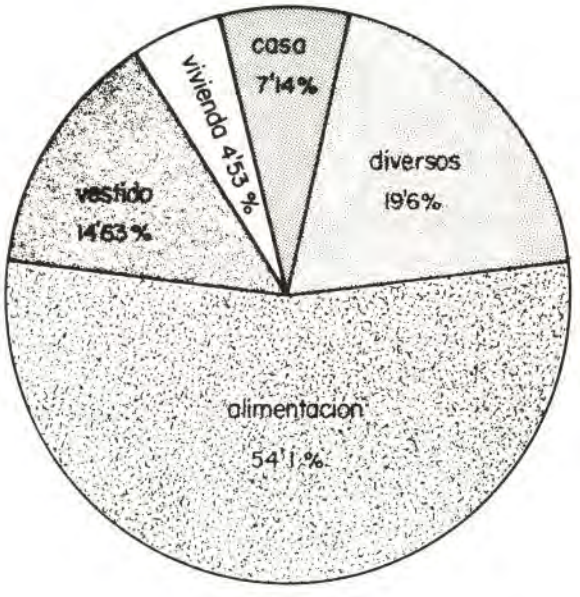
Hay distintas maneras de efectuar una representación gráfica de una tabla, una de las cuales es mediante los llamados *diagramas de barras*. En un diagrama de barras, cada una de las cualidades que figura en la tabla se representa por medio de un rectángulo, uno de cuyos lados es muy pequeño y el otro proporcional a los números que le corresponden en la tabla.

Vamos a representar la primera tabla estadística referente a los alumnos que estudiaron y terminaron la carrera en los distintos centros estatales en el curso 1967-68.



Si con referencia a una misma cualidad la tabla presenta todas las posibles diversificaciones de la misma, la comparación de sus medidas entre si y con el total se pone de manifiesto gráficamente de preferencia con los *gráficos sectoriales*. Cada subcualidad se representa por un sector circular, todos de una misma circunferencia, de modo que los ángulos centrales sean proporcionales a las medidas que les corresponden en la tabla. Estos sectores son contiguos, y si están representadas todas las subcualidades, su unión será un círculo.

Para mayor claridad vamos a representar con un gráfico de este tipo los gastos medios de una familia. A cada clase de gasto le corresponde un sector circular.



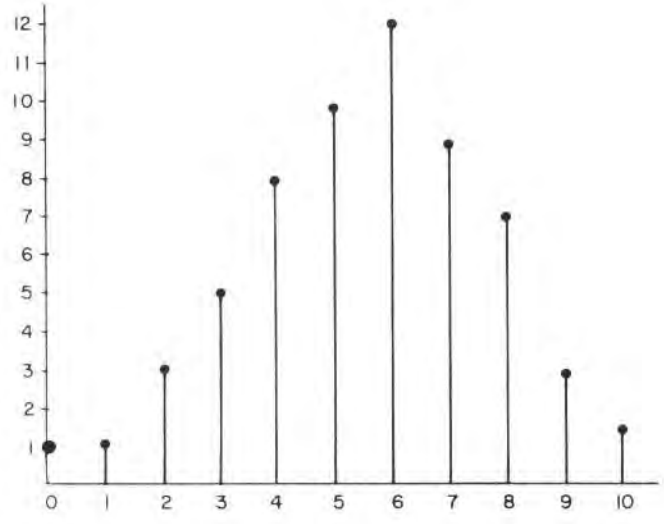
Con el fin de familiarizarnos con estas normas de representación, vamos a analizar algunos ejemplos para ayudar a comprender la representación gráfica de tablas estadísticas.

Supongamos que en un examen los 60 alumnos han obtenido las calificaciones expresadas en la siguiente tabla

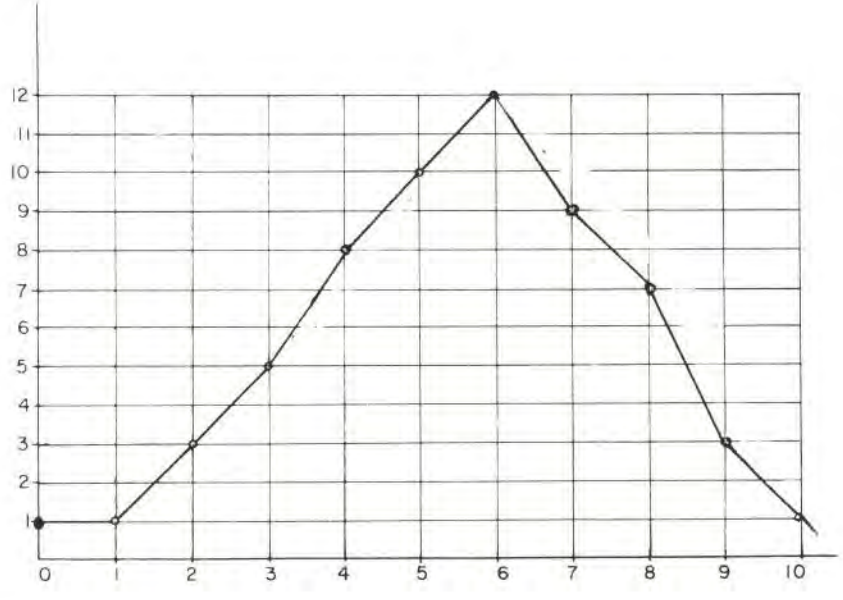
TABLA 3

Puntuaciones	*N.° alumnos (Frecuencia)*
0	1
1	1
2	3
3	5
4	8
5	10
6	12
7	9
8	7
9	3
10	1

Podemos utilizar la siguiente representación: en el eje de abscisas colocamos las distintas puntuaciones y en el eje de ordenadas el correspondiente número de alumnos.



A veces se prefiere que la representación quede reducida a una línea *(polígono de frecuencias)* sin más que unir los puntos señalados en el gráfico anterior con una línea como mostramos en la figura siguiente:



La información suministrada por los gráficos anteriores, en la mayoría de los casos, puede considerarse como insuficiente. Volviendo al ejemplo anterior, es evidente, que según la representación utilizada, obtenemos con facilidad el número de alumnos que han obtenido una determinada nota, pero no nos suministra el número de alumnos que han sobrepasado cierta puntuación.

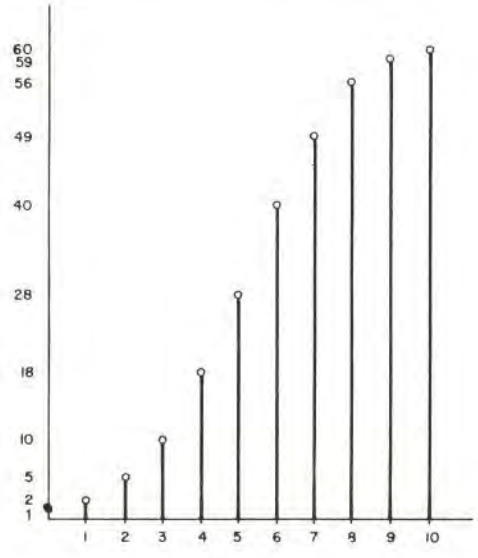
Para resolver este problema introducimos las llamadas *frecuencias acumuladas (*)*, la tabla 3 queda entonces:

(*) Aunque analizando la tabla siguiente, parece sencillo ver como se calculan las frecuencias acumuladas. Para saber todos los valores menores o iguales a un x_i, hay que sumar las frecuencias que corresponden a todos los valores x_1, x_2, x_3... hasta x_i (x_i incluida).

TABLA 4

Puntuaciones	*Frecuencia*	*Frecuencia acumulada*
0	*1*	*1*
1	*1*	*2*
2	*3*	*5*
3	*5*	*10*
4	*8*	*18*
5	*10*	*28*
6	*12*	*40*
7	*9*	*49*
8	*7*	*56*
9	*3*	*59*
10	*1*	*60*

Siguiendo los mismos criterios que antes, podemos construir un diagrama de frecuencias acumuladas o polígonos de frecuencias acumuladas:



Vamos a calcular la tabla de frecuencias acumuladas que corresponden a la variable de la tabla 2.

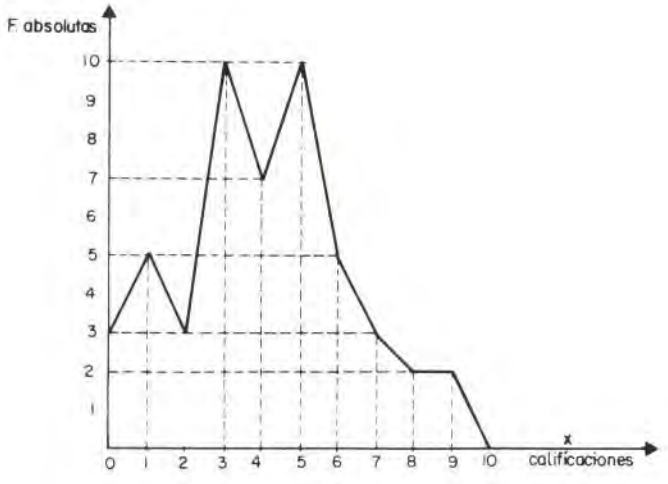
TABLA 5

	Frecuencias acumuladas (absolutas)	*Frecuencias acumuladas (relativas)*
150	1	0,01
155	2	0,02
160	10	0,10
165	31	0,31
170	62	0,62
175	86	0,86
180	96	0,96
185	100	1,00

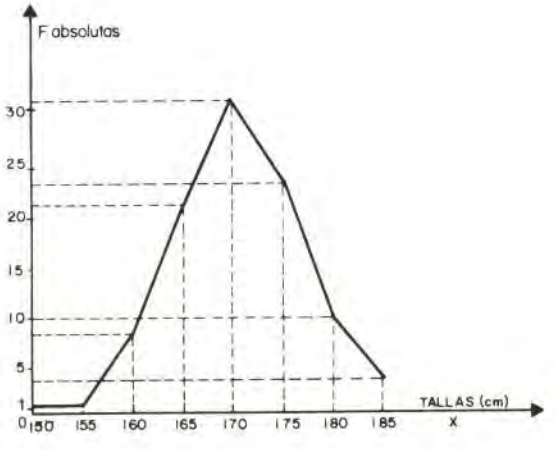
Ya hemos visto que la correspondencia entre los valores de una variable estadística cuantitativa y sus frecuencias se puede representar mediante un diagrama cartesiano. Sobre el eje horizontal hemos representado, los valores de la variable estadística y sobre el eje vertical los distintos valores de la frecuencia. Es lo mismo que las frecuencias sean absolutas o relativas, éstas se obtienen dividiendo todas las frecuencias absolutas por un mismo número: el número total de casos observados. En la representación gráfica, un caso se reduce al otro cambiando la unidad de medida en las ordenadas.

Cada pareja de números formados por el valor de la variable estadística y su frecuencia correspondiente, queda representado por un punto del plano: la línea poligonal, cuyos vertices son los puntos así obtenidos recibe el nombre de *polígono de frecuencias.*

A modo de aclaración, hacemos dos nuevas representaciones gráficas. En primer lugar nos referimos a la tabla 1, vamos a construir el polígono de frecuencias que corresponde a la variable estadística *x* de calificaciones en Matemáticas.



El otro ejemplo corresponde al caso presentado en la tabla 2; como el alumno recordará en esta tabla aparece la distribución de las estaturas de 100 personas.



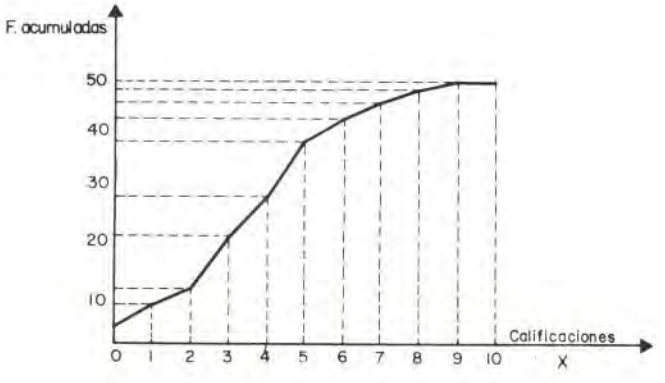
Seguimos recopilando lo visto, considerando nuevos ejercicios. Si hacemos corresponder a cada valor de la variable estadística su frecuencia acumulada (la suma de todas las frecuencias que corresponden a todos los valores de la variable menores o iguales que uno considerado) los puntos correspondientes son los vértices del *polígono de frecuencias acumuladas.*

En primer lugar, recurrimos de nuevo a la tabla 1, pero antes construimos la tabla donde ponemos de manifiesto las frecuencias acumuladas.

TABLA 6

	0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
Frecuencias acumuladas (absolutas)	3	8	11	21	28	38	43	46	48	50	50
Frecuencias acumuladas (relativas)	0,06	0,16	0,22	0,42	0,56	0,76	0,86	0,92	0,96	1	1

El polígono de frecuencias acumuladas lo mostramos en el diagrama siguiente:



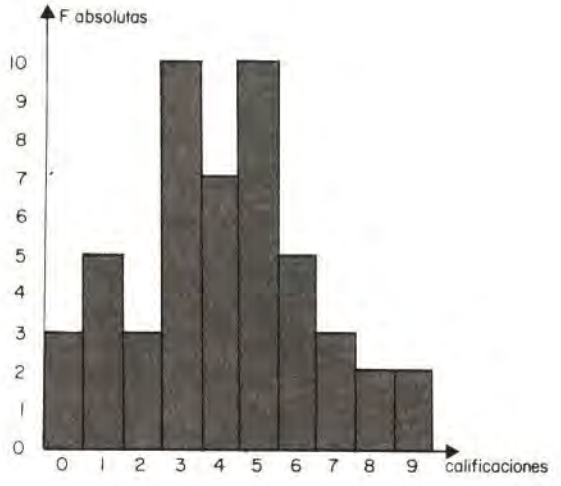
3.1. Histogramas

En muchos casos los valores de la variable estadística son los resultados de un proceso de medición, por lo cual puede suceder que el número diferente de ellos sea excesivamente grande, lo que va en perjuicio de su manejo; por otra parte, no tiene utilidad, a menudo, el considerar como diferentes a valores de la variable cuya diferencia sea menor que cierto número adecuado en cada caso. En estos casos se toma el convenio de agrupar en clases los resultados de observaciones: se toman en una misma clase y se representan por un sólo valor de la variable estadística todos los valores que difieren de este representante menos que cierto número fijo que la práctica aconsejará.

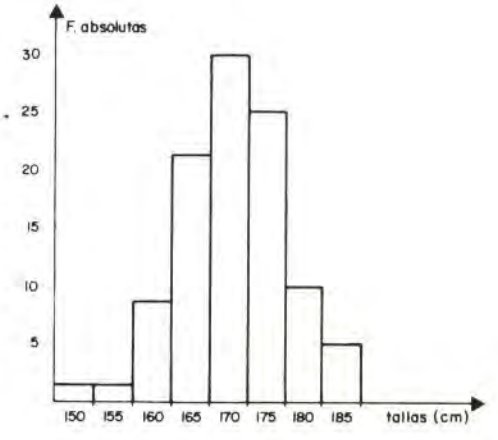
Antes de seguir adelante recurrimos a la tabla 2. En ella presentábamos los resultados de medir la estatura de 100 personas, los valores de la variable están especificados de cinco en cinco centímetros, esto no debe interpretarse como que ninguna de las personas medidas tenía, por ejemplo, estatura de 167 centímetros. Todos los individuos que tuvieran esta estatura aparecen reflejados en 165 cm, este número representa a la clase que agrupa a todos aquellos cuya estatura está comprendida entre 162,5 y 167,5 cm. El número 165 cm. es la *marca de clase*. De esta manera la variable estadística queda agrupada en clases, caracterizando cada clase por su marca de clase, que generalmente coincide con el valor medio de dicha clase o intervalo.

La representación más adecuada para este tipo de distribuciones es un *histograma*. En un histograma, en el eje horizontal representamos cada una de las clases por un segmento cuyo punto medio tiene como abscisa la marca de la clase (todos los segmentos son contiguos). Sobre el eje de ordenadas o eje vertical, utilizando la unidad adecuada, representamos las frecuencias. El histograma queda determinado dibujando rectángulos cuyas bases son los segmentos que representan las clases y cuyas alturas son las frecuencias que corresponden a las mismas. Puesto que las bases de todos los rectángulos son iguales, sus áreas resultan proporcionales a las alturas, o sea, a las frecuencias.

A continuación construimos el histograma correspondiente a la tabla 1, en la que reflejamos las notas obtenidas por 50 alumnos en un examen de Matemáticas.



Ahora recurrimos, una vez más, a la tabla 2, en ella hemos recogido los resultados de medir la estatura de 100 personas. El diagrama correspondiente es:



4. ESTUDIO DE LA INFORMACION

Nos preocupa, una vez recogidos los datos que deseamos analizar, disponerlos adecuadamente para facilitar su manejo. El proceso es sumamente complejo y aunque no lo estudiaremos con toda su extensión, conviene que algunos detalles del mismo sean perfectamente comprendidos. En el estudio que proponemos nos referimos constantemente a un caso concreto, a un ejemplo, sacando todas las conclusiones posibles a partir del mismo, en unos casos; y en otros, aplicaremos al mismo definiciones y conceptos nuevos o ya conocidos.

4.1. Recogida y ordenación de datos.

Supongamos que tenemos en una clase 25 alumnos y queremos averiguar la nota media obtenida en un examen de Matemáticas. Las puntuaciones obtenidas por estos alumnos son:

0, 3, 5, 7, 9, 10, 4, 7, 8, 3, 1, 8, 6, 5, 4, 3, 4, 5, 9, 0, 1, 5, 4, 7, 8

Una vez recogidos los datos, estableceremos un criterio para ordenarlos, criterio variable según las circunstancias concretas, para nosotros ahora será: ordenarlos de menor a mayor. En consecuencia, obtenemos:

0, 0, 1, 1, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 10

Es fácil imaginar que si se trata de una muestra muy grande este trabajo es muy laborioso. En la actualidad para la ordenación y todo tipo de operaciones con los datos se utilizan ordenadores electrónicos, lo cual supone, además de comodidad y ahorro de tiempo, una gran fiabilidad.

4.2. Tabla de frecuencias

Resulta interesante para trabajar con estos datos en una forma ordenada, construir las llamadas *tablas de frecuencias*, en las que se hace constar los posibles valores de la variable estadística y sus correspondientes frecuencias:

Puntuaciones	*Frecuencias*	*Frecuencias acumuladas*
0	2	2
1	2	4
2	0	4
3	3	7
4	4	11
5	4	15
6	1	16
7	3	19
8	3	22
9	2	24
10	1	25
Total	25	

Obsérvese que la suma total de frecuencias ha de coincidir con el número total de elementos de la muestra.

Cada uno de los posibles valores de la variable estadística se llama *clase*. Así, si decimos que la clase es 5, nos referimos a todos los alumnos que han sacado 5 puntos, que en nuestro caso han sido cuatro.

Para entender mejor este concepto vamos a referirnos a continuación a una variable continua. Se trata de analizar la talla de 20 universitarios. Efectuadas las correspondientes medidas y ordenados los datos obtenemos:

1.63, 1.63, 1.64, 1.65, 1.65, 1.66, 1.67, 1.68, 1.69, 1.69, 1.69, 1.70, 1.70, 1.70, 1.70, 1.71, 1.71, 1.72, 1.75, 1.80.

Construimos, en este caso, las clases con intervalos de 5 cm, obtenemos las siguientes cinco clases:

1.60 – 1.64
1.65 – 1.69
1.70 – 1.74
1.75 – 1.79
1.80 – 1.84

La tabla de frecuencias es:

Alturas	*Frecuencias*	*Frecuencias acumuladas*
1.60 – 1.64	3	3
1.65 – 1.69	8	11
1.70 – 1.74	7	18
1.75 – 1.79	1	19
1.80 – 1.84	1	20
Total	20	

La clase *1.60 – 1.64* representa a todos los universitarios cuya altura está comprendida entre 1.60 y 1.64 ambos inclusive, que según indica la tabla anterior son tres los universitarios que reúnen estas condiciones.

4.3. Intervalos de clase

Llamamos *intervalo de clase* a un símbolo que representa a las clases. Así, en el ejemplo anterior, *1.60 – 1.64* es un intervalo de clase. En lo sucesivo emplearemos indistintamente las palabras *clase* e *intervalo de clase.*

En el intervalo *1.60 – 1.64,* el número 1.60 constituye el extremo inferior del mismo, mientras que 1.64 es el extremo superior.

A la longitud de la clase se le llama *recorrido.* En el caso que estamos analizando, el recorrido es 5 cm. y para obtenerlo basta restar los dos extremos superiores o inferiores consecutivos. Así:

Recorrido: 1.65 – 1.60 = 1.69 – 1.64 = 5 cm.

Llamamos *marca de clase* al punto medio de la clase. Para obtenerlo basta sumar los límites superior e inferior y dividir el resultado por dos.

La marca de clase de 1.60 – 1.64 es:

$$\text{Marca de clase: } \frac{1.60 + 1.64}{2} = \frac{3.24}{2} = 1.62$$

Es fácil de comprobar que la marca de clase tiene el mismo número de puntos delante que detrás.

Vamos a partir del hecho de tener unos datos ordenados, que deseamos distribuir en un cierto número de clases; tratamos de conseguir un procedimiento que nos permita averiguar el recorrido de las clases.

Razonamos sobre un ejemplo. Sea la serie de datos ordenados siguientes:

1.63, 1.63, 1.64, 1.65, 1.66, 1.67, 1.67, 1.68, 1.69, 1.69, 1.70, 1.70, 1.70, 1.71, 1.71, 1.75, 1.94

queremos averiguar el recorrido de cada una de las clases para conseguir una distribución de cuatro clases.

Calculamos el recorrido total utilizando el procedimiento conocido:

$$1.94 - 1.63 = 0.31$$

Dividiendo el recorrido entre el número de clases:

$$0.31 : 4 = 0.07$$

Este será el recorrido de las clases, por tanto, partiendo de 1.63, obtenemos:

1.63 + 0.07 = 1.70	intervalo de clase	1.63 – 1.70
1.71 + 0.07 = 1.78	intervalo de clase	1.71 – 1.78
1.79 + 0.07 = 1.86	intervalo de clase	1.79 – 1.86
1.87 + 0.07 = 1.94	intervalo de clase	1.87 – 1.94

Por tanto las cuatro clases son:

1.63 – 1.70
1.71 – 1.78
1.79 – 1.86
1.87 – 1.94

podemos comprobar fácilmente que el recorrido es 0.08, en efecto:

$$1.71 - 1.63 = 1.78 - 1.70 = 1.79 - 1.71 = \ldots = 1.94 - 1.86$$

Nota: Los intervalos pueden darse además de la forma indicada, como indica la tabla siguiente:

100 – 200
200 – 300
300 – 400

En este caso el 200 pertenecería al primer intervalo, en el segundo intervalo estarían desde 201 al 300, y así sucesivamente.

Ejercicios y ejemplos

1. En la tabla siguiente representamos los gastos personales que diariamente realiza un individuo. Lo hemos tabulado, de la forma acostumbrada, calificando estos gastos, en nueve intervalos:

Intervalo	*Frecuencia absoluta*
100 - 200	12
200 - 300	38
300 - 400	56
400 - 500	120
500 - 600	145
600 - 700	163
700 - 800	182
800 - 900	75
900 - 1.000	34

Calcular las frecuencias absolutas acumuladas, las frecuencias relativas y las frecuencias relativas acumuladas.

Llamando n a la frecuencia absoluta; N, frecuencia absoluta acumulada; f, frecuencia relativa, y F, frecuencia relativa acumulada.

	n	N	f	F
100 - 200	12	12	0,014	0,014
200 - 300	38	50	0,046	0,060
300 - 400	56	106	0,067	0,127
400 - 500	120	226	0,145	0,272
500 - 600	145	371	0,175	0,447
600 - 700	163	534	0,197	0,644
700 - 800	182	716	0,220	0,864
800 - 900	75	791	0,090	0,954
900 - 1.000	34	825	0,041	0,995
	825		0,995	

Cada una de las frecuencias relativas de un intervalo se obtiene dividiendo su correspondiente frecuencia absoluta por el número total de personas encuestadas, 825.

2. Se ha lanzado un dado 100 veces, obteniéndose los siguientes resultados:

6, 1, 6, 3, 1, 4, 5, 2, 5, 6, 1, 5, 3, 4, 1, 4, 6, 2, 1, 3, 1, 4, 6, 2, 5, 4, 3, 1, 5, 2, 2, 3, 6, 3, 5, 2, 4, 1, 6, 6, 2, 4, 5, 3, 6, 4, 6, 3, 6, 6, 4, 4, 2, 2, 5, 1, 6, 3, 1, 2, 5, 3, 1, 1, 4, 3, 5, 1, 5, 3, 3, 1, 6, 5, 2, 6, 1, 4, 5, 5, 1, 4, 6, 3, 2, 5, 6, 5, 2, 2, 4, 1, 3, 3, 4, 6, 4, 3, **2, 1.**

Presentar dichos resultados en una tabla estadística.

Disponemos los datos en dos columnas: una para los valores distintos que toma la variable y otra para las frecuencias absolutas de cada uno de ellos:

X	*Recuento*	*n*
1	//// //// //// ///	18
2	//// //// ////	15
3	//// //// //// //	17
4	//// //// //// /	16
5	//// //// //// /	16
6	//// //// //// ///	18
		100

Debajo de la columna llamada «recuento» hemos expuesto un procedimiento, primitivo, para averiguar los distintos valores de *n:* cada vez que aparece un determinado valor trazamos una barra, agrupandolas de cinco en cinco para totalizar de una forma más sencilla.

3. Las notas finales de 100 estudiantes son las siguientes:

11, 46, 58, 25, 48, 18, 41, 35, 59, 28, 35, 2, 37, 68, 70, 31, 44, 84, 64, 82, 26, 42, 51, 29, 29, 92, 56, 5, 52, 8, 1, 12, 21, 6, 32, 15, 67, 47, 61, 47, 43, 33, 48, 47, 43, 69, 49, 21, 9, 15, 11, 22, 29, 14, 31, 46, 19, 49, 51, 71, 52, 32, 51, 44, 57, 60, 43, 65, 73, 62, 3, 17, 39, 22, 40, 65, 30, 31, 16, 80, 41, 59, 60, 41, 51, 10, 63, 41, 74, 81, 20, 36, 59, 38, 40, 43, 18, 60, 71, 44.

Averiguar:

i) El número de estudiantes con nota superior a 50 e inferior a 80.

ii) La nota del estudiante número 38 en orden a la peor puntuación.

Vamos a agrupar los resultados obtenidos de las observaciones, en tres columnas:

Primera columna: Intervalo con amplitud fija, vamos a distinguir 10 intervalos, clasificando, así, las notas de 0 - 10, 10 - 20, 20 - 30, 30 - 40, etcétera.

Segunda columna: La frecuencia absoluta de cada intervalo (n).

Tercera columna: Frecuencias absolutas acumuladas (N).

Intervalos		n_A	N_A
0 - 10	////////	8	8
10 - 20	//////////	12	20
20 - 30	///// /////	10	30
30 - 40	//////////////	14	44
40 - 50	//////////////////// /	21	65
50 - 60	////////////////////	16	81
60 - 70	//////////	10	91
70 - 80	/////	5	96
80 - 90	///	3	99
90 - 100	/	1	100

De esta tabla podemos deducir:

i) El número de estudiantes con nota superior a 50 e inferior a 80:

$$16 + 10 + 5 = 31$$

que corresponden a los intervalos sexto, séptimo y octavo.

ii) Observando la tercera columna el estudiante número 38 tiene una nota comprendida entre 30 y 40 puntos.

4. El primer valor de una variable estadistica o aleatoria observada es 21.2 y el último valor 28.3. Establecer las clases y marcas de clase correspondiente.

Tomando intervalos de amplitud igual a una unidad y empezando por el valor 21, podemos escribir:

Intervalos	*Marca de clase*
21 - 22	21.5
22 - 23	22.5
23 - 24	23.5
24 - 25	24.5
25 - 26	25.5
26 - 27	26.5
27 - 28	27.5
28 - 29	28.5

No es esta la única forma de realizarla, por ejemplo, si tomamos amplitudes de dos unidades, tendríamos:

Intervalos	*Marca de clase*
21 - 23	22
23 - 25	24
25 - 27	26
27 - 29	28

5. En la tabla siguiente presentamos una distribución de frecuencias acumuladas:

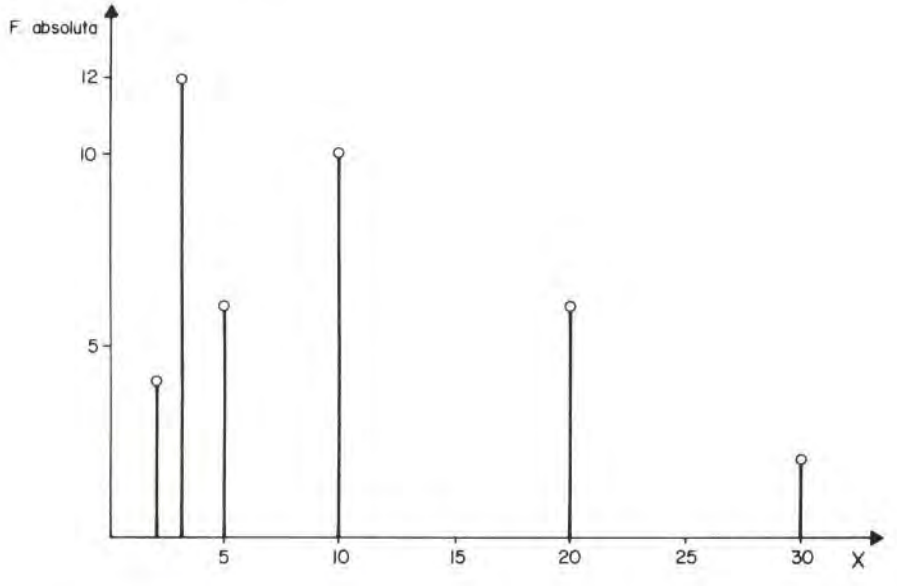
X	*Frecuencia acumulada*
2	4
3	16
5	22
10	32
20	38
30	40

Representar gráficamente la distribución de frecuencias absolutas ordinarias.

Calculamos primero la distribución de frecuencias absolutas ordinarias:

X	*Frecuencia absoluta*
2	4
3	12
5	6
10	10
20	6
30	2

La representación gráfica pedida es:



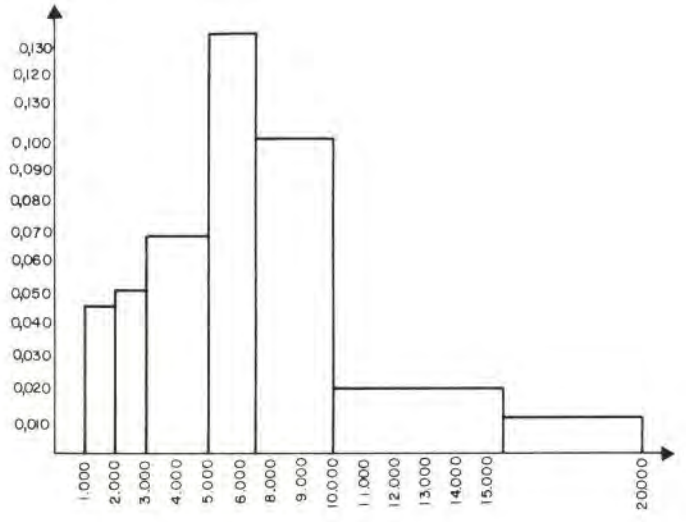
6. Hemos realizado una encuesta sobre el precio de alquiler de su vivienda en una población de 1.000 habitantes, obteniendo la distribución que representamos a continuación:

Alquiler mensual (pesetas)	*Frecuencia absoluta*
1.000 - 2.000	48
2.000 - 3.000	53
3.000 - 5.000	139
5.000 - 7.000	270
7.000 - 10.000	322
10.000 - 15.000	105
15.000 - 20.000	63

La representación adecuada es un histograma, como no todos los intervalos tienen la misma amplitud, calculamos las alturas del rectángulo que lo forman, dividiendo las frecuencias absolutas por la amplitud de los intervalos:

$$48 : 1.000 = 0,048$$
$$53 : 1.000 = 0,053$$
$$139 : 2.000 = 0,070$$
$$270 : 2.000 = 0,135$$
$$322 : 3.000 = 0,107$$
$$105 : 5.000 = 0,021$$
$$63 : 5.000 = 0,013$$

Por tanto, el histograma es:



CONCLUSIONES TEMA XXII

POBLACION	Conjunto de todos los elementos que cumplen unas características planteadas previamente y que depende del problema que analicemos. La población puede ser finita o infinita.	
MUESTRA	Cualquier subconjunto de la población.	
TIPOS DE MUESTREO	*Muestreo al azar.*—Es un procedimiento por medio del cual todos los elementos de la población tienen la misma probabilidad de ser incluidos en la muestra. *Muestreo con reemplazamiento.* *Muestreo sin reemplazamiento.*	
VARIABLE ESTADISTICA	DEFINICION	Cuando se realizan varias pruebas de un experimento aleatorio, el resultado obtenido varía de unas pruebas a otras, tenemos una variable estadística o variable aleatoria. Dominio de una variable estadística es el conjunto de los posibles valores que puede tomar.
	CLASIFICACION	*Discreta.*—Una variable estadística es discreta cuando entre dos valores cualesquiera no puede tomar una infinidad de valores. *Continua.*—Una variable estadística es continua cuando entre dos valores cualesquiera puede tomar una infinidad de valores.

TABLA DE FRECUENCIAS	DEFINICION	Es una forma ordenada de disponer los datos recogidos, en las que se hacen constar los posibles valores de la variable estadística y sus correspondientes frecuencias.
	FORMACION PARA	VARIABLES DISCRETAS 1. Ordenar de menor a mayor los datos. 2. Determinar el número de elementos que tiene cada una de las clases.
		VARIABLES CONTINUAS 1. Determinar el menor y el mayor de los datos y obtener el recorrido total. 2. Dividir este recorrido entre el número de clases para así obtener el recorrido de cada clase. 3. Calcular los intervalos de clase. 4. Determinar el número de elementos que tiene cada intervalo de clase.

EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. *Dadas las siguientes variables estadísticas:*

   a) *Número de alumnos varones en una clase de 30.*

   b) *Talla de los universitarios.*

   c) *Número de veces que aparece el artículo «el» en el Quijote.*

   d) *Capacidad de los depósitos de gasolina en los coches nacionales.*

   Clasificarlas en discretas y continuas.

2. *Calcular el dominio de definición de las variables estadísticas del problema anterior.*

3. *Representar gráficamente mediante un histograma la siguiente distribución de frecuencias:*

x	f
2 – 4	6
4 – 6	5
6 – 8	8
8 – 10	4
10 – 12	2

BIBLIOTECA PUBLICA PTO. STA. MARIA

4. *Dada la siguiente distribución de frecuencias:*

X	f
−4 − −2	4
−2 − 0	3
0 − 2	2
2 − 4	4
4 − 6	1

a) Hacer el histograma correspondiente.
b) Obtener la serie de frecuencias acumuladas.
c) Representar la distribución de frecuencias acumuladas.

5. *Dada la siguiente distribución de frecuencias:*

X	f
0	1
1	3
2	4
3	5
4	5
5	0
6	3
7	1
8	1

a) Representarla gráficamente mediante un polígono de frecuencias.
b) Obtener la serie de frecuencias acumuladas.
c) Representar la distribución de frecuencias acumuladas.

6. *Un taxista tiene la costumbre de repostar siempre la misma cantidad de gasolina (30 litros) anotando en este momento los kilómetros que ha recorrido desde que repostó la vez anterior, obtiene las siguientes anotaciones en km: 246, 254, 240, 238, 242, 248, 241, 250, 236, 230, 235, 244, 232, 245, 237, 242, 244, 248, 251, 230. Calcular las clases sabiendo que su marca es: 230, 235, 240, 245, 250, 255.*

7. *Con los datos obtenidos del problema anterior, calcular la distribución de frecuencias.*

8. *Las notas obtenidas por 25 alumnos que se han presentado a un examen de matemáticas han sido: 0, 1, 4, 7, 8, 3, 10, 1, 2, 3, 7, 5, 4, 6, 8, 3, 7, 2, 1, 0, 3, 5, 6, 7, 9.*

a) Ordenar los datos.
b) Obtener la distribución de frecuencias.

9. *El peso de 25 universitarios en kilogramos es: 63, 65, 67, 70, 80, 84, 82, 79, 76, 75, 61, 69, 70, 71, 80, 65, 68, 70, 71, 72, 82, 83, 74, 76, 75.*

   Obtener la distribución de frecuencias en 5 clases de recorrido 5 kg, siendo el límite inferior 60 kg.

10. *Para una determinada marca y el mismo modelo de automóvil se ha observado el tiempo transcurrido hasta la presentación de la primera avería importante, anotándose las siguientes frecuencias:*

Año de presentación	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Número de automóviles	*40*	*140*	*530*	*890*	*350*	*50*

   Calcular las correspondientes frecuencias relativas. ¿Qué tanto por ciento de automóviles tuvieron la avería en el primer año?

11. *El número de matrimonios realizados en España en el año 1967 agrupados según la edad del marido lo presentamos en la siguiente tabla:*

Edad	Número de matrimonios
18	*3.800*
23	*60.300*
28	*106.800*
33	*35.900*
38	*12.100*
43	*9.200*
48	*7.500*
53	*4.000*
58	*3.000*
más de 60	*2.000*

   Dibujar el histograma de frecuencias.

12. *A partir de los datos del problema 9 obtener una distribución de frecuencias en 6 clases y en 4 clases.*

13. *Idem en 7 clases.*

14. *Los pesos de cincuenta personas en kilogramos han sido:*

   63, 54, 60, 61, 61'5, 55, 57, 65'5, 62, 62, 59'5, 49'5, 66, 60, 67, 62'5, 70, 65, 68, 61, 61, 61'5, 63, 68, 56'5, 59, 59, 62, 53, 66, 66'5, 69, 69, 61'5, 62, 73, 60, 55, 55, 57, 64'5, 62, 58, 71, 63, 72, 72, 70, 64, 68.

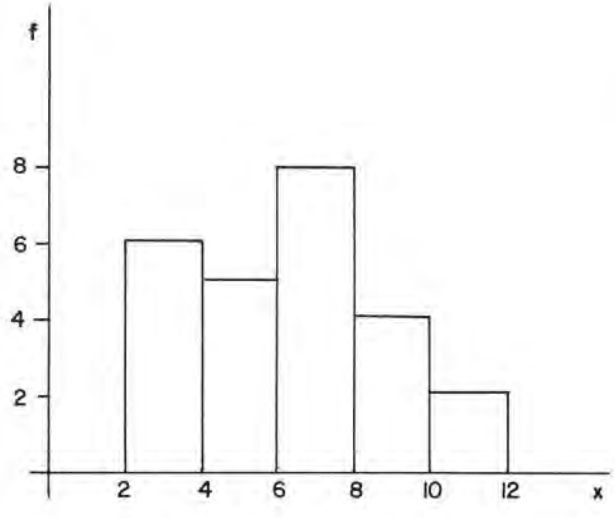
   Efectuar la distribución de frecuencias en las clases de marcas: 50, 55, 60, 65, 70, 75.

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. a) Variable aleatoria discreta.
   b) Variable aleatoria continua.
   c) Variable aleatoria discreta.
   d) Variable aleatoria continua.

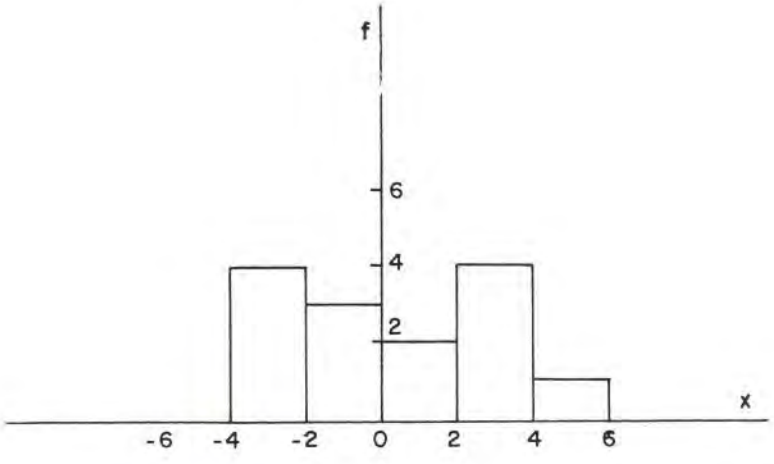
2. a) Desde cero a treinta.
   b) En teoría desde cero al máximo de talla.
   c) Desde cero al número máximo.
   d) Desde cero al máximo de capacidad.

3.



4.

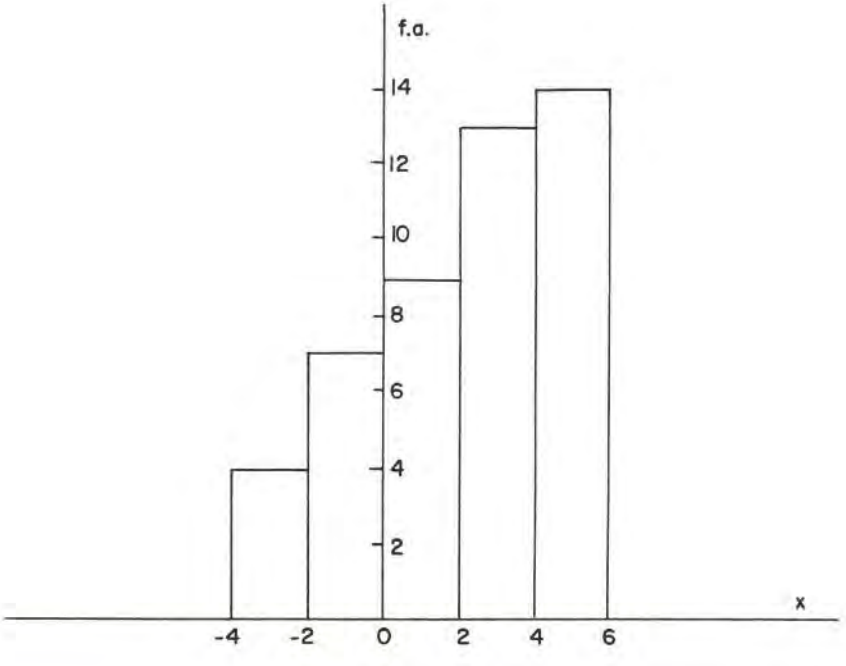
a)



b) Frecuencias acumuladas.

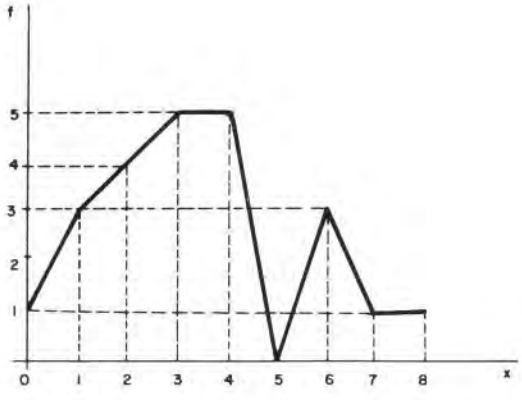
X	*f*	*Frecuencias acumuladas*
−4 − −2	4	4
−2 − 0	3	7
0 − 2	2	9
2 − 4	4	13
4 − 6	1	14

c)



5.

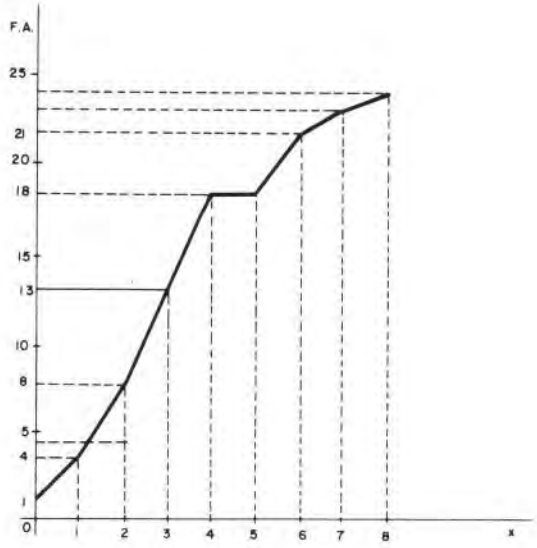
a)



b)

X	*f*	*Frecuencias acumuladas*
0	1	1
1	3	4
2	4	8
3	5	13
4	5	18
5	0	18
6	3	21
7	1	22
8	1	23

c)



6.

Clases	*Marca*
228 – 232	230
233 – 237	235
238 – 242	240
243 – 247	245
248 – 252	250
253 – 257	255

7.

Clases	*Frecuencia*
228 – 232	3
233 – 237	3
238 – 242	5
243 – 247	4
248 – 252	4
253 – 257	1
	Total 20

8.

a) 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 9, 10.

b)

Notas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencias	2	3	2	4	2	2	2	4	2	1	1

9.

Clases	*Frecuencia*
60 – 64	2
65 – 69	5
70 – 74	7
75 – 79	5
80 – 84	6
	Total 25

10. El número total de automóviles que se han observado es la suma de las frecuencias del cuadro:

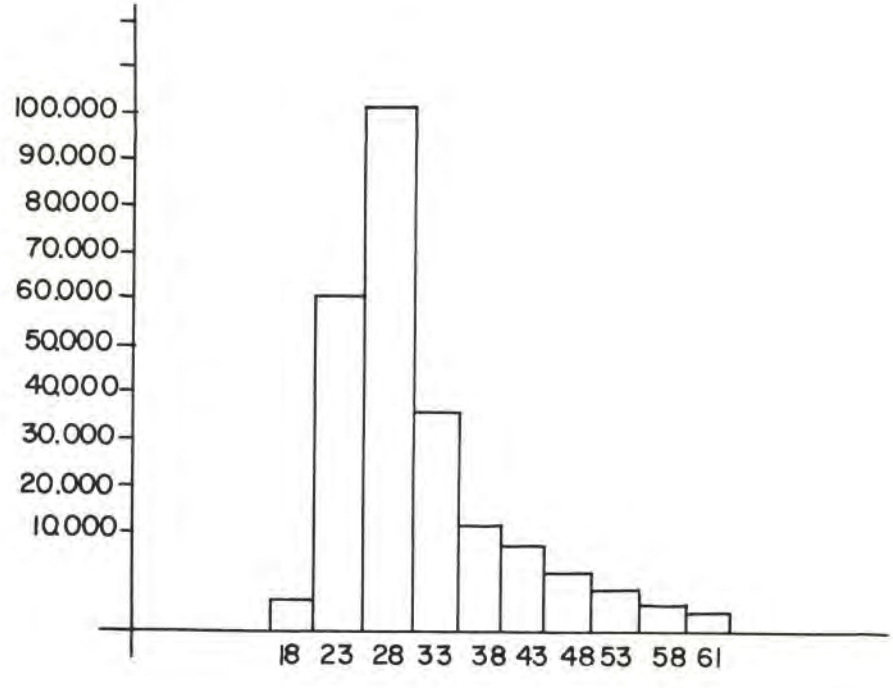
$$40 + 140 + 530 + 890 + 350 + 50 = 2.000$$

por tanto, dividiendo las frecuencias absolutas por este número, obtenemos el cuadro de frecuencias relativas:

Año de presentación	1	2	3	4	5	6
Frecuencias relativas	0,02	0,07	0,265	0,445	0,175	0,025

Como la frecuencia relativa en el primer año fue de 0,02, el porcentaje correspondiente se obtiene multiplicando esta frecuencia por 100, o sea el 2 por 100.

11.



12. Calculemos el recorrido total, para ello consideremos el menor dato y el mayor que son: 61 y 84.

$$\text{Recorrido total} = (84 - 61) + 1 = 23 + 1 = 24$$

Para calcular el recorrido de cada una de las 6 clases dividiremos 24 : 6 = 4, por tanto será 4 y las clases:

61 – 64
65 – 68
69 – 72
73 – 76
77 – 80
81 – 84

Para calcular el recorrido de cada una de las 4 clases:

$$24 : 4 = 6$$

por tanto,

61 – 66
67 – 72
73 – 78
79 – 84

y la distribución de frecuencias.

Clases	*Frecuencia*
61 – 64	2
65 – 68	4
69 – 72	7
73 – 76	5
77 – 80	3
81 – 84	4
	Total 25

Clases	*Frecuencia*
61 – 66	4
67 – 72	9
73 – 78	5
79 – 84	7
	Total 25

13. El recorrido total era 24, como no es divisible por 7 se hace la división por exceso y obtenemos:

$$\begin{array}{r|l} 24 & 7 \\ \hline -4 & 4 \end{array}$$

por tanto, el recorrido de cada una de las clases será 4 y sobrarán 4. Tomaremos dos unidades antes y dos después y así las clases serán:

59 – 62
63 – 66
67 – 70
71 – 74
75 – 78
79 – 82
83 – 86

la distribución de frecuencias es:

Clases	59-62	63-66	67-70	71-74	75-78	79-82	83-86
Frecuencias	1	3	6	4	4	5	2

14. Distribución de frecuencias

Clases	*Marcas*	*Frecuencias*
48 – 52	50	1
53 – 57	55	8
58 – 62	60	19
63 – 67	65	11
68 – 72	70	10
73 – 77	75	1
		Total 50

TEMA XXIII

MEDIDAS DE CENTRALIZACION Y DISPERSION

ESQUEMA/RESUMEN

1. Formas de caracterizar una distribución.
2. Medidas de centralización.
   - 2.1. Media aritmética.
     - 2.1.1. Valores aislados.
     - 2.1.2. Valores agrupados en clases.
   - 2.2. Mediana.
   - 2.3. Moda.
3. Medidas de dispersión.
   - 3.1. Desviación media.
     - 3.1.1. Valores aislados.
     - 3.1.2. Valores agrupados en clases.
   - 3.2. Varianza
   - 3.3. Desviación típica.

INSTRUCCIONES PARA EL ESTUDIO DE ESTE TEMA

Ya sabemos recoger los datos estadísticos y ordenarlos mediante tablas o representaciones gráficas de diversas maneras. Nos preocupa ahora comparar los datos estadísticos correspondientes a variables estadísticas diferentes. Para ello vamos a establecer unos criterios que nos permitan medir algunas características básicas de la variable.

En este tema estudiaremos las llamadas *medidas de centralización,* en primer lugar, y después averiguaremos la *dispersión* de los valores respecto de las medidas de centralización.

El estudiante observará que estos criterios son fáciles de entender e incluso, para muchos, serán familiares porque su utilización está muy extendida en la vida diaria. Nuestro consejo es que al estudiar este tema se preocupen de entender su significación y que a través de los Ejercicios y Ejemplos, así como con los *Ejercicios de Autocomprobación,* procuren adquirir facilidad de cálculo en las magnitudes estadísticas presentadas en este tema.

1. FORMAS DE CARACTERIZAR UNA DISTRIBUCION

Hasta aquí nos hemos preocupado de recoger los datos estadísticos obtenidos por diversos procedimientos formando tablas o representaciones gráficas. La única forma de definir exactamente una variable estadística o aleatoria es conocer el conjunto de valores de la misma, aunque no podemos concebir otra definición más perfecta resulta poco adecuada cuando necesitamos compararla con otra variable. Pretendemos establecer unos criterios para que la comparación de dos tablas de frecuencias sea más sencilla, vamos, en definitiva, a fijar nuestra atención sobre ciertos números que miden algunas características básicas de la variable, utilizándolos después para describirla.

Por tanto, nos preocupan los números alrededor de los cuales parecen disponerse los valores de la variable y la dispersión de los datos respecto de los mismos. Vamos a estudiar las medidas de centralización y las medidas de dispersión.

2. MEDIDAS DE CENTRALIZACION

En un principio podemos decir que las medidas de centralización tratan de caracterizar una distribución averiguando «el centro» del conjunto de datos ordenados de la misma. Además, nos interesa averiguar si mediante estas medidas de centralización podemos caracterizar totalmente una distribución.

Habitualmente las medidas de centralización más utilizadas son la *media, la mediana* y la *moda*, que estudiamos a continuación.

2.1. Media aritmética de una variable estadística

La idea de media aritmética es bien conocida. La media aritmética de un conjunto de números es el cociente que se obtiene de dividir la suma de todos ellos por el número de sumandos.

Así, si compramos tres libros cuyos precios son: 320, 180 y 200 pesetas, la media aritmética de estos precios es:

$$\frac{320 + 180 + 200}{3} = 233{,}33 \text{ ptas.}$$

2.1.1. Valores aislados

En este caso hay que tener presente que la suma de los valores de la variable se puede obtener multiplicando cada valor por su frecuencia absoluta y sumando todos los productos obtenidos.

De una manera general, si x_1, x_2, x_3 ... son los diversos valores de la variable x y sus correspondientes frecuencias las designamos por f_1, f_2, f_3 ... La media aritmética de la variable x es:

$$X = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + \ldots}{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots}$$

Veamos cómo se calcula la media aritmética de las notas obtenidas por los 50 alumnos examinados y que hemos reflejado en la tabla 1:

$$x = \frac{0.3 + 1.5 + 2.3 + 3.10 + 4.7 + 5.10 + 6.5 + 7.3 + 8.2 + 9.2 + 10.0}{3 + 5 + 3 + 10 + 7 + 10 + 5 + 3 + 2 + 2 + 0}$$

$$x = \frac{204}{50} = 4'08$$

Recurrimos ahora a la tabla 2, tratamos de calcular la media aritmética de la variable estadística en ella reflejada, la estatura de las 100 personas encuestadas. Habitualmente, el producto del valor de la variable por su frecuencia lo representamos en la tabla para evitar confusiones.

TABLA 1

x	f	$f.\ a.$
0	3	3
1	5	8
2	3	11
3	10	21
4	7	28
5	10	38
6	5	43
7	3	46
8	2	48
9	2	50
10	0	50

TABLA 2

x	f	$x\,f$
150	1	150
155	1	155
160	8	1.280
165	21	3.465
170	31	5.270
175	24	4.200
180	10	1.800
185	4	740
	100	17.060

Dividiendo la última columna por la penúltima, tenemos la media pedida:

$$x = \frac{17.060}{100} = 170{,}6 \text{ cm.}$$

Consideremos un nuevo ejemplo, para terminar. En una fábrica hay obreros de tres categorías, vamos a calcular la media aritmética de los sueldos de estos obreros que figuran en la tabla adjunta con sus correspondientes frecuencias. Añadimos a la tabla la columna en la que representamos el producto de los distintos valores de la variable por sus correspondientes frecuencias:

	x	f	xf
1.ª	8.432	225	1.897.200
2.ª	12.432	240	2.983.680
3.ª	16.432	135	2.218.320
		600	7.099.200

la media aritmética se calcula por el procedimiento visto en el ejemplo anterior:

$$x = \frac{7.099.200}{600} = 11.832 \text{ ptas.}$$

Existe un procedimiento que permite facilitar los cálculos de los productos del valor de la variable por su correspondiente frecuencia. En esencia el procedimiento consiste en restar a todos los valores de la variable x un mismo número a elegido adecuadamente, y hallamos la media de estas diferencias, $d = x - a$. Es trivial pasar a la media de los valores de la variable.

Recurrimos a la tabla anterior, para calcular la media de la variable x por este procedimiento. Si elegimos $a = 12.432$ obtenemos las siguientes diferencias:

$$d_1 = 8.432 - 12.432 = -4.000,\ d_2 = 12.432 - 12.432 = 0,$$
$$d_3 = 16.432 - 12.432 = 4.000$$

para mayor comodidad disponemos los resultados en el siguiente cuadro:

Categoría	x	d	f	df
1.ª	8.432	— 4.000	225	— 900.000
2.ª	12.432	0	240	0
3.ª	16.432	4.000	135	540.000
			600	— 360.000

Calculamos la media de la nueva variable d:

$$d = -\frac{360.000}{600} = -600$$

Ahora, calculamos la media de la variable x. Sabemos que

$$600\,x = 225\,x_1 + 240\,x_2 + 135\,x_3$$

pero:

$$x_1 = d_1 + a \qquad x_2 = d_2 + a \qquad x_3 = d_3 + a$$

Sustituyendo:

$$600\ x = 225\ (d_1 + a) + 240\ (d_2 + a) + 135\ (d_3 + a)$$

$$600\ x = (225\ d_1 + 240\ d_2 + 135\ d_3) + (225\ a + 240\ a + 135\ a)$$

teniendo presente que:

$$225\ d_1 + 240\ d_2 + 135\ d_3 = 600\ d$$

$$225\ a + 240\ a + 135\ a = 600\ a$$

podemos escribir

$$600\ x = 600\ d + 600\ a$$

dividiendo esta expresión por 600:

$$x = d + a$$

En nuestro caso como a = 12.432 y d= − 600,

$$x = -600 + 12.432 = 11.832$$

resultando, que coincide con el obtenido sin abreviar.

2.1.2. Valores agrupados en clases

Consideramos a continuación una distribución especificada en clases, es decir, no conocemos los auténticos valores de esta distribución como en el caso anterior. De todas maneras, supondremos que todos los valores se encuentran en el centro del intervalo, es decir, en la marca de la clase. Antes de seguir, conviene dejar claro que en este caso, no se puede asegurar que el valor de la media sea coincidente con el que habríamos obtenido en el caso de conocer los verdaderos valores de la distribución. En nuestros estudios estadísticos esta diferencia no nos preocupa.

Tratamos de calcular la media aritmética de una distribución de valores agrupados en clases, supongamos que la talla de 100 personas viene dada por la siguiente tabla:

Clases (en cm.)	*Frecuencias*
160 – 164	9
165 – 169	12
170 – 174	33
175 – 179	18
180 – 184	14
185 – 189	7
190 – 194	5
195 – 199	2

Calculamos, primero, la marca de cada clase y después efectuamos el producto de éstas por las correspondientes frecuencias. La media aritmética se obtiene dividiendo el resultado obtenido al sumar estos últimos productos por el número de alumnos que constituyen la muestra. Todas estas operaciones las esquematizamos en la siguiente tabla:

X	*f*	*Marca de clase*	*Marca de clase por frecuencia*
160 – 164	9	162	1.458
165 – 169	12	167	2.004
170 – 174	33	172	5.676
175 – 179	18	177	3.186
180 – 184	14	182	2.548
185 – 189	7	187	1.309
190 – 194	5	192	960
195 – 199	2	197	394
Total	100		17.535

$$\text{Media} = \frac{17.535}{100} = 175{,}35 \text{ cm.}$$

Utilizando el procedimiento segundo estudiado en el apartado anterior, cambiamos el origen, que puede ser, por ejemplo, 182; en la tabla siguiente recopilamos el proceso seguido:

Nueva marca de clase	*Frecuencia*	*Marca de clase por frecuencia*
162 – 182 = –20	9	–180
167 – 182 = –15	12	–180
172 – 182 = –10	33	–330
177 – 182 = – 5	18	– 90
182 – 182 = 0	14	0
187 – 182 = 5	7	35
192 – 182 = 10	5	50
197 – 182 = 15	2	30
Total	100	–665

Por tanto, la nueva media aritmética es:

$$\frac{-665}{100} = -6{,}65$$

El resultado definitivo se obtiene de la forma ya conocida.

Media = nuevo origen + nueva media = 182 – 6,65 = 175,35 cm. Hemos obtenido el mismo valor para la media aritmética que utilizando el primer procedimiento.

Por último, insistimos en que al recurrir a un nuevo origen las operaciones quedan sensiblemente simplificadas.

2.2. Mediana

Es el valor de la variable tal que la frecuencia de valores menores es igual a la frecuencia de valores superiores a él. Para muchos casos la mediana tiene mucho más significado que la media aritmética, por ejemplo, al considerar la distribución de la renta de dinero, entre los individuos de una población, más interesante que determinar cuál es la renta media, es el saber cuál es la renta mediana, o sea, aquella que divide a la población en dos partes iguales: la mitad de la población tiene una renta menor que la mediana, la otra mitad la tiene superior a dicha medida.

Si en un examen siete alumnos obtienen las siguientes calificaciones:

6; 5,5; 5; 4,5; 3,5; 2; 2,25

la mediana es la puntuación 4,5, puesto que hay tres alumnos con una puntuación mayor y otros tres con una puntuación menor.

Si el número de alumnos fuera par, por ejemplo, ocho, y las calificaciones obtenidas fuesen:

7; 6,5; 6; 5; 4; 3,5; 3; 2,5

se suele tomar como mediana cualquier puntuación comprendida entre 5 y 4, generalmente, suele tomarse el valor medio de 4 y 5, la mediana es 4,5.

Un nuevo ejemplo, hemos ordenado las edades de nueve alumnos, de la siguiente manera:

12, 13, 13, 13, 14, 15, 15, 15, 16

¿Cuál es la mediana? La mediana de estos números es 14, pues hay el mismo número de muchachos con edad inferior a 14 que con edad superior: cuatro a cada lado de este valor de la mediana.

En la siguiente tabla representamos la variable estadística o aleatoria x, los valores de esta variable son los cocientes obtenidos al dividir los ingresos totales mensuales de una familia por el número de personas que la forman.

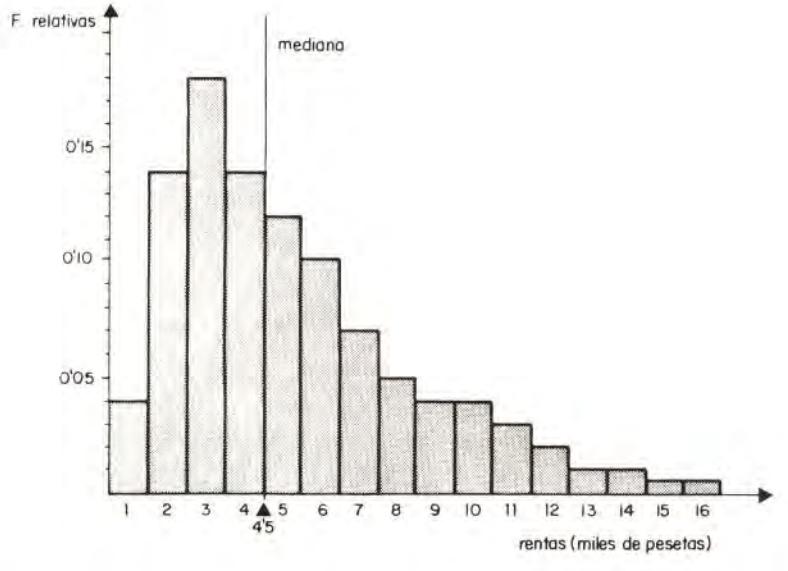
En esta tabla los datos estadísticos se han agrupado en clases, de manera que en una clase se han recogido valores distintos de la variable representados por un sólo número que es la marca de la clase.

Por otra parte, analizando la tabla de frecuencias acumuladas, puede suceder que a una clase determinada le corresponda la mitad de los datos observados (frecuencia relativa = 0,5), si sucede así, el mayor valor de la clase, que le separa de la clase siguiente, es la mediana.

Marca de clase (x)	*Frecuencias relativas*	*Frecuencias acumuladas*
1.000	0,04	0,04
2.000	0,14	0,18
3.000	0,18	0,36
4.000	0,14	0,50
5.000	0,12	0,62
6.000	0,10	0,72
7.000	0,07	0,79
8.000	0,05	0,84
9.000	0,04	0,88
10.000	0,04	0,92
11.000	0,03	0,95
12.000	0,02	0,97
13.000	0,01	0,98
14.000	0,01	0,99
15.000	0,005	0,995
16.000	0,005	1,00

En la tabla anterior, la marca de clase que corresponde al 50 por 100 de los datos es: $x = 4.000$ (linea horizontal en la tabla), que representa al intervalo de rentas comprendidas entre las 3.500 y las 4.500 pesetas. Como consecuencia, se puede afirmar que la mitad de las familias tiene una renta inferior a las 4.500 pesetas, es decir, la mediana es 4.500 pesetas.

En la figura siguiente representamos el histograma correspondiente a la tabla anterior:



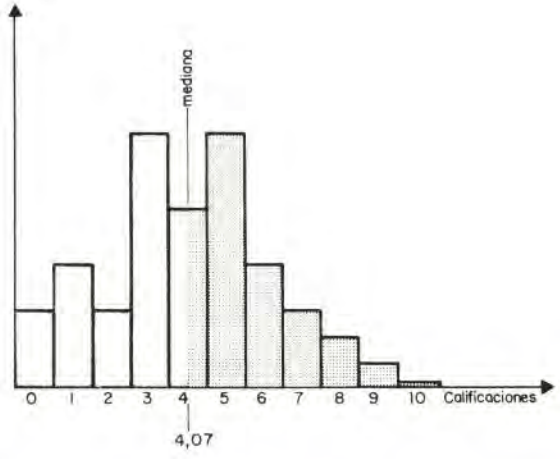
Conviene observar que la mediana divide al histograma en dos partes de igual área.

No siempre corresponderá una clase exactamente a la mitad de los datos, pudiendo suceder que si tomamos cierta clase (clase mediana) el número de datos que queda a su izquierda es menor que la **mitad del total**,

ocurriendo lo mismo para los que quedan a su derecha. La solución es sencilla: hay que dividir el rectángulo que corresponde a la clase mediana de modo que las áreas situadas a ambos lados sean iguales.

Recurrimos, otra vez, a la tabla 1 que representa, adecuadamente colocadas, las calificaciones de un grupo de alumnos en Matemáticas. Observando la tabla de frecuencias acumuladas, la clase mediana es $x = 4$, pues la suma de las frecuencias de las clases $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, es 21, menor que la mitad del total; mientras que al considerar los siete datos de la clase $x = 4$ ya se obtienen 28, mayor que dicha mitad.

En la figura siguiente representamos el correspondiente histograma:



Obsérvese cómo puede resolverse el problema de hallar la mediana dividiendo el área total en dos partes de igual área: el rectángulo correspondiente a la clase mediana contiene siete datos, de ellos cuatro deberían pertenecer al área de la izquierda, y asi habria $21 + 4 = 25$, mientras los otros tres deberán pertenecer a la de la derecha. Esto es, hemos dividido este intervalo mediano en siete partes iguales y dejamos: 4/7, a la izquierda, y 3/7, a la derecha.

Luego,

$$\text{Mediana} = 3{,}5 + \frac{4}{7} = 4{,}07$$

2.3. Moda

En una distribución de datos estadísticos, vamos a llamar *moda* al valor de la variable cuya frecuencia es mayor. Lógicamente, en un diagrama o histograma se distingue la moda por corresponder al punto más alto de la gráfica.

En la tabla 2, hemos representado las estaturas de 100 personas, la moda es 170, pues es el valor de la variable a la que corresponde mayor frecuencia, 31.

En cambio, en la tabla 1, donde representamos las calificaciones obtenidas en Matemáticas por varios alumnos, aparecen dos modas, las calificaciones de 3 y 5 puntos, cada una de las cuales ha sido obtenida por 10 alumnos.

Ejercicios y ejemplos

1. Hallar la frecuencia correspondiente al tercer intervalo de la distribución:

Intervalo	*Frecuencia*
4 - 6	4
6 - 10	5
10 - 16	?
16 - 20	3
20 - 30	1

Sabiendo que su media aritmética es igual a 11,50.

Construimos la siguiente tabla:

x	*f*	*x f*
5	4	20
8	5	40
13	?	?
18	3	54
25	1	25

Como la media aritmética es:

$$x = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \ldots + x_5 f_5}{f_1 + f_2 + \ldots + f_5} = \frac{139 + 13\, n_3}{13 + n_3} = 11{,}50$$

es una ecuación lineal, cuya incógnita es n_3:

$$139 + 13\, n_3 = 149{,}50 + 11{,}50\, n_3$$

$$n_3 = 7$$

2. Hallar la mediana de la siguiente distribución de frecuencias:

x	*f*
1	10
2	12
3	7
4	7
5	3

En este caso el número de valores de la variable es impar, construimos, para mayor comodidad, la siguiente tabla en la que incluimos las frecuencias acumuladas:

x	f	*Frecuencias acumuladas*
1	10	10
2	12	22
3	7	29
4	7	36
5	3	39
	39	

Recordando la definición de mediana, conviene hallar el término central $\frac{39}{2} = 19{,}5$, luego el término central es 20, por tanto, la mediana de esta distribución es 2.

3. Hallar la media, mediana y moda de los números:

$$3,\ 5,\ 2,\ 6,\ 5,\ 9,\ 5,\ 2,\ 8,\ 6$$

Ordenando estos números: 2, 2, 3, 5, 5, 5, 6, 6, 8, 9

$$\text{Media} = \frac{2+2+3+5+5+5+6+6+8+9}{10} = 5{,}1$$

La Mediana será la media aritmética de los dos valores centrales:

$$\text{Mediana} = \frac{5+5}{2} = 5$$

La moda es el número que representa mayor frecuencia, luego es 5.

4. Calcular la media de la siguiente distribución:

Intervalos	*Frecuencias (f)*
60 – 62	5
63 – 65	18
66 – 68	42
69 – 71	27
72 – 74	8

El proceso lo esquematizamos en la tabla siguiente, donde hemos tomado, como marca de clase el punto medio de cada intervalo:

Intervalos	*Marcas de clase*	*f*	*f x*
60 – 62	61	5	305
63 – 65	64	18	1.152
66 – 68	67	42	2.814
69 – 71	70	27	1.890
72 – 74	73	8	584
		100	6.745

$$\bar{x} = \frac{6.745}{100} = 67{,}45$$

5. Calcular la media de la distribución representada en la tabla del ejercicio anterior tomando como nuevo origen 67.

Utilizando el procedimiento ya visto:

Nuevas marcas	*Frecuencias*	*Marcas de clase por frecuencia*
61 – 67 = –6	5	–30
64 – 67 = –3	18	–54
67 – 67 = 0	42	0
70 – 67 = 3	27	81
73 – 67 = 6	8	48
Total	100	45

$$\text{Nueva media: } \frac{45}{100} = 0{,}45$$

$$\text{Media aritmética: } 67 + 0{,}45 = 67{,}45$$

resultado coincidente con el obtenido en el ejercicio 4.

3. MEDIDAS DE DISPERSION

Hemos visto diversos procedimientos para expresar la tendencia central de una variable estadística o aleatoria, pero ninguno de ellos puede tomarse como único representante de la misma. Dos variables estadísticas pueden tener la misma media o mediana y ser muy distintas en esencia.

Aclaramos esta idea con algunos ejemplos: Dos alumnos realizan cinco exámenes, pudiendo obtener en cada uno de ellos una puntuación comprendida entre 0 y 20. Las calificaciones las resumimos en la siguiente tabla:

Tabla a

Alumno	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*Total*
A	8	12	17	10	11	58
B	15	12	8	11	12	58

Parece que ambas puntuaciones son muy parecidas, ambos alumnos han obtenido el mismo total. Si tomamos como criterio de calificación prescindir de la nota más alta y de la menor, obtenemos la siguiente puntuación media:

$$\text{A: } \frac{12 + 10 + 11}{3} = 11$$

$$\text{B: } \frac{12 + 11 + 12}{3} = 11,\ 66$$

obtiene mayor puntuación el alumno B.

Otro ejemplo: Durante una misma semana, se han registrado las precipitaciones de lluvia, en dos observatorios N y S, expresadas en milímetros, las recogemos en la tabla siguiente.

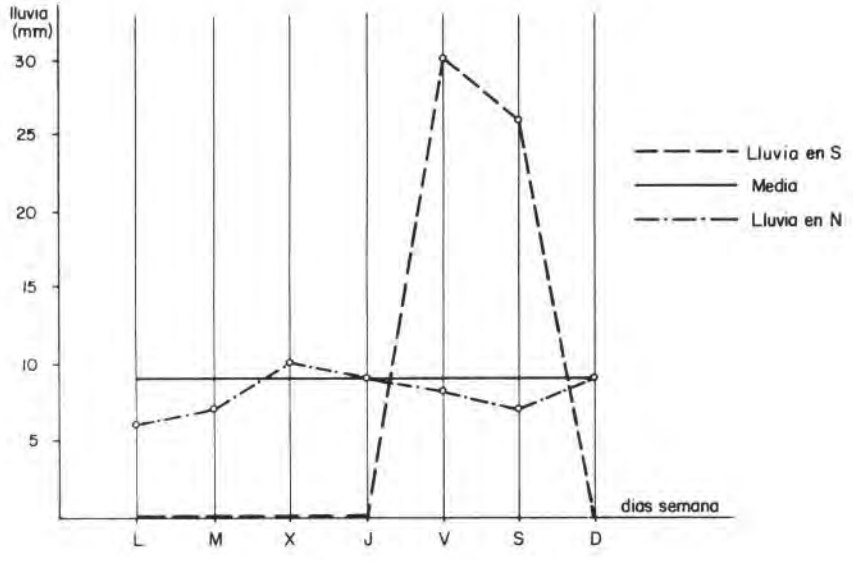
Tabla b

	L	*M*	*X*	*J*	*V*	*S*	*D*	*Total*	*Media*
S	0	0	0	0	30	26	0	56	8
N	6	7	10	9	8	7	9	56	8

En la figura siguiente representamos los diagramas de ambas variables

Si bien las medias de las cantidades de lluvias caídas durante la semana es la misma en los dos observatorios, los regímenes de lluvia en ambos son muy distintos: en el observatorio S la mayor parte de la semana el tiempo fue seco, mientras que en el observatorio N se registró lluvia discreta durante toda la semana.

En la figura también hemos representado una línea recta paralela al eje horizontal que representa el régimen teórico de lluvias en el supuesto que la cantidad de lluvia caída todos los días hubiera sido la misma: 8 mm (la media). Nótese que el diagrama correspondiente al observatorio N se separa muy poco de esa línea de media, mientras que el correspondiente a S se separa mucho de ella. Luego, si decimos que la lluvia caída en N fue de 8 mm por día, daríamos una información bastante acertada, ahora bien, si decimos lo mismo de S la información sería algo equívoca.



En conclusión, podemos decir que, además, de conocer la media de una variable estadística, es importante saber si sus valores están concentrados en torno a ella o están dispersos. Es interesante, por tanto, medir la *dispersión* de los valores de una variable estadística respecto de su media aritmética.

Esto lo conseguiremos mediante las llamadas medidas de dispersión y las que vamos a estudiar serán:

— Desviación media.

— Desviación típica.

— Varianza.

3.1. Desviación media

Consideremos la distribución representada en la tabla siguiente:

x	f
x_1	f_1
x_2	f_2
x_3	f_3
.	.
.	.
.	.
x_n	f_n

Calculamos la media aritmética que representamos por $\bar{x}$; a los números:

$$d_1 = x_1 - \bar{x}$$
$$d_2 = x_2 - \bar{x}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$d_n = x_n - \bar{x}$$

les llamaremos desviaciones respecto de la media.

Definimos la *desviación media* como la media aritmética de las desviaciones tomadas éstas en valor absoluto. Su cálculo lo esquematizamos mediante la tabla siguiente:

x	f	$x - \bar{x}$	$\lvert x - \bar{x} \rvert$	$\lvert x - \bar{x} \rvert \cdot f$
x_1	f_1	$x_1 - \bar{x}$	$\lvert x_1 - \bar{x} \rvert$	$\lvert x_1 - \bar{x} \rvert \cdot f_1$
x_2	f_2	$x_2 - \bar{x}$	$\lvert x_2 - \bar{x} \rvert$	$\lvert x_2 - \bar{x} \rvert \cdot f_2$
x_3	f_3	$x_3 - \bar{x}$	$\lvert x_3 - \bar{x} \rvert$	$\lvert x_3 - \bar{x} \rvert \cdot f_3$
...	...	.....	.....	.....
x_n	f_n	$x_n - \bar{x}$	$\lvert x_n - \bar{x} \rvert$	$\lvert x_n - \bar{x} \rvert \cdot f_n$

$$\text{Desviación media} = \frac{\lvert x_1 - \bar{x} \rvert f_1 + \lvert x_2 - \bar{x} \rvert f_2 + \ldots + \lvert x_n - \bar{x} \rvert f_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n}$$

Aclararemos lo expuesto ahora con unos ejemplos, para mayor claridad distinguimos entre valores aislados y valores agrupados en clase.

3.1.1. Valores aislados

Consideremos el ejemplo reflejado en la tabla *a*. La media aritmética es 11,6, podemos escribir, por tanto:

	$\|d_1\|$	$\|d_2\|$	$\|d_3\|$	$\|d_4\|$	$\|d_5\|$
A	3'6	0'4	5'4	1'6	0'6
B	3'4	0'4	3'6	0'6	0'4

Las desviaciones medias serán:

$$\text{A: } \frac{3'6 + 0'4 + 5'4 + 1'6 + 0'6}{5} = \frac{11,6}{5} = 2,32$$

$$\text{B: } \frac{3'4 + 0'4 + 3'6 + 0'6 + 0'4}{5} = \frac{8,4}{5} = 1,68$$

Otro ejemplo. Supongamos que las notas de 40 alumnos presentados a un examen se reflejan en la tabla c siguiente:

Tabla c

Notas	*Frecuencias*
0	2
1	4
2	1
3	4
4	5
5	5
6	6
7	7
8	3
9	2
10	1

Para calcular la desviación media, calculamos primero la media. En la tabla siguiente resumimos todos los cálculos realizados:

x	f	$x \cdot f$	$x - \bar{x}$	$\|x - \bar{x}\|$	$\|x - \bar{x}\| f$
0	2	0	−5	5	10
1	4	4	−4	4	16
2	1	2	−3	3	3
3	4	12	−2	2	8
4	5	20	−1	1	5
5	5	25	0	0	0
6	6	36	1	1	6
7	7	49	2	2	14
8	3	24	3	3	9
9	2	18	4	4	8
10	1	10	5	5	5
Total	40	200			84

$$\text{Media} = \bar{x} = \frac{200}{40} = 5$$

$$\text{Desviación media} = \frac{84}{40} = 2{,}1$$

3.1.2. Valores agrupados en clases

El procedimiento seguido es el mismo, pero, como ya hemos visto, tomando como valores *x*, las marcas de clase.

Supongamos que la altura de 40 personas viene dada en la tabla d:

Tabla d

Clases en cm.	*Frecuencias*
160 – 164	5
165 – 169	10
170 – 174	12
175 – 179	7
180 – 184	6

El cálculo de la desviación media lo hacemos con la siguiente tabla:

Clases	*f*	*Marca de clase x*	$x \cdot f$	$x - \bar{x}$	$\lvert x - \bar{x} \rvert$	$\lvert x - \bar{x} \rvert \cdot f$
160 – 164	5	162	810	−10	10	50
165 – 169	10	167	1670	− 5	5	50
170 – 174	12	172	2064	0	0	0
175 – 179	7	177	1239	5	5	35
180 – 184	6	182	1092	10	10	60
Total	40		6875			195

$$\text{Media } \bar{x}' = \frac{6875}{40} = 171{,}875$$

Para simplificar aproximamos este resultado a 172, luego $\bar{x}' = 172$, por tanto:

$$\text{Desviación media} = \frac{195}{40} = 4{,}875$$

3.2. Varianza

Llamamos varianza a la media de los cuadrados de las desviaciones. Como siempre disponemos su cálculo en la siguiente tabla:

x	f	$x \cdot f$	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$	$(x - \bar{x})^2 \cdot f$
x_1	f_1	$x_1 \cdot f_1$	$x_1 - \bar{x}$	$(x_1 - \bar{x})^2$	$(x_1 - \bar{x})^2 \cdot f_1$
x_2	f_2	$x_2 \cdot f_2$	$x_2 - \bar{x}$	$(x_2 - \bar{x})^2$	$(x_2 - \bar{x})^2 \cdot f_2$
x_3	f_3	$x_3 \cdot f_3$	$x_3 - \bar{x}$	$(x_3 - \bar{x})^2$	$(x_3 - \bar{x})^2 \cdot f_3$
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
x_n	f_n	$x_n \cdot f_n$	$x_n - \bar{x}$	$(x_n - \bar{x})^2$	$(x_n - \bar{x})^2 \cdot f_n$

$$\text{Varianza} = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 f_1 + (x_2 - \bar{x})^2 f_2 + (x_3 - \bar{x})^2 f_3 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2 f_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n}$$

Distinguiendo, desde el punto de vista práctico, también dos casos (valores aislados y valores agrupados en clases) y calculando la varianza en los ejemplos vistos en el apartado anterior obtenemos:

Para la tabla *a* podemos escribir:

	d^2_1	d^2_2	d^2_3	d^2_4	d^2_5
A	12,96	0,16	29,16	2,56	0,36
B	11,56	0,16	12,96	0,36	0,16

luego las varianzas son:

$$\text{A: } \frac{12{,}96 + 0{,}16 + 29{,}16 + 2{,}56 + 0{,}36}{5} = \frac{45{,}2}{5} = 9{,}04$$

$$\text{B: } \frac{11{,}56 + 0{,}16 + 12{,}96 + 0{,}36 + 0{,}16}{5} = \frac{25{,}2}{5} = 5{,}04$$

Para el ejemplo representado en la tabla c:

$(x - \bar{x})^2$	$(x - \bar{x})^2 \cdot f$
25	50
16	64
9	9
4	16
1	5
0	0
1	6
4	28
9	27
16	32
25	25
Total	262

$$\text{Varianza} = \frac{262}{40} = 6{,}55$$

En el caso de valores agrupados en clases, obtenemos para la tabla *d:*

$(x - \bar{x})^2$	$(x - \bar{x})^2 \cdot f$
100	500
25	250
0	0
25	175
100	600
Total	1.525

$$\text{Varianza} = \frac{1525}{40} = 38{,}125$$

3.3. Desviación típica

Llamamos *desviación típica* a la raíz cuadrada de la varianza:

$$\text{Desviación típica} = \sqrt{\text{varianza}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 f_1 + (x_2 - \bar{x})^2 f_2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2 f_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n}}$$

Es evidente, en consecuencia, que la desviación típica no tiene especial dificultad, pues su cálculo se reduce a una sencilla operación matemática.

Ejercicios y ejemplos

1. Calcular la desviación típica de los siguientes valores de una variable estadística x:

$$-12,\ 23,\ 5,\ 0,\ 14,\ 7\ -25,\ 34,\ 19,\ 0,\ 4,\ 9,\ 1$$

Averiguamos, en primer lugar, la media $\bar{x}$ de los valores de la variable estadística:

$$\bar{x} = \frac{-12+23+5+14+7-25+34+19+4+9+1}{13} = \frac{79}{13} = 6$$

para simplificar los cálculos prescindimos de los decimales.

Disponemos los datos en la siguiente tabla, donde esquematizamos el proceso a seguir

x	$x - \bar{x}$	$d = (x - \bar{x})^2$
− 12	− 18	324
23	17	289
5	− 1	1
o	− 6	36
14	8	64
7	1	1
− 25	− 31	961
34	28	784
19	13	169
0	− 6	36
4	− 2	4
9	3	9
1	− 5	25
79		2703

Como la desviación típica σ es $\sigma = \sqrt{\frac{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + \ldots + d_n^2}{n}}$

sabemos que n = 13, pues este es el número de valores de la variable estadística y el numerador del radicando es, precisamente, la tercera columna, por tanto:

$$\sigma = \sqrt{\frac{2.703}{13}} = 14{,}4$$

2. Dada la siguiente distribución:

Intervalos	*Frecuencias*
0 − 10	1
10 − 20	2
20 − 30	3
30 − 40	4

Calcular la desviación típica.

En este caso, aparecen intervalos, que caracterizamos por su punto medio, siguiendo un procedimiento semejante al del ejemplo anterior, obtenemos el siguiente cuadro:

Intervalo	f	x	$f\,x$	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$	$f\,(x - \bar{x})^2$
0 – 10	1	5	5	– 20	400	400
10 – 20	2	15	30	– 10	100	200
20 – 30	3	25	75	0	0	0
30 – 40	4	35	140	10	100	400
	10		250			1.000

Como siempre con $\tilde{x}$ queremos representar la media de los valores de la variable, o sea,

$$\bar{x} = \frac{250}{10} = 25$$

La desviación típica σ, la calculamos dividiendo la última columna por la segunda y averiguando después su raíz cuadrada:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1.000}{10}} = \sqrt{100} = 10$$

3. Los jornales de 5 personas son:

620 ptas, 1.040 ptas, 920 ptas, 860 ptas, 780 ptas.

Averiguar la varianza.

En primer lugar, averiguamos la media aritmética $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{620 + 1.040 + 920 + 860 + 780}{5} = 844 \text{ ptas.}$$

prescindimos, como hemos hecho, en otra ocasión, de los decimales por comodidad. Facilitamos el cálculo de la varianza con la siguiente disposición:

x	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
620	224	50.176
1.040	196	38.416
920	76	5.776
860	16	256
780	64	4.096
	576	98.720

En la segunda columna hemos puesto las diferencias $x - \bar{x}$ en valor absoluto.

BIBLIOTECA PUBLICA PTO. STA. MARIA

$$\text{Varianza} = \frac{98.720}{5} = 19.744$$

CONCLUSIONES TEMA XXIII

MEDIDAS DE CENTRALIZACION	MEDIA ARITMETICA	La media aritmética de un conjunto de números es el cociente que se obtiene al dividir la suma de todos ellos por el número de sumandos. De una manera general, si x_1, x_2, x_3, ... son los diversos valores de la variable x y f_1, f_2, f_3, ... sus correspondientes frecuencias, la media aritmética de la variable x es: $$\frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + \ldots}{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots}$$
	MEDIANA	Es el valor de la variable tal que la frecuencia de valores menores es igual a la frecuencia de valores superiores a él.
	MODA	Es el valor de la variable cuya frecuencia es mayor.
MEDIDAS DE DISPERSION	DESVIACION MEDIA	Es la media aritmética de las desviaciones, tomadas éstas en valor absoluto. $$\frac{\lvert x_1 - \bar{x} \rvert f_1 + \lvert x_2 - \bar{x} \rvert f_2 + \ldots + \lvert x_n - \bar{x} \rvert f_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n}$$
	VARIANZA	Es la media de los cuadrados de las desviaciones $$\frac{(x_1 - \bar{x})^2 f_1 + (x_2 - \bar{x})^2 f_2 + (x_3 - \bar{x})^2 f_3 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2 f_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n}$$
	DESVIACION TIPICA	Es la raíz cuadrada de la varianza $$\sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 f_1 + (x_2 - \bar{x})^2 f_2 + (x_3 - \bar{x})^2 f_3 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2 f_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n}}$$

EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. *Con la tabla de frecuencias del ejercicio de autocomprobación número 3 del tema anterior calcular:*

   a) Media aritmética.
   b) Moda.
   c) Mediana.

2. *Idem ejercicio número 4.*

3. *Idem ejercicio número 5.*

4. *Con la tabla de frecuencias del ejercicio de autocomprobación número 7 del tema anterior, calcular:*

   a) Desviación media.
   b) Desviación tipica.
   c) Varianza.

5. *Idem con los ejercicios 8 y 9 del tema anterior.*

6. *Para una determinada marca y el mismo modelo de automóvil se ha observado el tiempo transcurrido hasta la presentación de la primera avería importante, anotándose las siguientes frecuencias:*

Año de la presentación	1	2	3	4	5	6
Número de automóviles	*40*	*140*	*530*	*890*	*350*	*50*

Calcular el tiempo medio que tarda en presentarse una avería importante en los 2.000 automóviles. Efectuar el cálculo directamente y después volverlo a hacer tomando como origen de trabajo el año 4.

7. *En el problema anterior calcular la moda y la mediana.*

8. *El número de matrimonios realizados en España en el año 1967, agrupados según la edad del marido, lo presentamos en la siguiente tabla:*

Edad	Número de matrimonios
18	3.800
23	60.300
28	106.800
33	35.900
38	12.100
43	9.200
48	7.500
53	4.000
58	3.000
más de 63	2.000

Hallar la edad media de los maridos, tomando como origen de años el 33.

9. *Según los datos del ejercicio número 8, ¿para qué edad podemos decir que el número de varones que se casan antes de llegar a ella es igual al número de los que se casan con edad mayor?*

10. *Calcular la moda del ejercicio anterior.*

11. *Las calificaciones de dos alumnos en una misma asignatura fueron:*

Alumno	Calificaciones		
A	5	0	10
B	4	5	6

Hallar sus desviaciones típicas respectivas.

12. *Los pesos de cincuenta personas, en kilogramos, han sido:*

63; 54; 60; 61,5; 55; 57; 65,5; 62; 62; 59,5; 49,5; 66; 60; 67; 62,5; 70; 58; 52; 65; 68; 61; 61,5; 63; 68; 56,5; 59; 59; 62; 53; 66; 66,5; 69; 61,5; 60,5; 64; 78; 62; 73; 60; 55; 57; 64,5; 62; 58; 71; 63; 72; 70; 64; 65.

Efectuar el recuento de frecuencias absolutas, clasificándolas en las clases de marcas: 50, 55, 60, 65, 70, 75, y calcular la media, la moda y la mediana.

13. *Para la distribución de pesos de las 50 personas del ejercicio anterior, calcular la varianza y la desviación típica. ¿Qué porcentaje de estas personas tiene su peso comprendido entre la media menos la desviación típica y la media más la desviación típica?*

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. Averiguamos la marca de la clase y los cálculos los agrupamos en la siguiente tabla:

x	*f*	*Marca de clase*	*f · marca de clase*
2 – 4	6	3	18
4 – 6	5	5	25
6 – 8	8	7	56
8 – 10	4	9	36
10 – 12	2	11	22
Total	25		157

$$\text{Media} = \frac{157}{25} = 6{,}28$$

Moda = 7

Mediana = 7

2. Siguiendo un procedimiento semejante al del ejercicio anterior:

x	f	*Marca de clase*	$f \cdot$ *marca de clase*
−4 − −2	4	−3	−12
−2 − 0	3	−1	− 3
0 − 2	2	1	2
2 − 4	4	3	12
4 − 6	1	5	5
Total	14		4

Media $= \frac{4}{14} = 0{,}28$

Moda = −3 y 3

Mediana entre −1 y 1, por tanto,

$$\frac{-1 + 1}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

3.

x	f	$x \cdot f$
0	1	0
1	3	3
2	4	8
3	5	15
4	5	20
5	0	0
6	3	18
7	1	7
8	1	8
Total	23	79

Media $= \frac{79}{23} = 3{,}43$

Moda = 3 y 4.

Mediana = 3.

4.

Clases	*f*	*M. Clase*	*f. M. Clase*	$x - \bar{x}'$	$\lvert x - \bar{x}' \rvert$	$\lvert x - \bar{x}' \rvert \cdot f$
228 – 232	3	230	690	−11	11	33
233 – 237	3	235	705	− 6	6	18
238 – 242	5	240	1.200	− 1	1	5
243 – 247	4	245	980	4	4	16
248 – 252	4	250	1.000	9	9	36
253 – 257	1	255	255	14	14	14
Total	20		4.830			122

$(x - \bar{x})^2$	$(x - \bar{x})^2 \cdot f$
121	363
36	108
1	5
16	64
81	324
196	196
	1.060

$$\text{Media} = \frac{4.830}{20} = 241{,}5, \text{ tomaremos } 241 = \bar{x}$$

$$\text{Desviación media} = \frac{122}{20} = 6{,}1$$

$$\text{Varianza} = \frac{1.060}{20} = 53$$

$$\text{Desviación típica} = \sqrt{\text{Varianza}} = \sqrt{53} = 7{,}28$$

5.

Notas	*f*	$x \cdot f$	$x - \bar{x}$	$\lvert x - \bar{x} \rvert$	$\lvert x - \bar{x} \rvert \cdot f$	$(x - \bar{x})^2$	$(x - \bar{x})^2 \cdot f$
0	2	0	−4	4	8	16	32
1	3	3	−3	3	9	9	27
2	2	4	−2	2	4	4	8
3	4	12	−1	1	4	1	4
4	2	8	0	0	0	0	0
5	2	10	1	1	2	1	2
6	2	12	2	2	4	4	8
7	4	28	3	3	12	9	36
8	2	16	4	4	8	16	32
9	1	9	5	5	5	25	25
10	1	10	6	6	6	36	36
Total	25	112			62		210

Media = $\frac{112}{25}$ = 4 48, tomaremos 4 = $\bar{x}$

Desviación media = $\frac{62}{25}$ = 2,48

Varianza = $\frac{210}{25}$ = 8,4

Desviación típica = $\sqrt{8,4}$ = 2,89

Clases	*f*	*M. Clases* = *x*	$f \cdot x$	$x - \bar{x}$	$\lvert x - \bar{x} \rvert$	$\lvert x - \bar{x} \rvert \cdot f$	$\lvert x - \bar{x} \rvert^2$	$\lvert x - \bar{x} \rvert^2 \cdot f$
60 – 64	2	62	124	–12	12	24	144	288
65 – 69	5	67	335	– 7	7	35	49	245
70 – 74	7	72	504	– 2	2	14	4	28
75 – 79	5	77	385	3	3	15	9	45
80 – 84	6	82	492	8	8	48	64	384
Total	25		1.840			136		990

Media = $\frac{1.840}{25}$ = 73,6, tomamos 74 = $\bar{x}$

Desviación media = $\frac{136}{25}$ = 5,44

Varianza = $\frac{990}{25}$ = 39,6

Desviación típica = $\sqrt{39,6}$ = 6,29

6. El cálculo directo lo presentamos en la tabla siguiente:

x	1	2	3	4	5	6	Sumas
f	40	140	530	890	350	50	2.000
x f	40	280	1.590	3.560	1.750	300	7.520

el valor medio es $\bar{x} = \frac{7.520}{2.000}$ = 3,76 años, tiempo medio que tarda en presentarse una avería importante en los autos observados.

Si tomamos como origen de trabajo el valor x = 4, tomaremos una variable igual a la diferencia: d = x – 4.

x	1	2	3	4	5	6	Sumas
d	− 3	− 2	− 1	0	1	2	
f	40	140	530	890	350	50	2.000
d f	− 120	− 280	− 530	0	350	100	− 480

la media de la variable d es $\bar{d} = \frac{-480}{2.000} = -0{,}24$

Se ha de verificar: $\bar{d} = \bar{x} - 4$

luego: $\bar{x} = \bar{d} + 4 = 4 - 0{,}24 = 3{,}76$

Notar que por los dos procedimientos obtenemos el mismo valor.

7. **La moda es el valor que tiene mayor frecuencia, por tanto, la moda es el 4.° año.**

Mediana: Sus valores centrales son 1.000 y 1.001 como

40 + 140 + 530 + 890 = 1.600

la mediana será también 4.

8. **Tomamos como nueva variable d = x − 33**

x	18	23	28	33	38	43	48	53	58	63	Sumas
d	− 15	− 10	− 5	0	5	10	15	20	25	30	
f	3.800	60.300	106.800	35.900	12.100	9.200	7.500	4.000	3.000	2.000	244.600
d f	− 57.000	− 603.000	− 534.000	0	60.500	92.000	112.500	80.000	75.000	60.000	− 714.000

La media de *d* es $\bar{d} = \frac{-714.000}{244.600} = -2{,}91$

luego $\bar{x} = 33 + \bar{d} = 33 - 2{,}91 = 30{,}09$ años.

9. El número total de matrimonios es 244.600 y la mediana será la edad tal que el número de matrimonios realizados con edad del marido menor o igual que dicha mediana sea la mitad, es decir, 122.300 matrimonios. La suma de matrimonios de las dos primeras clases es 64.100, faltándole 58.200 para el número indicado; la mediana pertenece a la tercera clase, esto es, está comprendida entre 25,5 y 30,5; el número que hay que sumar a 25,5 es la base de un rectángulo cuya área sea 58.200 · 5 = 291.000 y como la altura es la frecuencia 106.800; será h =

$= \frac{291.100}{106.800} = 2{,}72$

La mediana es: x = 25,5 + 2,72 = 28,22

10. La moda será el valor que tiene mayor frecuencia, por tanto, será 28 años.

11. La nota media de ambos es la misma:

$$\bar{x}_A = \bar{x}_B = 5$$

Para el alumno A: $(\sigma_x)^2 = \dfrac{(5-5)^2 + (0-5)^2 + (10-5)^2}{3} = \dfrac{50}{3}$, $\sigma_x = \sqrt{\dfrac{50}{3}} = 4{,}08$

Para el alumno B: $(\sigma_x)^2 = \dfrac{(4-5)^2 + (5-5)^2 + (6-5)^2}{3} = \dfrac{2}{3}$, $\sigma_x = \sqrt{\dfrac{2}{3}} = 0{,}8$

12.

Clases	*Marcas*	*Recuentos*	*f*	*f · x*
47,5 – 52,5	50	//	2	100
52,5 – 57,5	55	///////	7	385
57,5 – 62,5	60	//////////////////////	19	1.140
62,5 – 67,5	65	//////////////	13	845
67,5 – 72,5	70	///////	7	490
72,5 – 77,5	75	//	2	150
			50	3.110

Media = 62,5 , Moda = 60 , Mediana = 60

13. Hemos obtenido una media $\bar{x} = 62{,}5$

El cálculo de la varianza y de la desviación típica, lo disponemos en el cuadro siguiente:

x	50	55	60	65	70	75	Sumas
$x - \bar{x}$	– 12,5	– 7,5	– 2,5	2,5	7,5	12,5	
$(x - \bar{x})^2$	156,25	56,25	6,25	6,25	56,25	156,25	
$(x - \bar{x})^2 f$	312,5	393,75	118,75	81,25	393,75	312,5	1.612,50

de donde:

$$\sigma_x^2 = \frac{1.612{,}50}{50} = 32{,}25 \qquad \sigma_x = \sqrt{32{,}25} = 5{,}67$$

Tenemos:

$$\bar{x} - \sigma_x = 56{,}83 \qquad \bar{x} + \sigma_x = 68{,}17$$

y observando que el número de personas que tiene su peso comprendido entre estos dos números es 36, lo que sobre las 50 personas pesadas supone el 72%.

TEMA XXIV

CORRELACION Y REGRESION

ESQUEMA/RESUMEN

1. Distribuciones bidimensionales.
2. Relación entre las variables.
   - 2.1. Dependencia aleatoria.
   - 2.2. Dependencia funcional.
   - 2.3. Independencia aleatoria.
3. Construcción de un diagrama de dispersión.
4. Coeficiente de correlación de Pearson.
5. Regresión lineal.
   - 5.1. Rectas de regresión.
   - 5.2. Coeficientes de regresión.
6. Coeficiente de correlación lineal.

Notas aclaratorias y complementarias.

INSTRUCCIONES PARA EL ESTUDIO DEL TEMA

Presentamos distribuciones bidimensionales, es decir, distribuciones en las que intervienen dos variables aleatorias. El alumno debe esforzarse en entender el significado de este tipo de distribuciones y las formas utilizadas para representarlas y caracterizarlas matemáticamente. El camino seguido no debe ser nuevo para el alumno, aunque los razonamientos matemáticos sean más complicados, pensando en eso, no hemos deducido ninguna de las expresiones utilizadas, nos ha preocupado, solamente, saber utilizarlas adecuadamente.

1. DISTRIBUCIONES BIDIMENSIONALES

Hasta hora hemos trabajado con una sola variable aleatoria; esto supone estudiar o referirnos a un solo aspecto de la población considerada. Así, hemos analizado y trabajado con la talla de una población de universitarios, con la calificación obtenida en Matemáticas por un grupo de alumnos, etcétera. En todos los casos, hemos considerado una sola variable. La talla en el primer caso, y la calificación de Matemáticas en el segundo.

Nos preocupa ahora considerar dos variables de una misma población. Por ejemplo, al referirnos a una población de alumnos universitarios podemos considerar su estatura o talla y su peso. La talla y el peso son dos variables tomadas sobre una misma población. También podemos fijarnos en la calificación obtenida por un grupo de alumnos en las asignaturas de Matemáticas y Lenguaje; tenemos también, en este caso, dos variables referidas a idéntica población.

Nos encontramos ante *distribuciones bidimensionales* que, como se desprende de lo dicho, estudian dos variables estadísticas o aleatorias sobre una misma población.

Supongamos que tenemos un grupo de siete alumnos y consideramos las puntuaciones obtenidas en dos asignaturas: Matemáticas y Lenguaje. Las calificaciones obtenidas en Matemáticas constituyen una variable, x, y las conseguidas en Lenguaje serán la segunda variable y. Los resultados, por ejemplo, pueden disponerse en la tabla 1.

En la tabla 1 hemos representado las calificaciones obtenidas por una población de siete alumnos en Matemáticas x y en *Lenguaje* y.

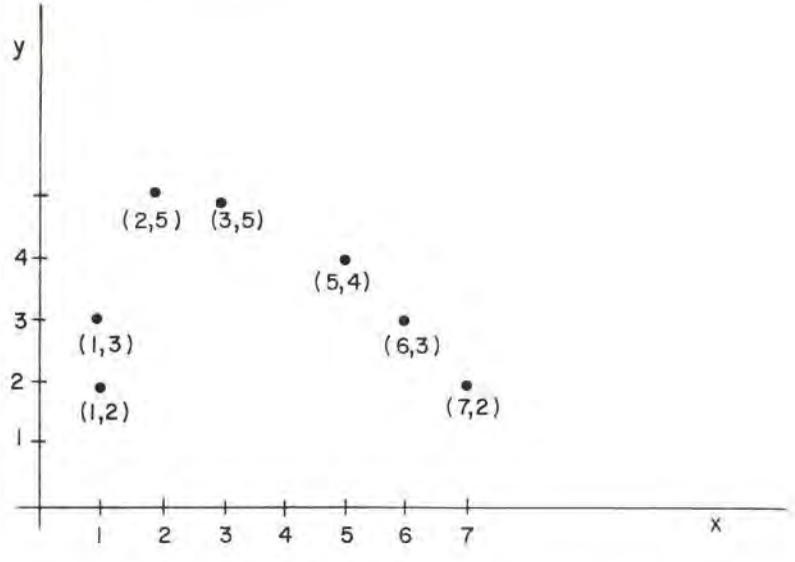
Para hacer una representación gráfica de una distribución bidimensional se utiliza un sistema de ejes rectangulares, uno de los cuales representa a la primera variable y el otro a la segunda variable. Cada observación tiene un par de valores y representará un punto del plano. El conjunto de todos los

x	y
1	2
2	5
3	5
5	4
6	3
7	2
1	3

Tabla 1

puntos es la representación de la distribución bidimensional. Esta representación se suele llamar «nube de puntos» o «diagrama de dispersión».

La representación correspondiente a la tabla 1 es:



En lo que sigue estudiaremos la forma de caracterizar una distribución bidimensional.

2. RELACION ENTRE LAS VARIABLES

2.1. Dependencia aleatoria

Razonemos sobre un ejemplo: tenemos una urna con cinco bolas numeradas del uno al cinco y realizamos dos extracciones. Llamamos *x* al número que obtenemos en la primera extracción e *y* al obtenido en la segunda. Asi (3,1) nos indica que la primera bola era el número 3 y la segunda era el número 1.

Si las extracciones sucesivas las hacemos sin reemplazamiento, nunca podrán aparecer las siguientes parejas: (1,1) (3,3) (2,2) (4,4) (5,5). Estamos ante un caso de una distribución bidimensional

cuyas dos variables tienen una *dependencia aleatoria*, pues del conocimiento de la variable *x* podemos obtener algún dato de la variable *y*.

2.2. Dependencia funcional

Modifiquemos la experiencia del apartado anterior de la siguiente manera: realizamos una sola extracción que constituye la primera variable, la variable *x*, la segunda variable que llamábamos *y* la obtenemos mediante la expresión siguiente:

$$y = 5 - x$$

De forma que si en la primera extracción sacamos una bola con el número 2 tenemos:

$$x = 2$$
$$y = 5 - 2 = 3$$

la pareja obtenida es (2,3)

Por lo tanto, una vez determinado el valor de la variable *x*, la variable *y* queda perfectamente determinada. Decimos que, en este caso, las variables *x* e *y*, *dependen funcionalmente*. Insistimos en que el conocimiento de la variable *x* determina exactamente el comportamiento de la variable *y*.

2.3. Independencia aleatoria

Seguimos con el mismo ejemplo. Ahora, las extracciones las realizamos con reemplazamiento, o sea, una vez obtenido el valor de la variable *x* —primera extracción— volvemos a introducir la bola en la urna para conseguir la variable *y* —segunda extracción—. En este caso, el conocimiento de la variable *x* no nos proporciona ningún dato sobre el correspondiente valor de la variable *y*. En este caso, las dos variables «tienen» *independencia aleatoria*.

3. CONSTRUCCION DE UN DIAGRAMA DE DISPERSION

Para construir un diagrama de dispersión de una distribución bidimensional distinguimos dos casos según se trate de variables aleatorias discretas o continuas. En ambos casos, su representación se hace mediante una tabla de doble entrada.

a) **Variables discretas**

Supongamos que 25 alumnos han obtenido en las asignaturas de Matemáticas y Física las notas reflejadas por los siguientes pares:

(1,2) (2,3) (1,4) (2,5) (7,3) (1,3) (2,4) (5,6) (7,2) (8,1) (9,2) (3,2) (5,3) (3,4) (1,2) (3,1) (4,2) (7,3) (8,1) (9,2) (6,3) (7,1) (3,4) (5,2) (6,3)

el primer número corresponde a la puntuación de Matemáticas, x, y el segundo a la calificación de Física, y.

Con estos datos construimos la siguiente tabla de doble entrada.

x \ y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	f_x
1		••	•	•						4
2			•	•	•					3
3	•	•		••						4
4		•								1
5		•	•			•				3
6			••							2
7	•	•	••							4
8	••									2
9		••								2
f_y	4	8	7	4	1	1	0	0	0	

Los correspondientes valores están representados mediante puntos, las correspondientes frecuencias se obtienen contanto los puntos que aparecen en cada cuadrícula.

b) **Variables continuas**

Consideremos, ahora, como muestra a un grupo de universitarios, siendo las dos variables que nos preocupan el *peso* y la *talla*. Al primero lo representamos por *x* y a la talla por *y*. Los resultados de esta experiencia se representan en la tabla siguiente:

x \ y	150 - 154	155 - 159	160 - 164	165 - 169	170 - 174	f_x
50 - 54	1	3	2	0	1	7
55 - 59	3		3	2		8
60 - 64	4	5	6	1	2	18
65 - 69	1	3	1	7	2	14
70 - 74	1	4	2	1	1	9
f_y	10	15	14	11	6	56

Obsérvese que el peso ha sido distribuido en clases de 5 kg. de rango, mientras que la talla o estatura en clases de 5 cm. En el cuadro inferior de la derecha aparece el número de estudiantes que constituyen la muestra. En este caso es de 56 universitarios. Analizando la tabla, es inmediato comprobar que 56 es la suma de la columna f_x y coincide con la suma de los valores de la columna f_y.

Queda claro, por tanto, que cuando la variable es continua es necesario especificar el número de clases que queremos aparezca en la distribución.

Ejercicios y ejemplos

1. Considerar ejemplos de variables que sean funcionalmente dependientes.

   Un cuerpo soltado a una altura *h* cae con una velocidad

   $$v = \sqrt{2g\,h}$$

   que se llama velocidad de caída libre, en donde *g* es una constante llamada aceleración de la gravedad.

   Si consideramos *h* como primera variable y *v* como segunda variable, parece claro que *v* depende funcionalmente de *h*, para cada valor de *h* obtenemos un valor de *v*.

2. Un grupo de alumnos obtienen en dos asignaturas las calificaciones que representamos por las siguientes parejas:

   (2,1) (4,2) (3,4) (5,3) (2,2) (3,2) (2,4) (1,3) (3,3) (1,5)

   sabiendo que se ha puntuado de 0 a 5 puntos, obtener la nube de puntos.

x \ y	1	2	3	4	5	f_x
1			•		•	2
2	•	•		•		3
3		•	•	•		3
4		•				1
5			•			1
f_y	1	3	3	2	1	

3. En la tabla anterior calcular la frecuencia con que ha aparecido en la primera asignatura, x, las notas 2, 3 y 4. Idem en la segunda asignatura, y, con las notas 3, 5 y 1.

   En la tabla se observa directamente que:

$$f_x(2) = 3 \qquad f_y(3) = 3$$
$$f_x(3) = 3 \qquad f_y(5) = 1$$
$$f_x(4) = 1 \qquad f_y(1) = 1$$

4. COEFICIENTE DE CORRELACION DE PEARSON

Cuando en una distribución bidimensional intervienen dos variables aleatorias que dependen funcionalmente, el conocimiento de una de ellas implica que la otra queda determinada de forma única. En los restantes casos averiguamos la influencia de una variable sobre la otra definiendo los llamados *coeficientes de correlación.*

De estos coeficientes tal vez el más utilizado es el *coeficiente* de *correlación de Pearson,* que representaremos por Cp y lo definimos como el cociente entre la media de los productos de las desviaciones y el producto de las desviaciones típicas.

$$Cp = \frac{\text{Media de los productos de las desviaciones}}{\text{Producto de las desviaciones típicas}}$$

Esquematizamos, a continuación, el proceso a seguir para calcular el coeficiente de correlación de Pearson:

1. Cálculo de la media, $\bar{x}$, de la variable aleatoria x.
2. Cálculo de la media, $\bar{y}$, de la variable aleatoria y.
3. Cálculo de la desviación respecto de la media $\bar{x}$: $(x - \bar{x})$.
4. Cálculo de la desviación respecto de la media $\bar{y}$: $(y - \bar{y})$.
5. Cálculo del producto de las desviaciones: $(x - \bar{x}) \cdot (y - \bar{y})$.
6. Cálculo de la media aritmética de dichos productos.
7. Cálculo de la desviación típica de la variable x.
8. Cálculo de la desviación típica de la variable y.
9. Cálculo del producto de dichas desviaciones.

En la tabla siguiente presentamos un ejemplo:

	x	y	$x - \bar{x}$	$y - \bar{y}$	$(x - \bar{x}) \cdot (y - \bar{y})$	$(x - \bar{x})^2$	$(y - \bar{y})^2$
	0	0	−5	−5	25	25	25
	1	2	−4	−3	12	16	9
	3	4	−2	−1	2	4	1
	5	2	0	−3	0	0	9
	6	7	1	2	2	1	4
	7	5	2	0	0	4	0
	8	9	3	4	12	9	16
	9	5	4	0	0	16	0
	8	7	3	2	6	9	4
	3	9	−2	4	−8	4	16
Total	50	50			51	88	84

$$\bar{x} = \frac{50}{10} = 5 \qquad \bar{y} = \frac{50}{10} = 5$$

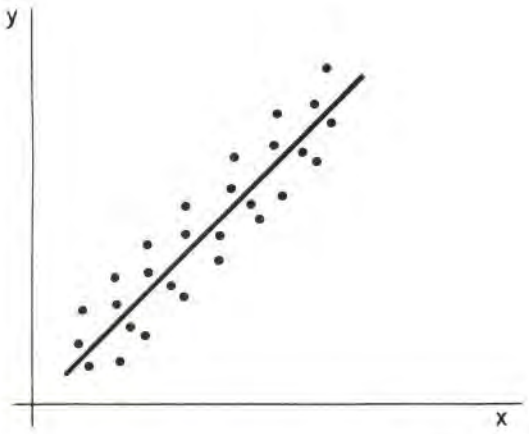
$$Cp = \frac{\frac{51}{10}}{\sqrt{\frac{88}{10}} \cdot \sqrt{\frac{84}{10}}} = \frac{51}{\sqrt{7392}} = \frac{51}{85{,}9} = 0{,}59$$

5. REGRESION LINEAL

Insistimos en la importancia que tiene, en una distribución bidimensional, tratar de relacionar las dos variables, o de otra manera, conociendo los valores de una variable poder predecir los valores de la otra. Veamos, entonces, cómo dada una nube de puntos encontramos una línea recta o curva que se ajuste lo más posible a dicha nube.

5.1. Rectas de regresión

Dada una nube de puntos llamamos *recta de regresión* a una línea recta que se ajuste a esta nube de puntos, tal como indicamos en la figura siguiente:



Puede ocurrir que partiendo de los valores conocidos de la variable *x* tratemos de averiguar los valores que tome la variable *y*, emplearemos la *recta de regresión de y* sobre *x*. En el caso contrario, utilizaremos la *recta de regresión de x sobre y*.

No consideramos oportuno deducir el cálculo de estas rectas de regresión, solamente vamos a establecer unas «fórmulas» que nos permitirán llegar a ellas:

a) Recta de regresión de la y sobre la x:

$$y - \bar{y} = \frac{\Sigma (x - \bar{x}) \cdot (y - \bar{y})}{\Sigma (x - \bar{x})^2} \cdot (x - \bar{x})$$

b) Recta de regresión de la x sobre la y:

$$x - \bar{x} = \frac{\Sigma (x - \bar{x}) \cdot (y - \bar{y})}{\Sigma (y - \bar{y})^2} \cdot (y - \bar{y})$$

Esquematizamos el cálculo de las rectas de regresión:

1. Cálculo de la media $\bar{x}$
2. Cálculo de la media $\bar{y}$
3. Cálculo de la desviación respecto de la media $\bar{x}$
4. Cálculo de la desviación respecto de la media $\bar{y}$

5. Cálculo del producto de dichas desviaciones.

6. Cálculo de los cuadrados de dichas desviaciones.

5.2. Coeficientes de regresión

Acabamos de ver que:

$$y - \bar{y} = \frac{\Sigma (x - \bar{x}) \cdot (y - \bar{y})}{\Sigma (x - \bar{x})^2} \cdot (x - \bar{x})$$

es la recta de regresión de *y* sobre *x*, y que

$$x - \bar{x} = \frac{\Sigma (x - \bar{x}) \cdot (y - \bar{y})}{\Sigma (y - \bar{y})^2} \cdot (y - \bar{y})$$

es la recta de regresión de *x* sobre *y*.

Al término:

$$\frac{\Sigma (x - \bar{x}) \cdot (y - \bar{y})}{\Sigma (x - \bar{x})^2}$$

le llamaremos *coeficiente de regresión de y sobre x.* Análogamente, el término:

$$\frac{\Sigma (x - \bar{x}) \cdot (y - \bar{y})}{\Sigma (y - \bar{y})^2}$$

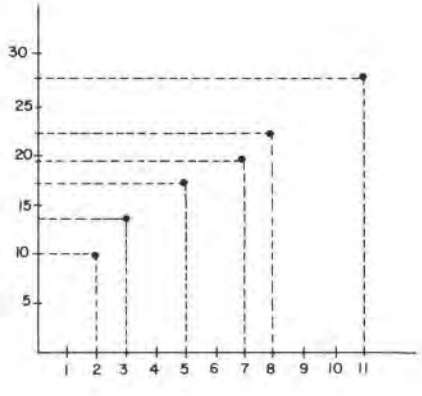
es el *coeficiente de regresión de x sobre y.*

Estos coeficientes de regresión representan la variación de la variable y (o de la variable *x)* en relación con una variación de la variable *x* (o de la variable *y*).

Ejemplos y ejercicios

1. Seis niños de 2, 3, 5, 7, 8, 11 años de edad pesan respectivamente 10, 13, 17, 19, 22, 27 kg. Averiguar el diagrama de dispersión.

   A la edad la llamamos variable x y el peso lo representamos como variable y, obtenemos:



x *edad*	*y* *peso*
2	10
3	13
5	17
7	19
8	22
11	27

2. Con los datos del problema anterior calcular las rectas de regresión y sobre x, y x sobre y.

	x	y	$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})\cdot(y-\bar{y})$	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$
	2	10	−4	−8	32	16	64
	3	13	−3	−5	15	9	25
	5	17	−1	−1	1	1	1
	7	19	1	1	1	1	1
	8	22	2	4	8	4	16
	11	27	5	9	45	25	81
Total	36	108			102	56	188

$$\bar{x} = \frac{2+3+5+7+8+11}{6} = \frac{36}{6} = 6$$

$$\bar{y} = \frac{10+13+17+19+22+27}{6} = \frac{108}{6} = 18$$

Recta de regresión de x sobre y:

$$x-\bar{x} = \frac{\Sigma(x-\bar{x})\cdot(y-\bar{y})}{\Sigma(y-\bar{y})^2}\cdot(y-\bar{y}) \qquad x-6 = \frac{102}{188}(y-18)$$

Recta de regresión de y sobre x:

$$y-\bar{y} = \frac{\Sigma(x-\bar{x})\cdot(y-\bar{y})}{\Sigma(x-\bar{x})^2}\cdot(x-\bar{x}) \qquad y-18 = \frac{102}{56}(x-6)$$

3. En el ejercicio anterior estimar cuál será el peso de un niño que tiene 14 años y cuál será la edad de un niño que pesa 40 kg. Para estimar cuál será el peso de un niño que tiene 14 años emplearemos la recta de regresión de la y sobre la x debido a que el dato que nos dan corresponde a la variable x. Por tanto, sustituiremos la variable x por 14 y obtendremos:

$$y-18 = \frac{102}{56}(14-6)$$

operando obtenemos:

$$y = \frac{102}{56}\cdot 14 - \frac{102}{56}\cdot 6 + 18 = \frac{1.428}{56} - \frac{612}{56} + 18 = 25{,}5 - 10{,}9 + 18 = 32{,}6 \text{ kg.}$$

Para estimar cuál será la edad de un niño que pesa 40 kg haremos lo mismo, pero con la recta de regresión x sobre y:

$$x-6 = \frac{102}{188}(40-18)$$

operando

$$x = \frac{102}{188}(40-18)+6 = \frac{102}{188}(+22)+6 = 17{,}9 \text{ años}$$

4. En el ejercicio anterior calcular los coeficientes de regresión.

Las rectas de regresión que hemos obtenido han sido:

$$y - 18 = \frac{102}{56}(x - 6)$$ Recta de regresión de y sobre x.

$$x - 6 = \frac{102}{188}(y - 18)$$ Recta de regresión de x sobre y

Por tanto, el coeficiente de regresión de y sobre x será:

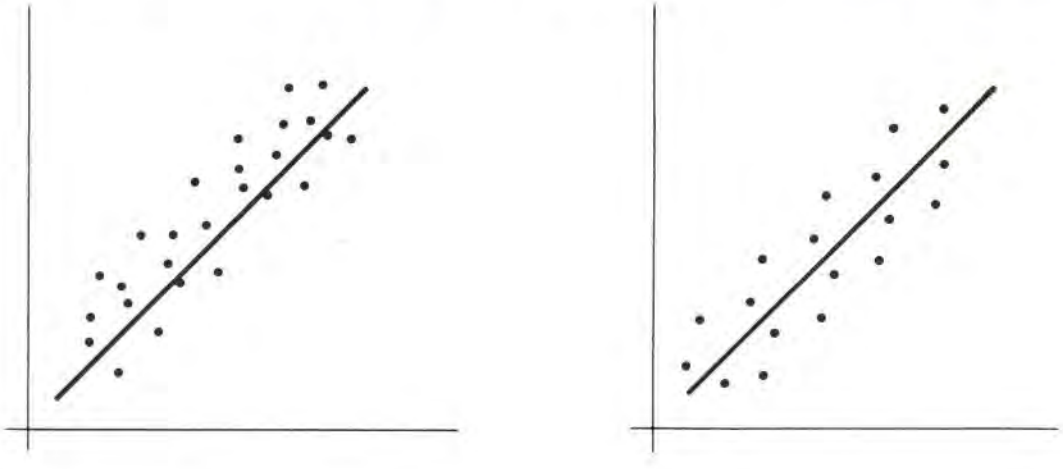
$$\frac{102}{56} = 1{,}82$$

El coeficiente de regresión de x sobre y será:

$$\frac{102}{188} = 0{,}54$$

6. COEFICIENTE DE CORRELACION LINEAL

Una vez que hemos calculado la recta de regresión interesa averiguar cómo se ajusta a la nube de puntos. En las dos figuras siguientes, aparece claro lo que pretendemos decir: En la figura de la derecha la recta de regresión se ajusta mejor a la nube de puntos que en la figura de la izquierda.



La dispersión de la recta de regresión respecto a la nube de puntos la estimamos por medio del *coeficiente de correlación lineal* C_{cl}.

Llamamos *coeficiente de correlación lineal* a la media geométrica de los coeficientes de regresión de las rectas de regresión:

$$C_{cl} = \sqrt{\frac{\Sigma (x - \bar{x}) \cdot (y - \bar{y})}{\Sigma (x - \bar{x})^2} \cdot \frac{\Sigma (x - \bar{x}) \cdot (y - \bar{y})}{\Sigma (y - \bar{y})^2}} = \sqrt{\frac{[\Sigma (x - \bar{x}) \cdot (y - \bar{y})]^2}{\Sigma (x - \bar{x})^2 \cdot \Sigma (y - \bar{y})^2}} =$$

$$= \frac{\Sigma (x - \bar{x}) \cdot (y - \bar{y})}{\sqrt{\Sigma (x - \bar{x})^2 \cdot \Sigma (y - \bar{y})^2}}$$

El coeficiente de correlación lineal puede oscilar entre −1 y +1:

a) Si $C_{cl} = 0$, las variables x e y diremos que están incorreladas, es decir, son independientes aleatoriamente.

b) Si $C_{cl} = 1$, la correlación entre x e y es máxima y, por tanto, las variables x e y son dependientes funcionalmente.

c) Si $-1 < C_{cl} < 1$ y distinto de cero, existe entre las variables x e y una cierta correlación, es decir, dependen aleatoriamente, esta correlación será más fuerte cuando más se acerque hacia 1.

Por tanto, el coeficiente de correlación lineal nos permite saber qué relación existe entre las variables y esto lleva implícito el saber cómo se ajusta el diagrama de dispersión a la recta de regresión.

Ejercicios y ejemplos

1. Dada la siguiente tabla, comprobar, mediante el cálculo del coeficiente de correlación lineal que dichas variables son dependientes funcionalmente.

y	x
3	1
4	2
5	3

calcularemos las rectas de regresión para calcular los coeficientes de regresión.

	y	x	$y - \bar{y}$	$x - \bar{x}$	$(y - \bar{y}) \cdot (x - \bar{x})$	$(y - \bar{y})^2$	$(x - \bar{x})^2$
	3	1	−1	−1	1	1	1
	4	2	0	0	0	0	0
	5	3	1	1	1	1	1
Total	12	6			2	2	2

$$\bar{y} = \frac{5 + 4 + 3}{3} = 4$$

$$\bar{x} = \frac{1 + 2 + 3}{3} = 2$$

Recta de regresión x sobre y

$$(x - 2) = \frac{2}{2}(y - 4)$$

Coeficiente de regresión x sobre y

$$\frac{2}{2} = 1$$

Recta de regresión y sobre x

$$y - 4 = \frac{2}{2}(x - 2)$$

Coeficiente de regresión y sobre x

$$\frac{2}{2} = 1$$

$$C_{c\cdot l} = \sqrt{1 \cdot 1} = 1$$

Por tanto, las variables son dependientes funcionalmente.

2. En el ejemplo n.º 1 pág. 86 averiguar el coeficiente de correlación lineal e interpretar el resultado.

En el ejercicio 4 habíamos calculado los coeficientes de regresión lineal y eran 1,82 y 0,54. Por tanto, el coeficiente de correlación lineal será:

$$Cc\cdot l = \sqrt{1{,}82 \cdot 0{,}54} = \sqrt{0{,}9828} = 0{,}99$$

Por estar el coeficiente de correlación lineal muy próximo a uno nos indica que las variables peso y edad dependen aleatoriamente, pero dicha dependencia es muy fuerte La nube de puntos se ajustará muy bien a la recta de regresión.

3. Dada la siguiente tabla calcular el coeficiente de correlación lineal e interpretarlo.

x	1	2	6
y	1	7	4

	x	y	$x - \bar{x}$	$y - \bar{y}$	$(x - \bar{x}) \cdot (y - \bar{y})$	$(x - \bar{x})^2$	$(y - \bar{y})^2$
	1	1	−2	−3	6	4	9
	2	7	−1	3	−3	1	9
	6	4	3	0	0	9	0
Total	9	12			3	14	18

$$\bar{x} = \frac{1 + 2 + 6}{3} = 3 \qquad \bar{y} = \frac{1 + 7 + 4}{3} = 4$$

Recta de regresión y sobre x

$$y - 4 = \frac{3}{14}(x - 3)$$

Coeficiente de regresión

$$\frac{3}{14}$$

Recta de regresión x sobre y

$$x - 3 = \frac{3}{18}(y - 4)$$

Coeficiente de regresión

$$\frac{3}{18}$$

$$Cc\cdot l = \sqrt{\frac{3}{14} \cdot \frac{3}{18}} = \sqrt{0{,}0357} = 0{,}18$$

Está próximo a cero luego las variables son dependientes aleatoriamente, pero dicha dependencia es muy débil y el diagrama de puntos está muy disperso respecto de la recta de regresión.

NOTA.—Hay que observar que el coeficiente de correlación de Pearson y el coeficiente de correlación lineal son el mismo concepto, pero obtenido de diferente forma.

NOTAS ACLARATORIAS Y COMPLEMENTARIAS

Al calcular el coeficiente de correlación de Pearson podemos evitar el calcular las desviaciones respecto de la media. Supongamos que tenemos una tabla dimensional que se compone de N experiencias. Podemos operar de la siguiente forma:

x	y	x^2	y^2	$x \cdot y$
x_1	y_1	x^2_1	y^2_1	$x_1 \cdot y_1$
x_2	y_2	x^2_2	y^2_2	$x_2 \cdot y_2$
.....	.....	.....	.....	.....
x_n	y_n	x^2_n	y^2_n	$x_n \cdot y_n$
Σx_i	Σy_i	Σx_i^2	Σy_i^2	$\Sigma x_i \cdot y_i$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{N}$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma y_i}{N}$$

$$Cp = \frac{\frac{\Sigma x_i\, y_i}{N} - \bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{N} - \bar{x}^2} \cdot \sqrt{\frac{\Sigma y_i^2}{N} - \bar{y}^2}}$$

Apliquemos este nuevo procedimiento a la tabla:

x	y	x^2	y^2	$x \cdot y$
0	0	0	0	0
1	2	1	4	2
3	4	9	16	12
5	2	25	4	10
6	7	36	49	42
7	5	49	25	35
8	9	64	81	72
9	5	81	25	45
8	7	64	49	56
3	9	9	81	27
50	50	338	334	301

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{10} = \frac{50}{10} = 5$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma y_i}{10} = \frac{50}{10} = 5$$

$$Cp = \frac{\frac{301}{10} - 25}{\sqrt{\frac{338}{10} - 25} \cdot \sqrt{\frac{334}{10} - 25}} =$$

$$= \frac{30{,}1 - 25}{\sqrt{33{,}8 - 25} \cdot \sqrt{33{,}4 - 25}} = \frac{5{,}1}{8{,}59} = 0{,}59$$

Que es el mismo valor obtenido en la primera parte.

En general, para una distribución con datos agrupados, la fórmula para calcular el coeficiente de correlación es:

$$Cp = \frac{\frac{\Sigma n_i x_i y_i}{N} - \bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\left(\frac{\Sigma n_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2\right)\left(\frac{\Sigma n_i y_i^2}{N} - \bar{y}^2\right)}}$$

CONCLUSIONES TEMA XXIV

RELACION ENTRE LAS VARIABLES	Dependencia aleatoria	El conocimiento de una variable nos permite conocer algún dato sobre la otra.
	Dependencia funcional	El conocimiento de una variable determina de una forma exacta el comportamiento de la otra.
	Independencia aleatoria	El conocimiento de una variable no nos permite saber nada de la otra.
COEFICIENTE DE CORRELACION DE PEARSON	$Cp = \frac{\text{media de los productos de las desviaciones}}{\text{producto de las desviaciones típicas}}$	
RECTAS DE REGRESION	y sobre x	$y - \bar{y} = \frac{\Sigma (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\Sigma (x - \bar{x})^2} (x - \bar{x})$
	x sobre y	$x - \bar{x} = \frac{\Sigma (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\Sigma (y - \bar{y})^2} (y - \bar{y})$
COEFICIENTE DE REGRESION	y sobre x	$\frac{\Sigma (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\Sigma (x - \bar{x})^2}$
	x sobre y	$\frac{\Sigma (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\Sigma (y - \bar{y})^2}$
COEFICIENTE DE CORRELACION	$C_{c.l} = \frac{\Sigma (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sqrt{\Sigma (x - \bar{x})^2 \Sigma (y - \bar{y})^2}}$	$C_{c.l} = 0$, x e y son independientes aleatorias. $C_{c.l} = 1$, x e y son dependientes funcionales. $-1 < C_{c.l} < 1$ y $\neq 0$, x e y son dependientes aleatorias.

EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. *Poner ejemplos de variables dependientes aleatoriamente.*

2. *Poner ejemplos de variables dependientes funcionalmente.*

3. *Poner ejemplos de variables independientes aleatorias.*

4. *En el estudio de 5 matrimonios se obtiene la siguiente distribución bidimensional.*

x n.º de hijos varones	y n.º de hijos hembras
1	*2*
2	*3*
0	*1*
3	*3*
4	*1*

Calcular:

a) Nube de puntos.

b) Rectas de regresión.

5. *En un examen de 6 alumnos se han obtenido las siguientes notas:*

Física	7	6	7	8	9	4
Química	8	8	7	8	5	6

Calcular el coeficiente de correlación lineal de Pearson.

6. *En la siguiente tabla se refleja el debe y el haber de 5 empresas (en millones de pesetas).*

Debe	8	4	2	1	5
Haber	10	7	9	6	5

Calcular:

a) *Nube de puntos.*

b) *Rectas de regresión.*

c) *Coeficientes de regresión.*

7. *En el ejemplo anterior estimar el Debe de una empresa que tiene en el Haber 20. Lo mismo para una empresa con el Debe 7.*

8. *Calcular en el ejercicio 6 el coeficiente de correlación e interpretarlo.*

9. *Dadas las siguientes distribuciones:*

x	y
1	4
2	6
3	8
4	10
5	12

x	y
1	0
2	8
8	2
1	2

¿Qué podemos decir de las variables x e y?

10. *Las notas de 20 alumnos en Matemáticas y Física han sido (se puntúa sobre cinco puntos):*

(3,1) (2,4) (5,5) (4,1) (5,1) (3,2) (5,1) (0,1) (3,2) (4,1) (3,3) (4,2) (5,1) (1,2) (1,2) (3,4) (5,5) (1,1) (2,3) (4,2)

Se pide:

a) Calcular la nube de puntos.

b) Calcular la frecuencia de cada puntuación.

11. *El porcentaje de aprobados en una asignatura ha sido el siguiente:*

Año	*1972*	*1973*	*1974*	*1975*	*1976*
	80	*100*	*105*	*120*	*140*

¿Qué numero de aprobados podemos preveer para 1977?

12. *Cinco niños de edades: 3, 4, 5, 6, 7 miden, en centímetros: 65, 72, 96, 100, 112. Calcular las rectas de regresión.*

13. *En el ejercicio anterior calcular cuánto medirá un niño de 10 años de edad y qué edad tendrá un niño que mide 130 cm.*

14. *Calcular el coeficiente de correlación lineal e interpretarlo (del ejercicio n.º 12).*

15. *Calcular el coeficiente de correlación de Pearson del ejercicio anterior y comprobar que obtenemos el mismo valor.*

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. Recordemos que dos variables son dependientes aleatoriamente cuando el conocimiento de una de ellas nos dice algo sobre el comportamiento de la otra, por tanto, serán variables de este tipo los siguientes:

   x = peso en kg. x = velocidad de un coche.

   y = talla en cm. y = tiempo de frenado.

2. Recordemos que dos variables son dependientes funcionales si el conocimiento de una de ellas determina el comportamiento de la otra. Ejemplos:

   $$x = y - 3 \qquad y = 2x - 5$$

3. Recordemos que dos variables son independientes cuando el conocimiento de una de ellas no nos dice nada sobre el comportamiento de la otra. Ejemplos:

   x = número de puntos obtenidos en el lanzamiento de un dado.

   y = número de puntos obtenidos en el lanzamiento de un segundo dado.

   x = Sexo del primer hijo de un matrimonio.

   y = Sexo del segundo hijo en el mismo matrimonio.

4. a)

x \ y	0	1	2	3	4
0		•			
1			•		
2				•	
3				•	
4		•			

b)

x	y	$x - \bar{x}$	$y - \bar{y}$	$(x - \bar{x})(y - \bar{y})$	$(x - \bar{x})^2$	$(y - \bar{y})^2$
1	2	−1	0	0	1	0
2	3	0	1	0	0	1
0	1	−2	−1	2	4	1
3	3	1	1	1	1	1
4	1	2	−1	−2	4	1
				1	10	4

$$\bar{x} = \frac{1 + 2 + 0 + 3 + 4}{5} = \frac{10}{5} = 2 \qquad \bar{y} = \frac{2 + 3 + 1 + 3 + 1}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

Recta de regresión y sobre x:

$$y - 2 = \frac{1}{10}(x - 2)$$

Recta de regresión x sobre y:

$$x - 2 = \frac{1}{4}(y - 2)$$

5.

Físic. x	*Quím.* y	$x - \bar{x}$	$y - \bar{y}$	$(x - \bar{x})(y - \bar{y})$	$(x - \bar{x})^2$	$(y - \bar{y})^2$
7	8	0	1	0	0	1
6	8	−1	1	−1	1	1
7	7	0	0	0	0	0
8	8	1	1	1	1	1
9	5	2	−2	−4	4	4
4	6	−3	−1	+3	9	1
				−1	15	8

$$\bar{x} = \frac{7 + 6 + 7 + 8 + 9 + 4}{6} = \frac{41}{6} = 6{,}8 \qquad \text{Tomaremos como } \bar{x} = 7$$

$$\bar{y} = \frac{8 + 8 + 7 + 8 + 5 + 6}{6} = \frac{42}{6} = 7 \qquad \bar{y} = 7$$

Media de los productos de las desviaciones = $\frac{-1}{6}$

Desviación típica de la variable x: $\sqrt{\frac{15}{6}}$

Desviación típica de la variable y: $\sqrt{\frac{8}{6}}$

Coeficiente de correlación de Pearson:

$$Cp = \frac{-\frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{15}{6}} \cdot \sqrt{\frac{8}{6}}} = \frac{-1}{\sqrt{120}} = \frac{-1}{10{,}9} = 0{,}09$$

6. Llamaremos variable x al Debe y variable y al Haber:

a)

x \ y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0											
1							•				
2										•	
3											
4								•			
5						•					
6											
7											
8											•

b)

x	y	$x - \bar{x}$	$y - \bar{y}$	$(x - \bar{x})(y - \bar{y})$	$(x - \bar{x})^2$	$(y - \bar{y})^2$
8	10	4	3	12	16	9
4	7	0	0	0	0	0
2	9	–2	2	–4	4	4
1	6	–3	–1	3	9	1
5	5	1	–2	–2	1	4
				9	30	18

$$\bar{x} = \frac{8 + 4 + 2 + 1 + 5}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$\bar{y} = \frac{10 + 7 + 9 + 6 + 5}{5} = \frac{37}{5} = 7{,}4 \simeq 7$$

Recta de regresión y sobre x:

$$y - 7 = \frac{9}{30}(x - 4)$$

Recta de regresión de x sobre y:

$$x - 4 = \frac{9}{18}(y - 7)$$

c) Coeficiente de regresión de y sobre x:

$$\frac{9}{30} = 0{,}3$$

Coeficiente de regresión de x sobre y:

$$\frac{9}{18} = 0{,}5$$

7. Como el Haber es 20, en la recta de regresión x sobre y obtenemos:

$$x - 4 = \frac{9}{18}(20 - 7) = \frac{9}{18}(13) = 6{,}5$$

$$x = 4 + 6{,}5 = 10{,}5$$

Por tanto, el Debe estimado es 10,5.

Suponemos ahora que el Debe es 7, por tanto, en la recta de regresión y sobre x obtenemos:

$$y - 7 = \frac{9}{30}(7 - 4) = \frac{9}{30} \cdot 3 = \frac{27}{30} = 0{,}9$$

$$y = 7 + 0{,}9 = 7{,}9$$

Por tanto, el Haber estimado es 7,9.

8. Los coeficientes de regresión eran 0,3 y 0,5, por tanto:

$$C_{c\text{-}l} = \sqrt{0{,}3 \cdot 0{,}5} = \sqrt{0{,}15} = 0{,}38$$

Como está próximo a cero quiere decir que las variables son dependientes aleatoriamente, y dicha dependencia no es muy fuerte, por tanto, la nube de puntos no se ajustará demasiado a la recta de regresión.

9. Calculemos los coeficientes de correlación lineal:

x	y	$x - \bar{x}$	$y - \bar{y}$	$(x - \bar{x})(y - \bar{y})$	$(x - \bar{x})^2$	$(y - \bar{y})^2$
1	4	−2	−4	8	4	16
2	6	−1	−2	2	1	4
3	8	0	0	0	0	0
4	10	1	2	2	1	4
5	12	2	4	8	4	16
				20	10	40

$$\bar{x} = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\bar{y} = \frac{4 + 6 + 8 + 10 + 12}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

Coeficientes de regresión:

$$\frac{20}{10} = 2 \quad , \quad \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$$

x	y	$x - \bar{x}$	$y - \bar{y}$	$(x - \bar{x})(y - \bar{y})$	$(x - \bar{x})^2$	$(y - \bar{y})^2$
1	0	−2	−3	6	4	9
2	8	−1	5	−5	1	25
8	2	5	−1	−5	25	1
1	2	−2	−1	2	4	1
				−2	34	36

$$\bar{x} = \frac{1 + 2 + 8 + 1}{4} = 3 \qquad \bar{y} = \frac{0 + 8 + 2 + 2}{4} = 3; \quad \frac{-2}{34} \; , \; \frac{-2}{36}$$

El coeficiente de correlación lineal de la primera es:

$$C_{c\text{-}l} = \sqrt{2 \cdot \frac{1}{2}} = 1$$

Por tanto, las variables dependen funcionalmente y, efectivamente, resulta que $y = 2x + 2$.

En la segunda:

$$C_{c\text{-}l} = \sqrt{\frac{-2}{34} \cdot \frac{-2}{36}} = \sqrt{\frac{4}{1.224}} = \sqrt{0{,}003} = 0{,}05$$

Por tanto, las variables son prácticamente independientes aleatoriamente, ya que su coeficiente está muy próximo a cero.

10. Llamemos x a la nota de matemáticas e y a la nota de Física:

x \ y	0	1	2	3	4	5	f_x
0		•					1
1		•	••				3
2				•	•		2
3		•	••	•	•		5
4		••	••				4
5		••				••	5
f_y	0	8	6	2	2	2	

11. A los años llamaremos x y calcularemos la recta de regresión y sobre x.

x	y	$x - \bar{x}$	$y - \bar{y}$	$(x - \bar{x})(y - \bar{y})$	$(x - \bar{x})^2$
1972	80	−2	−29	58	4
1973	100	−1	−9	9	1
1974	105	0	−4	0	0
1975	120	1	11	11	1
1976	140	2	31	62	4
				140	10

$$\bar{x} = \frac{1972 + 1973 + 1974 + 1975 + 1976}{5} = 1974$$

$$\bar{y} = \frac{80 + 100 + 105 + 120 + 140}{5} = 109$$

$$y - \bar{y} = \frac{\Sigma (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\Sigma (x - \bar{x})^2} \cdot (x - \bar{x}) \ ,$$

$$y - 109 = \frac{140}{10} (x - 1974)$$

si sustituimos x por 1977 obtenemos:

$$y - 109 = 14\ (1977 - 1974) = 14.3 = 42$$

$$y = 109 + 42 = 151$$

Por tanto, el número de aprobados estimado para 1977 será el de 151.

12.

x edad	*y* estat.	$x - \bar{x}$	$y - \bar{y}$	$(x - \bar{x})(y - \bar{y})$	$(x - \bar{x})^2$	$(y - \bar{y})^2$
3	65	−2	−24	48	4	576
4	72	−1	−17	17	1	289
5	96	0	7	0	0	49
6	100	1	11	11	1	121
7	112	2	23	46	4	529
				122	10	1.564

$$\bar{x} = \frac{3 + 4 + 5 + 6 + 7}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

$$\bar{y} = \frac{65 + 72 + 96 + 100 + 112}{5} = \frac{445}{5} = 89$$

Rectas de regresión

$$y - 89 = \frac{122}{10} (x - 5) \ ; \ x - 5 = \frac{122}{1564} (y - 89)$$

13. $y - 89 = \frac{122}{10} (10 - 5)$; $y = \frac{122.5}{10} + 89 = 150$, medirá 150 cm.

$x - 5 = \frac{122}{1564} (130 - 89)$; $x = \frac{122.41}{1564} + 5 = 8{,}1$, tendrá 8,1 años.

14. $Cc.I = \sqrt{\frac{122}{10} \cdot \frac{122}{1564}} \quad \frac{122}{\sqrt{15640}} = \frac{122}{125} = 0,97$

Por estar el coeficiente de correlación muy próximo a 1 las variables son dependientes aleatorias, pero la dependencia es muy grande. Todos los puntos se encontrarán concentrados sobre las rectas de regresión.

15. Emplearemos los datos de la tabla obtenidos en el ejercicio 13.

Media de los productos de las desviaciones = $\frac{122}{5} = 24,4$

Desviación típica de la variable x = $\sqrt{\frac{10}{5}}$

Desviación típica de la variable y = $\sqrt{\frac{1564}{5}}$

$$Cp = \frac{\frac{122}{5}}{\sqrt{\frac{10}{5}} \cdot \sqrt{\frac{1564}{5}}} = \frac{122}{\sqrt{15640}} = \frac{122}{125} = 0,97$$

TEMA XXV

DISTRIBUCIONES

ESQUEMA/RESUMEN

1. Distribución normal.
   - 1.1. Relación entre la variable tipificada y sin tipificar.
   - 1.2. Relación entre la media, la desviación típica y las variables tipificadas y sin tipificar.
   - 1.3. Cálculo del área bajo la curva normal.
2. Distribución binomial.
   - 2.1. Media y varianza de la distribución binomial.
3. Relación entre las distribuciones normal y binomial.

INSTRUCCIONES PARA EL ESTUDIO DEL TEMA

Terminamos esta Unidad Didáctica y este curso de Matemáticas Básicas presentando unas breves nociones sobre dos tipos de distribuciones, las llamadas normal y binomial. Creemos que son las que más interés presentan desde un punto de vista práctico, que es precisamente el aspecto que hemos destacado en este tema, olvidando todo planteamiento riguroso desde el punto de vista matemático.

1. DISTRIBUCION NORMAL

Una de las distribuciones de probabilidad más importante es la llamada distribución normal o distribución de Gauss, pues la mayoría de las distribuciones estadísticas se aproximan grandemente a ella.

Esta distribución puede expresarse mediante la ecuación:

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

donde μ es la media y σ es la desviación típica ($e = 2{,}71\ ...,\ \pi = 3{,}14...$). Es habitual designarla por $N(\mu, \sigma)$.

Sabemos que la media y la desviación típica son parámetros que varían con cada distribución. Así si tenemos la distribución N(1, 2,7) queremos decir que se trata de una distribución normal cuya media es 1 y la desviación típica 2,7.

Para simplificar la ecuación de la distribución normal se hace el siguiente cambio de variable:

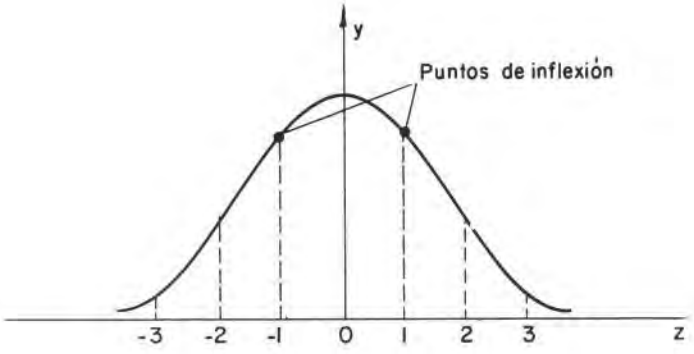
$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

obteniendo la llamada curva normal tipificada.

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

y en este caso z se distribuye normalmente con media 0 y desviación típica 1.

La representación de esta curva nos proporciona la siguiente gráfica:

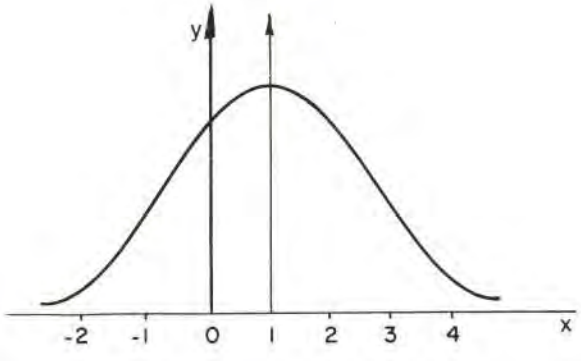


Enunciamos a continuación algunas propiedades fundamentales, consecuencia de la figura anterior:

1. Es simétrica respecto de la media.

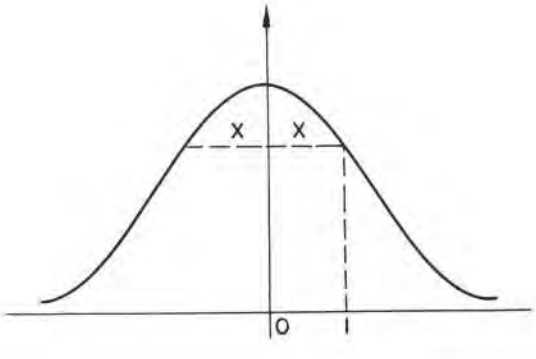
Efectivamente, observemos que en la curva que hemos representado la media valía 0.

Si no hubiese estado tipificada y la media hubiera sido, por ejemplo 1, la representación de la curva sería:



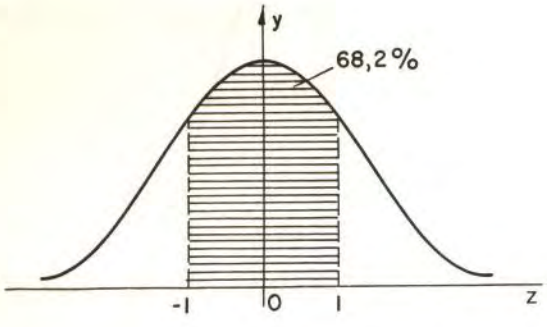
2. La distancia desde cualquier punto de inflexión a la media es igual a la desviación típica.

Asi, si representamos una curva normal N(0,1) llamemos x a la distancia desde los puntos de inflexión a la media, veremos que vale 1.

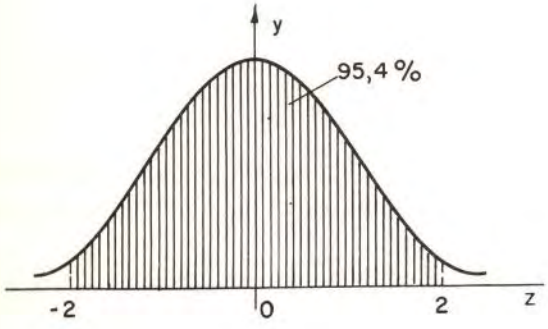


3. El área encerrada por la curva y el eje de las x vale 1.

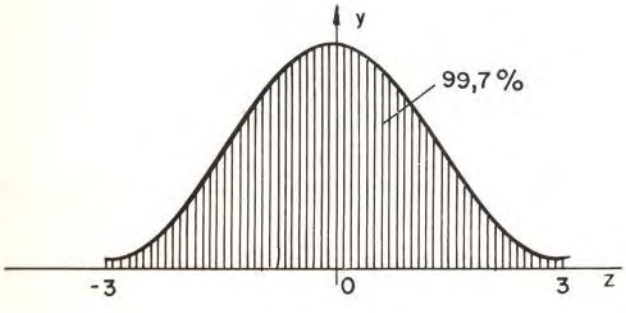
4. El área comprendida entre la curva, el eje de las z y la ordenada de los puntos de inflexión es 68,2 por 100 del área total.



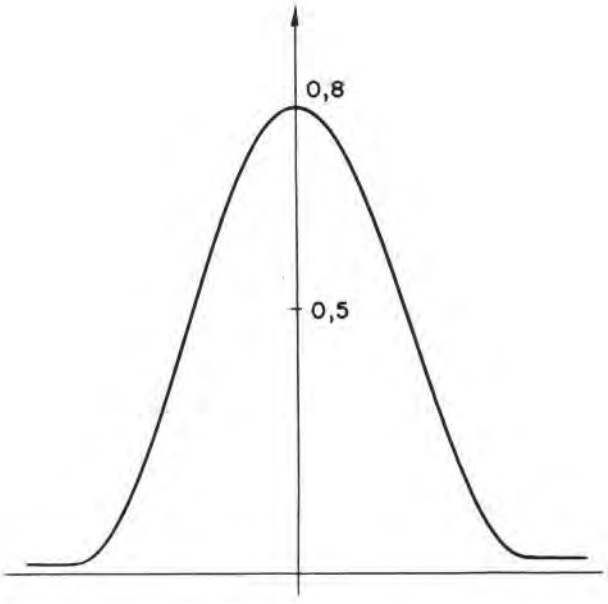
5. El área comprendida entre la curva, el eje de las z, $z = -2$ y $z = +2$ es el 95,4 por 100, es decir:



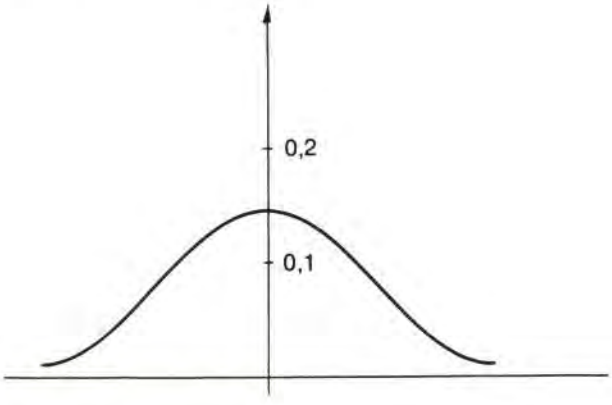
6. El área comprendida entre la curva, el eje de las z, $z = -3$ y $z = 3$ es el 99,7 por 100, es decir:



Si representamos distintas curvas vemos que cuanto mayor sea la desviación típica los datos estarán más dispersos, así si representamos la curva normal N(0, 0,5) obtendremos una gráfica de la forma:



mientras que la curva normal N(0, 3) será de la forma:



1.1. Relación entre la variable tipificada z y sin tipificar x

Habíamos visto que la ecuación normal era de la forma:

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

y que haciendo el cambio

$$\frac{x-\mu}{\sigma} = z$$

pasábamos a la ecuación tipificada normal (0, 1) que resultaba:

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

Nos interesa, ahora, conocidos los datos en función de *x*, obtenerlos en función de *z* y recíprocamente. Veamos un ejemplo: hemos estudiado el peso de una población y hemos obtenido una distribución normal (60, 14), llamemos *x* al peso de unos elementos de la población y supongamos que los valores de *x* son 62, 64 y 58. Vamos a tratar de averiguar los valores que obtenemos si los tipificamos.

Sabemos que el cambio para tipificar una variable es:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

en nuestro caso:

$$z = \frac{x - 60}{14}$$

poniendo en *x* los valores dados 62, 64 y 58:

$$z = \frac{62 - 60}{14} = \frac{2}{14} = 0{,}14$$

$$z = \frac{64 - 60}{14} = \frac{4}{14} = 0{,}28$$

$$z = \frac{58 - 60}{14} = \frac{-2}{14} = -0{,}14$$

Bajo las mismas condiciones supongamos ahora que tenemos los valores de la variable tipificada y queremos averiguar a qué peso corresponden. Sean los valores de z: 0,21, −0,18 y 0,30.

Como $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ si despejamos *x* obtenemos:

$$x = z\,\sigma + \mu$$

en nuestro caso resulta:

$$x = z \cdot 14 + 60$$

$$x = 0{,}21 \cdot 14 + 60 = 62{,}94$$
$$x = -0{,}18 \cdot 14 + 60 = 57{,}4$$
$$x = 0{,}30 \cdot 14 + 60 = 64{,}2$$

Queda claro, pues, la posibilidad de obtener los valores de la variable tipificada *z* conociendo los valores de la variable *x*, y recíprocamente.

1.2. Relación entre la media, desviación típica y los valores de las variables tipificadas y sin tipificar

Sabemos que $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$

expresión que podemos escribir:

$$\sigma z + \mu = x$$

esta expresión nos permite averiguar la desviación típica y la media si conocemos dos valores de *x* y sus correspondientes de z, pues podemos establecer un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas —la media μ y la desviación típica σ— que siempre se puede resolver como ponemos de manifiesto en el ejemplo siguiente:

Supongamos que las notas de dos alumnos en su examen de Matemáticas fueron 0,6 y −0,4, tipificadas, y sus puntuaciones respectivas 70 y 60. Veamos cómo podemos calcular la media y la desviación típica de las puntuaciones obtenidas.

Sabemos que: $z = \dfrac{x - \mu}{\sigma}$

es decir: $z\sigma + \mu = x$

según los datos que tenemos,

$$\begin{aligned} \text{si: } x &= 70 \quad z = 0{,}6 \\ x &= 60 \quad z = -0{,}4 \end{aligned}$$

podemos establecer el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} 0{,}6\,\sigma + \mu &= 70 \\ -0{,}4\,\sigma + \mu &= 60 \end{aligned}\right\}$$

que una vez resuelto nos da los valores de la media y la desviación típica que buscábamos:

$$\sigma = 10 \quad \text{y} \quad \mu = 70 - 0{,}6 \cdot 10 = 64$$

$$\sigma = 10 \quad , \quad \mu = 64$$

1.3. Cálculo del área bajo la curva normal

Hemos visto al enumerar las propiedades de la curva normal la posibilidad de calcular el área para una serie de valores de la variable z. Concretamente, conocemos el área determinada por los intervalos:

$$z = -1 \text{ y } z = 1 \;\; ; \;\; z = -2 \text{ y } z = 2 \;\; ; \;\; z = -3 \text{ y } z = 3$$

Existen tablas que nos permiten calcular el área entre dos puntos cualesquiera de la curva.

Una reproducción de una de estas tablas aparece en la pág. 131 y nos permite averiguar el área comprendida entre 0 y cualquier valor de z.

El manejo de este tipo de tablas es muy sencillo como ponemos de manifiesto con los siguientes ejemplos:

1. Supongamos que queremos calcular el área comprendida entre z = 0 y z = 1,3.

Bajamos por la columna de las z hasta 1,3 y en la fila correspondiente a cero obtenemos 0,4032 que nos da el área comprendida entre z = 0, z = 1,3, el eje de las z y la curva; si queremos obtenerlo en tanto por ciento, multiplicaremos por 100 y obtendremos 40,32 por 100.

2. Queremos calcular, ahora, el área comprendida entre z = −0,32 y z = 1,82.

Como la curva es simétrica respecto del eje de las «y» obtenemos: Area entre z = −0,32 y 0 será igual al área entre 0 y 0,32, luego área entre −0,32 y 1,82 será igual a: área entre 0 y 0,32 + área entre 0 y 1,82 = 0,1255 + 0,4656 = 0,5911, y en tanto por ciento sería igual a 59,11 por 100.

Ejercicios y ejemplos

1. En un examen de Matemáticas se puntúa de 0 a 100 y se presentan a dicho examen 700 alumnos; sabemos que la distribución es normal (47, 20). Si aprueban los que obtienen entre 45 y 50 puntos, ¿cuál es el número de alumnos aprobados?

   Empezaremos tipificando los valores 45 y 50 aplicando la fórmula:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

   y obtendremos:

$$z = \frac{45 - 47}{20} = -0{,}1 \qquad z = \frac{50 - 47}{20} = 0{,}15$$

   Calculamos ahora el área comprendida entre los valores de z = −0,1 y z = 0,15, aplicando las tablas obtendremos:

   Area pedida = (área entre 0 y 0,1) + (área entre 0 y 0,15) = 0,0398 + 0,0596 = 0,0994.

   Que en tanto por ciento resulta 9,94 por 100, aproximadamente el 10 por 100.

   Calculemos ahora el 10 por 100 de 700 alumnos y obtenemos que 70 alumnos aprobarán.

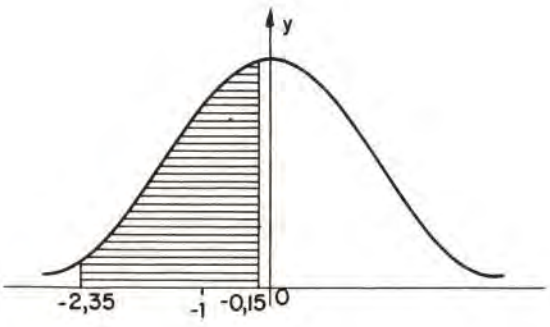
2. Con los mismos datos del ejercicio anterior, ¿cuántos alumnos han suspendido?

   Serán los que saquen de 0 a 44 puntos, por tanto tipificamos dichos resultados y obtendremos:

$$z = \frac{0 - 47}{20} = -2{,}35$$

$$z = \frac{44 - 47}{20} = -0{,}15$$

   calcularemos el área comprendida entre −2,35 y −0,15. Dibujemos el gráfico:



Area pedida = (área 2,35 y 0) − (área 0,15 y 0) = (0,4906) − (0,0596) = 0,4310

y en tanto por ciento 43,10 por 100, por tanto, 44 por 100

calculemos el 44 por 100 de 700 y obtenemos 308; es decir, 308 alumnos suspensos.

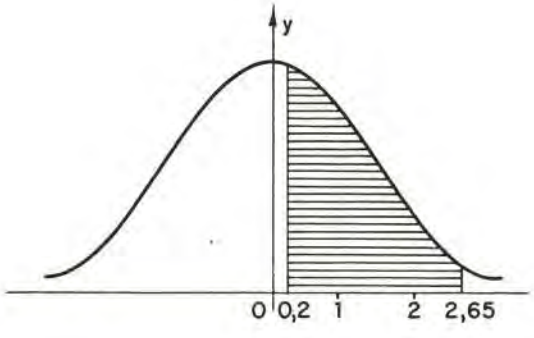
3. Con los mismos datos, ¿cuántos alumnos han obtenido una puntuación superior a 50 puntos?

Tipificaremos en esta ocasión 51 y 100 obteniendo:

$$z = \frac{51 - 47}{20} = 0,2$$

$$z = \frac{100 - 47}{20} = 2,65$$

calcularemos el área comprendida entre 0,2 y 2,65 que será:



Area pedida = (área entre 0 y 2,65) − (área entre 0 y 0,2) = 0,4960 − 0,0793 = 0,4167. Que en tanto por ciento es aproximadamente el 42 por 100 y si calculamos el de 700 alumnos obtenemos 294.

Si calculamos esta suma no me da 700 y es debido a que la tabla no da exactamente el área, lo que me da es una aproximación.

2. DISTRIBUCION BINOMIAL

Supongamos que realizamos un experimento aleatorio que no tiene más que dos posibles resultados. Por ejemplo, lanzar una moneda al aire, no puede salir más que cara o cruz. Sacar una bola de una urna que contiene bolas rojas y blancas, solamente puede salir bola blanca o bola roja. Tomar una bombilla de una cadena de producción, sólo puede ocurrir que sea buena o defectuosa.

Como estos ejemplos podríamos encontrar otros muchos. Llamaremos p a la probabilidad de que ocurra uno de los posibles resultados y q será la probabilidad del otro, que por ser p y q sucesos complementarios tendremos que $q = 1 - p$.

Supongamos que realizamos el experimento n veces, entonces la probabilidad de que aparezca x veces el resultado cuya probabilidad es p viene dada por la fórmula:

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x}$$

Esta distribución de la probabilidad *x* se llama distribución binomial, porque la probabilidad para los distintos valores de *x* son los términos del desarrollo del binomio.

$$(p + q)^n$$

Un ejemplo nos aclarará lo que acabamos de decir:

Supongamos que lanzamos una moneda tres veces y sea p la probabilidad de obtener cara en cada tirada y q la probabilidad de obtener cruz, es decir:

$$p\ (\text{cara}) = p = \frac{1}{2}$$

$$p\ (\text{cruz}) = q = 1 - p = \frac{1}{2}$$

todos los posibles resultados serán (llamaremos C a «obtener cara» y + a «obtener cruz»):

C	C	C	C	+	+
C	C	+	+	+	C
C	+	C	+	C	+
+	C	C	+	+	+

Existen, por tanto, 8 casos posibles: calculemos ahora las probabilidades siguientes:

$$p\ (3 \text{ veces cara}) = \frac{1}{8}$$

$$p\ (2 \text{ veces cara}) = \frac{3}{8}$$

$$p\ (1 \text{ vez cara}) = \frac{3}{8}$$

$$p\ (\text{cero veces cara}) = \frac{1}{8}$$

Si aplicamos la fórmula de la distribución binomial obtenemos:

$$p\ (1\ \text{cara}) = \binom{3}{1}\ p^1 \cdot q^2 = 3 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

$$p\ (2\ \text{caras}) = \binom{3}{2}\ p^2 \cdot q = 3\ \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

$$p\ (3\ \text{caras}) = \binom{3}{3}\ p^3 \cdot q^0 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 1 = \frac{1}{8}$$

$$p\ (0\ \text{caras}) = \binom{3}{0}\ p^0 \cdot q^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

2.1. Media y varianza de la distribución binomial

Recordando el procedimiento seguido para calcular la media, veremos que lo que tenemos que calcular es:

$$\sum_{o}^{n}\ \binom{n}{0} x \cdot p\ (x);$$

por tanto el valor de la media será la suma:

$$0 \cdot p(0) + 1 \cdot p(1) + 2 \cdot p(2) + \ldots + n \cdot p(n) =$$

$$= 0 \cdot \binom{n}{0} p^0 \cdot q^n + 1 \cdot \binom{n}{1}\ p^1 \cdot q^{n-1} + 2\binom{n}{2} p^2 \cdot q^{n-2} + \ldots + n\ \binom{n}{n} p^n \cdot q^0 =$$

$$= \sum_{x=1}^{n}\ x \cdot \binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x} = \sum_{x=1}^{n}\ x \frac{n!}{x!\ (n-x)!}\ p^x \cdot q^{n-x} =$$

$$= n \cdot p \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!\ (n-x)!}\ p^{x-1} \cdot q^{n-x}$$

y obtenemos que:

$$\sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!\ (n-x)!}\ p^{x-1} \cdot q^{n-x} = \sum_{x=1}^{n}\ \binom{n-1}{x-1} \cdot$$

$$\cdot\ p^{x-1} \cdot q^{n-x} = (p+q)^{n-1}$$

y como $p + q = 1$, la media es $n \cdot p$.

Por el mismo procedimiento obtendríamos que la varianza es $n \cdot p \cdot q$.

Por tanto, si llamamos $\bar{x}$ y σ^2, respectivamente, a la media y varianza de una distribución binomial, resulta que:

$$\bar{x} = n \cdot p \qquad y \qquad \sigma^2 = n \cdot p \cdot q$$

El problema que nos planteamos, ahora, es: conocidos una serie de datos calcular una distribución bidimensional que se ajuste lo mejor posible.

Para ello lo que se suele hacer es calcular la media de la muestra e igualarla a la media de la distribución binomial y así podemos calcular el valor de p.

Consideremos el siguiente ejemplo. Supongamos que tenemos 150 piezas y que cada una tiene cuatro taladros; habiéndose observado la siguiente tabla de frecuencias de defectos (en cada uno de los taladros):

N.º de defectos	0	1	2	3	4
Frecuencia	30	62	46	10	2

Vamos a ajustar una distribución binomial y a calcular la probabilidad de los defectos.

En primer lugar, calcularemos la media:

$$\bar{x} = \frac{0.30 + 1.62 + 2.46 + 3.10 + 4.2}{150} = 1,28$$

por tanto, $1,28 = n \cdot p$; como $n = 4$

$$p = \frac{1'28}{4} = 0,32$$

por tanto, la probabilidad de defecto será:

$$\binom{4}{0} (0,32)^0 \cdot (0,68)^4 = 0,214$$

$$\binom{4}{1} (0,32)^1 \cdot (0,68)^3 = 4 \cdot 0,32 \cdot 0,68^3 = 0,402$$

$$\binom{4}{2} (0,32)^2 \cdot (0,68)^2 = 6 \cdot (0,32)^2 \cdot (0,68)^2 = 0,284$$

$$\binom{4}{3} (0,32)^3 \cdot (0,68)^1 = 4 \cdot (0,32)^3 \cdot (0,68) = 0,089$$

$$\binom{4}{4} (0,32)^4 \cdot (0,68)^0 = (0,32)^4 = 0,010$$

y si multiplicamos por el número de piezas obtendremos la frecuencia esperada, que será respectivamente 32, 60, 43, 13,2, que como vemos se aproxima bastante a la tabla dada.

3. RELACION ENTRE LAS DISTRIBUCIONES NORMAL Y BINOMIAL

Si la muestra es de extensión muy grande (n muy grande) y siempre que la probabilidad de p y q no estén muy cerca de cero, la distribución binomial puede sustituirse por una distribución normal de variable tipificada:

$$z = \frac{x - n\,p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$$

Veamos un ejemplo: queremos calcular la probabilidad de obtener entre 2 y 4 caras al lanzar una moneda 10 veces. Apliquemos primero la distribución binomial:

$$p\,(2\text{ caras}) = \binom{10}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^8} = \frac{45}{1024}$$

$$p\,(3\text{ caras}) = \binom{10}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{2^7} = \frac{120}{1024}$$

$$p\,(4\text{ caras}) = \binom{10}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{2^4} \cdot \frac{1}{2^6} = \frac{210}{1024}$$

$$\text{Probabilidad pedida} = \frac{45}{1024} + \frac{120}{1024} + \frac{210}{1024} = 0{,}3662$$

Apliquemos, ahora, la distribución normal, para ello tipifiquemos la variable mediante la fórmula:

$$z = \frac{x - n\,p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$$

$$n \cdot p = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$$

$$\sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 1{,}58$$

$$z = \frac{x - 5}{1{,}58}$$

$$\text{Para } x = 2\ ,\quad z = \frac{2 - 5}{1{,}58} = -1{,}8987$$

$$\text{Para } x = 4\ ,\quad z = \frac{4 - 5}{1{,}58} = -\,0{,}6329$$

El área entre

$$z = -1{,}89 \quad \text{y} \quad z = -0{,}63$$

será:

$$(\text{área } z = 1{,}89 \text{ y } z = 0) - (\text{área } z = 0{,}63 \text{ y } z = 0) = (0{,}4706) - (0{,}2357) = 0{,}2349$$

Observemos que la aproximación es bastante buena y eso que la extensión de la muestra es pequeña, al aumentar la extensión de la muestra la aproximación es mucho mayor.

CONCLUSIONES TEMA XXV

DISTRIBUCION NORMAL	$y = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$
DISTRIBUCION NORMAL TIPIFICADA	$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}$
DISTRIBUCION BINOMIAL	$p(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$ Media = n p Varianza = n p q
RELACION ENTRE LA DISTRIBUCION NORMAL Y LA BINOMIAL	Si n es grande y las probabilidades de p y q no se aproximan a cero, la distribución binomial se aproxima a una normal tipificada, siendo: $z = \frac{x - n\,p}{\sqrt{n\,p\,q}}$

EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. *Dadas las distribuciones N(1,3) y N(2,4), interpretarlas y calcular el valor de z (variable tipificada).*

2. *El conjunto de las notas de un examen de Matemáticas resulta ser una población normal (26, 12). Las notas de 2 alumnos han sido 24 y 40 respectivamente. ¿Cuáles serán los valores tipificados?*

3. *Con los datos del problema anterior, los valores tipificados de dos alumnos han sido –0,20 y 1,42, ¿a qué puntuación corresponden?*

4. *Hemos estudiado el peso de una población y ha resultado una distribución normal. Sabemos que un individuo que pesa 60 kg su valor tipificado es –0,12 y otro que pesa 80 kg su valor tipificado es 1,02, ¿cuál es la media y la varianza de la población?*

5. *Calcular las áreas comprendidas entre:*

   a) $z = -0{,}12$ *y* $z = -1{,}27$

   b) $z = -0{,}12$ *y* $z = 1{,}14$

   c) $z = 0{,}12$ *y* $z = 1{,}14$

6. *En el problema anterior calcular el área en tanto por ciento.*

7. *Se toma una muestra de 100 universitarios y se miden en cm obteniéndose una distribución normal (167, 40). Queremos averiguar cuántos alumnos miden entre 160 y 170.*

8. *Se lanza un dado 10 veces, calcular la probabilidad de que:*

   a) *El 3 aparezca una vez.*
   b) *El 3 aparezca cuatro veces.*

9. *Se lanzan dos monedas distintas al aire, calcular la probabilidad de que ambas sean cruces:*

   a) *Directamente.*
   b) *Aplicando la distribución binomial.*

10. *El 20 por 100 de los alumnos presentados a un examen han aprobado. Si elegimos cuatro alumnos al azar, calcular la probabilidad de que:*

    a) *Dos estén aprobados.*
    b) *Tres estén aprobados.*

SOLUCION A LOS EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. La distribución N(1,3) tiene por media 1 y su desviación típica es 3. El valor de z será:

$$z = \frac{x - 1}{3}$$

La distribución N(2,4) tiene por media 2 y su desviación típica es 4, el valor de z será:

$$z = \frac{x - 2}{4}$$

2.

$$z = \frac{x - 26}{12}$$

por tanto, el valor tipificado de 24 resulta:

$$z = \frac{24 - 26}{12} = -0{,}16$$

y el de 40:

$$z = \frac{40 - 26}{12} = 1{,}16$$

3.

$$z = \frac{x - 26}{12} \qquad z \cdot 12 = x - 26 \qquad x = 26 + z \cdot 12$$

El valor −0,20 corresponde a una puntuación $x = 26 - 0{,}20 \cdot 12 = 23{,}6$.
El valor 1,42 corresponde a una puntuación $x = 26 + 1{,}42 \cdot 12 = 43{,}04$.

4.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad , \quad z\sigma + \mu = x$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 60 \ , \ z = -0{,}12 \\ x = 80 \ , \ z = 1{,}02 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} -0{,}12\,\sigma + \mu = 60 \\ 1{,}02\,\sigma + \mu = 80 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{r} 0{,}12\,\sigma - \mu = -60 \\ 1{,}02\,\sigma + \mu = 80 \\ \hline 1{,}14\,\sigma = 20 \end{array}$$

$$\sigma = \frac{20}{1{,}14} = 17{,}5$$

$$\mu = 60 + 0{,}12 \cdot 17{,}5 = 62{,}1$$

5.

a) Area pedida = (área 1,27 y 0) − (área 0,12 y 0) = 0,3980 − 0,0478 = 0,3502.

b) Area pedida = (área 0,12 y 0) + (área 1,14 y 0) = 0,0478 + 0,3729 = 0,4207.

c) Area pedida = (área 1,14 y 0) − (área 0,12 y 0) = 0,3729 − 0,0478 = 0,3251.

6. Lo único que hay que hacer es multiplicar por 100 y así obtendremos:

35,02 % ; 42,07 % ; 32,51 %

7. Tipificaremos los valores 160 y 170, obtendremos:

$$z = \frac{160 - 167}{40} = -0{,}17 \quad ; \quad z = \frac{170 - 167}{40} = 0{,}07$$

Calcularemos el área comprendida entre $z = -0{,}17$ y $z = 0{,}07$.

Area pedida = (área entre 0,17 y 0) + (área entre 0 y 0,07) = 0,0675 + 0,0279 = 0,0954

que en tanto por ciento es el 9,54.

Calculamos el 9,5 % de 100 y obtenemos: 10 alumnos.

8. Sea p la probabilidad de obtener 3 y q la contraria; por tanto:

$$p = \frac{1}{6} \quad ; \quad q = \frac{5}{6}$$

$$p(3, \text{una vez}) = \binom{10}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^9$$

$$p(3, \text{cuatro veces}) = \binom{10}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6$$

9.

a) Los posibles resultados son:

C C, C +, + C, + +

por tanto, probabilidad de dos cruces es $\frac{1}{4}$.

b) Aplicando la fórmula

$$p = \frac{1}{2} \qquad q = \frac{1}{2}$$

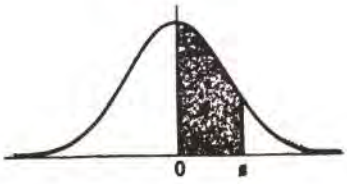
$$p(\text{dos cruces}) = \binom{2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{4}$$

10. p = Probabilidad de aprobar = $\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$

q = Probabilidad de suspender = $\frac{4}{5}$

a) $p(\text{aprueban 2}) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 6 \cdot \frac{1}{25} \cdot \frac{16}{25} = 0{,}1536$

b) $p(\text{aprueban 3}) = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right) = 4 \cdot \frac{1}{125} \cdot \frac{4}{5} = 0{,}0256$



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0754
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2258	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2518	0,2549
0,7	0,2580	0,2612	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2996	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

Precio: 1.500 ptas.